Ein baustatisches Verfahren zur Bestimmung der Traglasten ebener Druckbogen

Autor(en): **Bomhard, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen**

Band (Jahr): **16 (1974)**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-15746

IV

Ein baustatisches Verfahren zur Bestimmung der Traglasten ebener Druckbogen

A Practical Method for Determining the Load Capacity of Plane Arches under Compression

Un procédé pratique pour le calcul de la charge ultime des arcs plans comprimés

Helmut BOMHARD
Direktor der Dyckerhoff & Widmann AG
München, BRD

1. Einleitung

Das Traglastproblem des Druckbogens ist ein Durchschlagproblem mit oder ohne Gleichgewichtsverzweigung. Der für die Traglast ungünstige Durchschlagvorgang ist nur mit einer geometrisch nichtlinearen Theorie faßbar. Doch genügt für die numerische Traglastrechnung im Schlankheitsbereich, den die technischen Baubestimmungen erlauben (z.B. [1] [2]), die geometrisch linearisierte Theorie. Mit dieser bestimmte Traglasten sind dann nur mehr wenige Prozent größer als die Durchschlaglasten, wie Vergleichsrechnungen an 2-Gelenkbogen beweisen [3]. Bei Pfeilverhältnissen $f/l \geq 0{,}1$ kann außerdem die Achsdehnung ε_o unberücksichtigt bleiben.

Auf der Grundlage der geometrisch linearen Theorie wird ein leistungsfähiges und anschauliches Rechenverfahren großer Genauigkeit entwickelt, mit dem die Traglasten ebener Bogen ohne und mit Gleichgewichtsverzweigung schnell von Hand gerechnet werden können, und das mit den üblichen baustatischen Mitteln auskommt. Mit dem Verfahren ist das geometrisch linearisierte Traglastproblem sowohl näherungsweise als auch genau lösbar. Erfaßbar sind bei beliebiger Bogenform und frei wählbaren σ - ε -Beziehungen für Beton und Stahl nicht nur vertikale und horizontale Lasten, sondern auch Geometrieimperfektionen, Vor- und Eigendehnungszustände, eingeprägte Verschiebungen sowie Kriechverformungen.

In [4] ist das Verfahren dazu benutzt, den Einfluß unterschiedlicher Querschnittsformen (Rechteck und 2-Punktquerschnitt) und unterschiedlicher σ - ε -Diagramme von Beton (Normalbeton und Leichtbeton) zu studieren.

2. Voraussetzungen

a. Der Bogen ist eben und nur in seiner Ebene belastet. Ausweicherscheinungen senkrecht zur Bogenebene werden ausgeschlossen.
b. Die Bogenquerschnitte sind unverformbar. Die Schwerpunkte ihrer Betonflächen bilden die Bogenachse. Eine Hauptachse der Querschnitte liegt in der Bogenebene, im übrigen sind sie beliebig geformt.
c. Für die Querschnitte gilt die Bernoulli-Hypothese.
d. Die Anfangskrümmung ist so schwach, daß die Schnittgrößen-Verzerrungsbeziehungen des geraden Stabes gelten.
e. Die Lasten bleiben bei Verformung richtungstreu und ändern ihre Größe nicht.

3. Gleichgewicht

In den Gleichungen kennzeichnet der Zirkumflex die Werte des verformten Bogens.

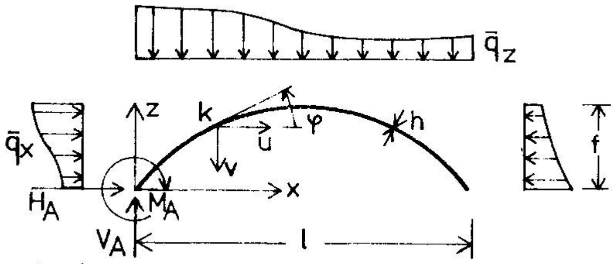

BILD 1
GEOMETRIE UND BELASTUNG

Belastung (Bild 1)

$$\tilde{q}_z d\tilde{s} = \tilde{q}_z(1+\varepsilon_o)\, ds = q_z\, ds = \bar{q}_z\, dx \quad (1a)$$

$$\tilde{q}_x d\tilde{s} = q_x(1+\varepsilon_o)\, ds = q_x\, ds = \bar{q}_x\, dz \quad (1b)$$

Bei $\varepsilon_o = 0$ ist jede Belastung mit einem einheitlichen Lastparameter beschreibbar, weil $\tilde{q}_z = q_z$ und $\tilde{q}_x = q_x$.

Moment und Normalkraft im Querschnitt k (Bild 1)

$$\tilde{M}_{ek} = M_k + V_k u_k + H_k v_k + \triangle M_A + \triangle V_A x_k - \triangle H_A z_k + \int_o^{x_k} \bar{q}_z u\, dx - \int_o^{z_k} \bar{q}_x v\, dz \quad (2a)$$

$$\tilde{N}_{ek} = N_k(1 - \varepsilon_{ok}) + (V_k v'_k - H_k u'_k) \cos\varphi_k - \triangle V_A \sin\varphi_k - \triangle H_A \cos\varphi_k \quad (2b)$$

Auf den rechten Gleichungsseiten ist der Zeiger e für "äußere Schnittgröße" der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

Es bedeuten: $$V_k = V_A - \int_o^{x_k} \bar{q}_z dx, \quad H_k = H_A + \int_o^{z_k} \bar{q}_x dz, \text{ und} \quad (3)$$

$$\triangle M_A = \tilde{M}_A - M_A, \triangle V_A = \tilde{V}_A - V_A, \triangle H_A = \tilde{H}_A - H_A. \quad (4)$$

In (2) sind, im Sinne einer geometrisch linearen Theorie kleiner Verschiebungen, alle Glieder vernachlässigt, die Produkte von Verschiebungsgrößen enthalten (Abschnitt 10).

Die bezogenen Schnittgrößen m und n sind dimensionslos und parametrisiert: $$m = \frac{M}{A_c h f'_c}, \quad n = \frac{N}{A_c f'_c} \quad (5)$$

Der Einfachheit halber sind Ortszeiger k und Zirkumflex weggelassen.

4. Geometrie

Alle Geometriebeziehungen werden linearisiert. Damit gelten die üblichen baustatischen Methoden wie Arbeitsgleichung, Mohrsche Analogien usw.

5. Werkstoffgesetz

Beanspruchbarkeit (m,n) (Bild 2) und Verzerrungen (Stabkrümmung Kh und Achsdehnung ε_o) (Bild 3) eines Querschnitts gegebener Form und Bewehrung ($\omega = p\sigma_y/f'_c, \omega' = p'\sigma_y/f'_c$) werden festgelegt durch

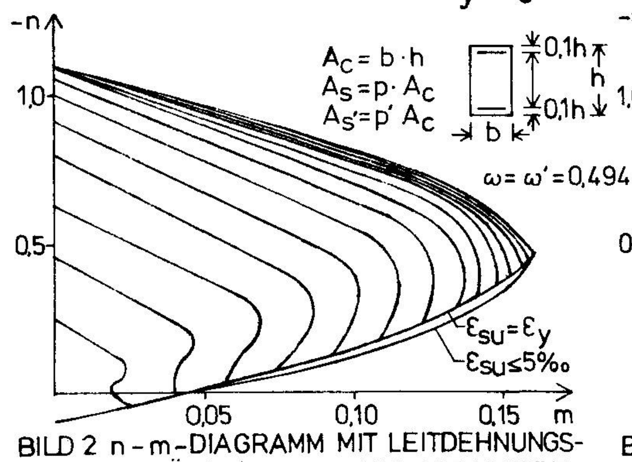

BILD 2 n-m-DIAGRAMM MIT LEITDEHNUNGSZUSTÄNDEN ε_{c1} = KONST. GERASTERT. RASTERABSTAND $\triangle\varepsilon_{c1} = 0{,}25‰$

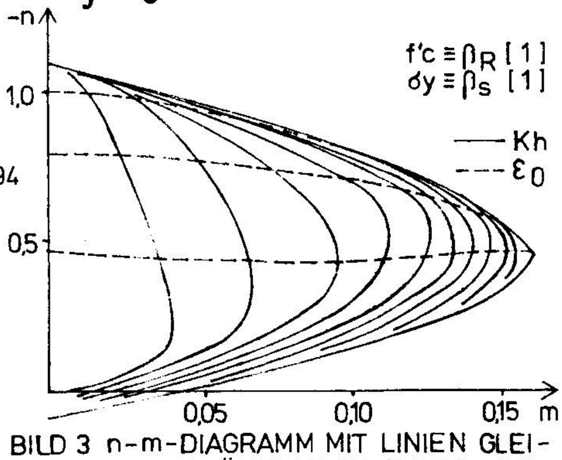

BILD 3 n-m-DIAGRAMM MIT LINIEN GLEICHER KRÜMMUNG Kh (0,5/1,0...5,0) U. ACHSDEHNUNG ε_0 (-0,5,-1,0...-2,0) die Spannungsdehnungslinien von Beton und Stahl sowie durch Dehnungsdiagramme, die angeben, wie weit die σ- ε-Linien ausgenutzt werden dürfen. Jedem Wertepaar m, n ist ein Wert Kh = Kh (m,n) und $\varepsilon_o = \varepsilon_o(m,n)$ eindeutig zugeordnet (s. Bild 3).

Für das Rechenverfahren wird das Interaktionsdiagramm (Bild 2) durch Interaktionslinien gerastert, die durch Variation der Größe der Leitdehnung ε_{c1} des gedrückten Querschnittsrandes erhalten werden. Die Linien bilden nichts anderes als Interaktionsdiagramme mit fiktiven Grenzdehnungen $\varepsilon_{cu\ fikt} = \varepsilon_{c1}$ = konst. Durch dieses Rastern, das mit einem Rechner keine Mühe bereitet, gelingt es, auch die Gleichgewichtszustände zu erfassen, bei denen der Bogen instabil wird, ohne Grenzdehnungen zu erreichen (Linien mit dn/dm = 0 in Bild 8). Meist genügt ein grober Raster.

Das Werkstoffverhalten wird für Kurzzeitlast elastisch vorausgesetzt. Die Traglast wird damit unabhängig von der Belastungsgeschichte.

6. Traglastberechnung mit einem angenommenen Krümmungsverlauf

Das Rechenverfahren ist innerhalb seiner Voraussetzungen auf beliebige Bogenformen und Belastungen anwendbar (Abschnitt 7). Es wird hier am Beispiel symmetrischer Bogen dargestellt, deren Achse bei $\varepsilon_o = 0$ Stützlinie einer symmetrischen Gleichlast $\bar{q}_{zs}$ ist, und die entweder einer antimetrischen Gleichlast $\bar{q}_{za} = \beta\bar{q}_{zs}$ oder einer symmetrischen Scheitellast $Q = \beta\bar{q}_{zs}l$ als Störlasten ausgesetzt sind (Bilder 4, 5, 6). Die Grundgedanken des Verfahrens kommen bei diesem einfachen Bogenmodell besonders klar zum Ausdruck, da es ohne großen formalen Aufwand behandelt werden kann. Der Rechengang ist bei Bedarf ohne weiteres auf allgemeinere Fälle übertragbar, wozu nicht mehr als die üblichen baustatischen Mittel benötigt werden (s. [3]). Wenn beispielsweise auch horizontale Störlasten $\bar{q}_x$ auftreten, müssen sie in die Rechnung einbezogen werden, da sie die Traglast verkleinern.

6.1 Iterationsgleichung für den 3-Gelenkbogen

Die kritische Ausweichform des flachen Bogens (etwa f/l < 0,3) ist symmetrisch (Bild 4). Dementsprechend sind symmetrische Störmomente M_k zu betrachten, wie sie von der Scheitellast Q erzeugt werden.

Aus einer symmetrischen Biegelinie (u_k, v_k) folgen symmetrische Verformungsmomente $\triangle M_k$. Glchg. (2a) läßt sich vereinfachen zu:

$$\tilde{M}_{ek} \simeq M_{k,\bar{q}_{zs}Q} + V_{k,\bar{q}_{zs}Q} \cdot u_k + H_{k,\bar{q}_{zs}Q} \cdot v_k - \triangle H_{A,\bar{q}_{zs}Q} \cdot z_k \qquad (6a)$$

Die Momente werden damit etwas zu groß, weil die vernachlässigten Glieder Anteile liefern, die abzuziehen wären. $\triangle V_A = 0$ aus Symmetriegründen. Bei der Normalkraft verschwinden an der Stelle des Größtmoments in sehr guter Näherung die Differentialquotienten u_k' und v_k'. (2b) läßt sich demnach vereinfachen zu

$$\tilde{N}_{ek} \simeq N_{k,\bar{q}_{zs}Q} - \triangle H_{A,\bar{q}_{zs}Q} \cdot \cos\varphi_k . \qquad (6b)$$

Aus $\tilde{M}_{eG} = 0$ für das Scheitelgelenk k = G folgt

$$\triangle H_{A,\bar{q}_{zs}Q} = \frac{H_{G,\bar{q}_{zs}Q} \cdot v_G}{f} \qquad (7)$$

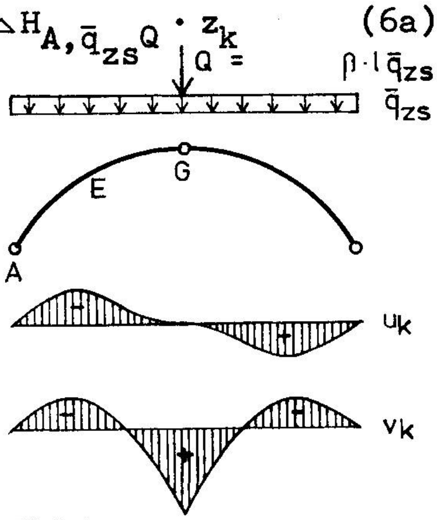

BILD 4
3-GELENKBOGEN (f/l= < 0,3)

Bei bekanntem Krümmungsverlauf $\tilde{K}(x)$ können die Komponenten u_k, v_k des Verschiebungsvektors berechnet werden, beispielsweise mit der Arbeitsgleichung:

$$\frac{u_k}{h} = - \int_0^l \frac{\tilde{K}(x)}{\cos\varphi(x)} M_{H1}(x)dx = - C_{uk} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \left(\frac{f}{l}\right) (\tilde{K}h)_E \tag{8a}$$

$$\frac{v_k}{h} = - \int_0^l \frac{\tilde{K}(x)}{\cos\varphi(x)} M_{V1}(x)dx = - C_{vk} \left(\frac{l}{h}\right)^2 (\tilde{K}h)_E \tag{8b}$$

Dabei bedeuten:

$\tilde{K}_E = - \tilde{M}_E/(\widehat{EI})_E$	Stabkrümmung an der Stelle k = E als Krümmungsparameter
M_{H1}, M_{V1}	Momente aus den virtuellen Einheitslasten H = 1 und V = 1 an der Stelle k
C_{uk}, C_{vk}	Verschiebungskonstanten für die Stelle k, abhängig von f(x) Glchg. (9)

Tatsächlich ist der Krümmungsverlauf unbekannt, er wird deshalb möglichst zutreffend angenommen:

$$\tilde{K}(x) = \tilde{K}_E \, f(x) \tag{9}$$

Die Ansatzfunktion f(x) (Abschnitt 6.4) muß bei symmetrischer Ausweichform ebenfalls symmetrisch sein.

Mit dem angenommenen Krümmungsverlauf (9) kann das Gleichgewicht zwischen äußeren (e) und inneren (r) Schnittgrößen nur an einer Stelle k genau erfüllt werden. Dafür wird die Stelle k = E des Größtmoments gewählt:

$$\max \tilde{M}_{eE} = M_{rE}, \quad \tilde{N}_{eE} = N_{rE} \tag{10}$$

An allen übrigen Stellen wird das Gleichgewicht Fehler aufweisen, deren Größe davon abhängt, wie gut der angenommene Krümmungsverlauf mit dem tatsächlichen übereinstimmt. Die Stelle E könnte iteriert werden, es genügt jedoch

$$E = l/4 \tag{11}$$

zu setzen. Damit werden aus (6) (7) (8) im l/4-Punkt:

$$\tilde{M}_{eE} \simeq - \frac{\bar{q}_{zs} l^2}{32} \left\{ 2\beta + 4(1+2\beta)\left(\frac{l}{h}\right)\left[2\left|C_{uE}\right|\left(\frac{f}{l}\right) + \left(\left|C_{vE}\right| + \frac{3}{4}\left|C_{vG}\right|\right)\left(\frac{l}{f}\right)\right](\tilde{K}h)_E \right\} \tag{12a}$$

$$\tilde{N}_{eE} \simeq - \frac{\bar{q}_{zs} l}{8} \; \frac{1+2\beta}{\cos\varphi_E} \left(\frac{l}{f}\right) \left[1 + \left|C_{vG}\right| \cos^2\varphi_E \left(\frac{l}{f}\right)\left(\frac{l}{h}\right)(\tilde{K}h)_E\right] \tag{12b}$$

Das Zusammenfassen von (12a) und (12b) ergibt nach einigem Rechnen eine parametrisierte Iterationsgleichung für das Wertetripel (n,m,Kh), wobei der Ortszeiger E nicht mehr angeschrieben ist, soweit keine Verwechslungsgefahr besteht ($Kh \equiv \tilde{K}h$):

$$|n| = \frac{4|m|}{\cos\varphi} \left(\frac{l}{f}\right)\left(\frac{h}{l}\right) \frac{1 + \left|C_{vG}\right|\cos^2\varphi\left(\frac{l}{f}\right)\left(\frac{l}{h}\right)|Kh|}{\frac{2\beta}{1+2\beta}\left\{1 + \frac{2(1+2\beta)}{\beta}\left(\frac{l}{h}\right)\left[2\left|C_{uE}\right|\left(\frac{f}{l}\right) + \left(\left|C_{vE}\right| + \frac{3}{4}\left|C_{vG}\right|\right)\left(\frac{l}{f}\right)\right]|Kh|\right\}} \tag{13}$$

Das Zählerglied mit C_{vG} ist vor allem bei flachen Bogen nicht mehr << 1 und deshalb nicht vernachlässigbar.

Die kritische Last schließlich folgt aus:

$$\frac{\bar{q}_{zs,cr}}{b\, f_c'} = 8 \cos\varphi \left(\frac{f}{l}\right)\left(\frac{h}{l}\right) \frac{1}{1 + \left|C_{vG}\right|\cos^2\varphi\left(\frac{l}{f}\right)\left(\frac{l}{h}\right)|Kh|} \; \frac{|n_{cr}|}{(1+2\beta)} \tag{14}$$

Dabei ist $b = A_c/h$ unabhängig von der Querschnittsform die Breite eines flächengleichen Rechteckquerschnitts der Höhe h.

Der steile 3-Gelenkbogen versagt wie der 2-Gelenkbogen, es gelten die für diesen entwickelten Gleichungen.

6.2 Iterationsgleichung für den 2-Gelenkbogen

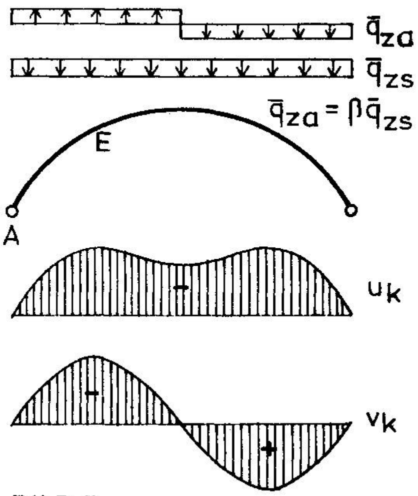

BILD 5
2-GELENKBOGEN UND
3-GELENKBOGEN ($f/l \approx > 0{,}3$)

Die kritische Ausweichform ist antimetrisch (Bild 5). Zu betrachten sind demnach antimetrische Störmomente M_k. Bei der antimetrischen Biegelinie (u_k, v_k) entstehen zusätzlich Verformungsmomente $\triangle M_k$, die aus $\bar{q}_{zs}$ antimetrisch, aus $\bar{q}_{za}$ symmetrisch verlaufen. Für das Tragvermögen entscheidend sind allein die antimetrischen Verformungsmomente, die sehr viel kleineren symmetrischen sind vernachlässigbar. Diese erreichen erst bei $\bar{p}_{xa} \neq 0$ und größerem f/l merkliche Größe. Bleibt außerdem der ebenfalls sehr kleine antimetrische Anteil $\triangle V_A x_k + \int_0^{x_k} \bar{q}_{zs} u\, dx$ unberücksichtigt, so werden Momente $\tilde{M}_{ek}$ erhalten, die etwas zu groß sind. Sie folgen aus (2a):

$$\tilde{M}_{ek} \simeq M_{k,\bar{q}_{za}} + V_{k,\bar{q}_{zs}} \cdot u_k + H_{k,\bar{q}_{zs}} \cdot v_k \tag{15a}$$

Mit den beim 3-Gelenkbogen beschriebenen Vereinfachungen wird aus (2b):

$$\tilde{N}_{ek} \simeq N_{k,\bar{q}_{zs}\bar{q}_{za}} - \triangle V_{A,\bar{q}_{zs}\bar{q}_{za}} \cdot \sin\varphi_k, \tag{15b}$$

wobei

$$\triangle V_{A,\bar{q}_{zs}\bar{q}_{za}} = -\bar{q}_{zs} \int_0^l \frac{u}{l}\, dx \text{ ist.} \tag{16}$$

Die Ansatzfunktion f(x) in (9) für die Stabkrümmung muß bei antimetrischer Ausweichform antimetrisch sein (Abschnitt 6.4). Sie genügt dann auch der Randbedingung $\bar{1} = 1$ mit $\triangle H_A = 0$.

Für die Stelle k = E = 1/4 des Größtmoments werden mit (8)

$$\tilde{M}_{eE} \simeq -\frac{\bar{q}_{zs} l^2}{32} \left\{\beta + 4\left(\frac{l}{h}\right)\left[2\left|C_{uE}\right|\left(\frac{f}{l}\right) + \left|C_{vE}\right|\left(\frac{l}{f}\right)\right](\tilde{K}h)_E\right\} \tag{17a}$$

$$\tilde{N}_{eE} \simeq -\frac{\bar{q}_{zs} l}{8\cos\varphi_E} \left(\frac{l}{f}\right)\left[1 + 4\frac{J}{l}\sin 2\varphi_E \left(\frac{l}{h}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2 (\tilde{K}h)_E\right] \tag{17b}$$

In $\tilde{N}_{eE}$ ist eingesetzt, mit J als Kürzel für das Integral:

$$\triangle V_A = \bar{q}_{zs} \left(\frac{l}{h}\right)\left(\frac{f}{l}\right)(\tilde{K}h)_E \int_0^1 C_u dx.$$

Die Iterationsgleichung wird nach einigem Rechnen ähnlich wie beim 3-Gelenkbogen erhalten:

$$|n| = \frac{4|m|}{\cos\varphi}\left(\frac{l}{f}\right)\left(\frac{h}{l}\right) \frac{1 + 4\frac{J}{l}\sin 2\varphi \left(\frac{l}{h}\right)\left(\frac{f}{l}\right)^2 |Kh|}{\beta + 4\left(\frac{l}{h}\right)\left[2|C_u|\left(\frac{f}{l}\right) + |C_v|\left(\frac{l}{f}\right)\right]|Kh|} \tag{18}$$

Der Ortszeiger E ist nicht mehr angeschrieben. Das Zählerglied mit J ist stets << 1 und kann vernachlässigt werden. Dies bedeutet $\triangle V_A = 0$ in (15b) und (17b). (Lösungen enthält Bild 8.) Die kritische Last wird mit dieser Vereinfachung

$$\frac{\bar{q}_{zs,cr}}{bf'_c} = 8\cos\varphi\left(\frac{f}{l}\right)\left(\frac{h}{l}\right)\left|n_{cr}\right| \tag{19}$$

6.3 Die Iterationsgleichungen für den gelenklosen Bogen

Wie beim 2-Gelenkbogen ist die Ausweichform antimetrisch (Bild 6). Die Momente und Normalkräfte lassen sich deshalb in gleicher Weise vereinfachen. Aus (2a) wird für die Momente:

$$\tilde{M}_{ek} \simeq \overset{o}{M}_{k,\bar{q}_{za}} + \tilde{M}_{A,\bar{q}_{za}} (1-2\tfrac{x}{l}) + V_{k,\bar{q}_{zs}} \cdot u_k + H_{k,\bar{q}_{zs}} \cdot v_k \qquad (20a)$$

(Der zu $\triangle M_A$ gehörende $\triangle V_A$-Anteil ist nicht vernachlässigbar, weil beide zusammen das Glied $\triangle M_A + \triangle V_{A,\triangle M_A} x_k = \triangle M_A(1-2\frac{x}{l})$ bilden).
Die Normalkraft folgt aus (2b):

$$\tilde{N}_{ek} \simeq \overset{o}{N}_{k,\bar{q}_{zs}\bar{q}_{za}} + \frac{2\tilde{M}_{A,\bar{q}_{za}}}{l} \sin\varphi_k \qquad (20b)$$

Dabei sind M^o, N^o, V^o und H^o Werte des 2-Gelenkbogens, der als Hauptsystem benutzt wird, wobei $V \equiv V^o$ und $H \equiv H^o$, weil $M_{A,\bar{q}_{zs}} \equiv 0$.

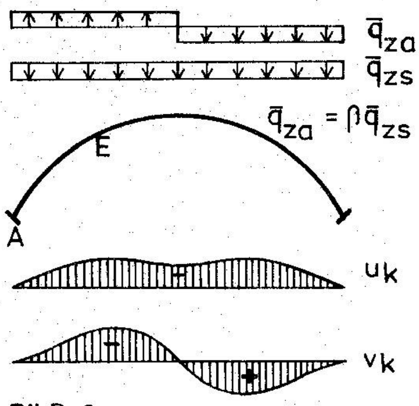

BILD 6
GELENKLOSER BOGEN

Die Ansatzfunktion für die Krümmung muß antimetrisch und durch wenigstens zwei Parameter festgelegt sein (s. Bild 7):

$$\tilde{K}(x) = \tilde{K}_A f_1(x) + \tilde{K}_E f(\tilde{K}_A / \tilde{K}_E)\ f_2(x) \qquad (21)$$

Sie erfüllt die Randbedingung $\tilde{l} = l$. $\tilde{K}_A$ ist die Krümmung an der Einspannstelle $k = A$, $\tilde{K}_E$ an der Stelle $k = E$ des Größtmoments im Feld. Beide, $\tilde{K}_A$ und $\tilde{K}_E$, sind durch die Randbedingung "volle Einspannung" miteinander verknüpft:

$$\int_0^{l/2} \frac{K(x)}{\cos\varphi(x)} M_{M1}(x)\, dx = 0 \qquad (22a)$$

Die Integration liefert $(\tilde{K}h)_E = -c\,(\tilde{K}h)_A$. (22b)
$M_{M1} = 1(1 - 2\frac{x}{l})$ ist das virtuelle Moment.

Mit den Krümmungsparametern $\tilde{K}_A$ und $\tilde{K}_E$ kann das Gleichgewicht an den beiden BogenstellenA und E genau erfüllt werden. Dementsprechend wird ein System von zwei gekoppelten Iterationsgleichungen erhalten. Auch hier wird $E = l/4$ gesetzt.

Aus (20) folgen mit (8) die Schnittgrößen:

$$\tilde{M}_{eA} = -\tilde{K}_A (\tilde{EI})_A \qquad (23a)$$

$$\tilde{N}_{eA} \simeq -\frac{\bar{q}_{zs}\, l}{8\cos\varphi_A} (\tfrac{l}{f}) \left[1 - \beta(\tfrac{f}{l}) \sin 2\varphi_A\right] + \frac{2\,\tilde{M}_A}{l} \sin\varphi_A \qquad (23b)$$

$$\tilde{M}_{eE} \simeq -\frac{\bar{q}_{zs} l^2}{32} \left\{ \beta + 4(\tfrac{l}{h}) \left[2|C_{uE}|(\tfrac{f}{l}) + |C_{vE}|(\tfrac{l}{f})\right] (\tilde{K}h)_E \right\} + \frac{\tilde{M}_A}{2} \qquad (24a)$$

$$\tilde{N}_{eE} \simeq -\frac{\bar{q}_{zs}\, l}{8\cos\varphi_E} (\tfrac{l}{f}) + \frac{2\tilde{M}_A}{l} \sin\varphi_E \qquad (24b)$$

Die Verknüpfung von (23) und (24) ergibt nach einiger Rechnung zusammen mit (22b) das System der Iterationsgleichungen:

$$|n_E| = \frac{2}{\cos\varphi_E} (\tfrac{l}{f})(\tfrac{h}{l}) \frac{2|m_E| + |m_A|}{\beta + 4(\frac{l}{h})\left[2|C_{uE}|(\frac{f}{l}) + |C_{vE}|(\frac{l}{f})\right] |Kh|_E} \pm 2|m_A|(\tfrac{h}{l})\sin\varphi_E \qquad (25a)$$

$$|n_A| = \frac{\cos\varphi_E}{\cos\varphi_A} \left[|n_E| \mp 2|m_A|(\tfrac{h}{l}) \sin\varphi_E\right] \left[1 \pm \beta(\tfrac{f}{l}) \sin 2\varphi_A\right] \pm 2|m_A|(\tfrac{h}{l})\sin\varphi_A \qquad (25b)$$

Die kritische Last wird:

$$\frac{\bar{q}_{zs,cr}}{b\, f'_c} = 8 \cos\varphi_E (\tfrac{f}{l})(\tfrac{h}{l}) \left[|n_E| \mp 2|m_A|(\tfrac{h}{l}) \sin\varphi_E\right]_{cr} \qquad (26)$$

Aus (23) und (24) ergeben sich in den Iterationsgleichungen die unteren Vorzeichen. Sie entsprechen der Untersuchung der linken Bogenhälfte (s. Bild 6), oder anders gesagt, der Kombination der Momente mit den kleinsten Bogendruckkräften. Die oberen Vorzeichen gehören zur Untersuchung der rechten Bogenhälfte in der die Momente zusammen mit den größten Druckkräften auftreten. Maßgebend ist die Bogenhälfte, die das kleinste $\bar{q}_{zs,cr}$ liefert.

6.4 Ansatzfunktionen f(x) für die Stabkrümmung

Bei 3-Gelenk- und 2-Gelenkbogen liefert eine quadratische Ansatzfunktion (Bild 7)

$$f(x) = 8\,\frac{x}{l}\,\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \text{ mit } (x \leq l/2) \qquad (27)$$

meist sehr genaue Traglasten, die fast ausnahmslos etwas kleiner als die exakten Werte sind.

Bei gelenklosen Bogen gibt es dagegen keine einigermaßen einheitliche Ansatzfunktion, die den gesamten β- und f/l-Bereich erfassen würde. Sieht man aber von sehr kleinen Störungen - die meist nicht mehr im baupraktischen Bereich liegen - bei Bogen mit sehr kleinem f/l ab, so sind

$$f_1(x) = 1 - 2\frac{x}{l}\,,\quad f_2(x) = 8\frac{x}{l}\,\left(1 - 2\frac{x}{l}\right) \qquad (28)$$

$$f\,(\tilde{K}_A/\tilde{K}_E) = 1 + |\tilde{K}_A|\,/\,2\,|\tilde{K}_E| \quad \text{für } (x \leq l/2)$$

brauchbare Ansätze (Bild 7).

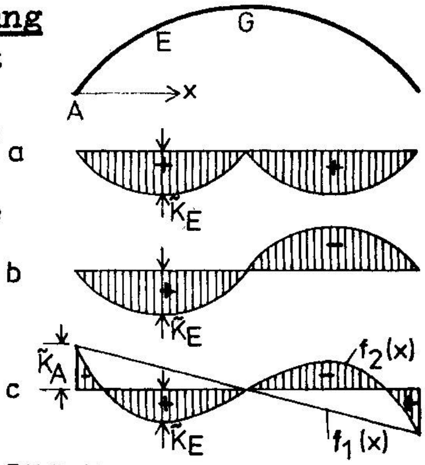

BILD 7
ANSATZFUNKTIONEN f(x)
a : 3 - GELENKBOGEN
b : 2 - GELENKBOGEN
c : GELENKLOSER BOGEN

Stetig gekrümmte Ansatzfunktionen wie (27) (28) vermögen die Stabkrümmung nur so lange zutreffend zu beschreiben, als Fließzonen fehlen, die auftreten, wenn die Stahldehnung auf der Zugseite die Streckgrenze überschreitet. Bei 3-Gelenk- und 2-Gelenkbogen sind solche Zonen nicht bedeutsam, weil deren Tragvermögen mit dem Erreichen der Streckgrenze der Zugbewehrung praktisch erschöpft ist. Bei gelenklosen Bogen aber, kann, besonders wenn sie gedrungen sind, die Last vielfach noch beträchtlich gesteigert werden, wenn an der Einspannstelle die Streckgrenzendehnung überschritten wird. Es breiten sich Fließzonen aus, im Grenzfall fließt die Zugbewehrung auch in den Viertelpunktbereichen. Mit den Ansätzen (28) lassen sich diese Tragreserven nicht erfassen. Das gelingt erst, wenn der Krümmungsverlauf iterativ verbessert und so den auftretenden Fließzonen angepaßt wird (Abschnitt 7).

6.5 Lösen der Iterationsgleichungen

Die Gleichungen werden für die einzelnen Leitdehnungszustände ε_{c1} = konst. gelöst, mit denen das n-m-Diagramm gerastert ist. Auf jeder Rasterlinie gibt es nur ein zusammengehöriges Wertetripel (n,m,Kh), das die Iterationsgleichung erfüllt. Dieses Tripel stellt einen Gleichgewichtszustand dar, der stabil, indifferent oder labil sein kann (s. Bild 8). Das Maximum der Verbindungslinie aller Gleichgewichtszustände ist die kritische Normalkraft n_{cr}, aus der die Traglast $\bar{q}_{zs,cr}$ berechnet werden kann.

Der Iterationsvorgang beim 3-Gelenk- und 2-Gelenkbogen bedarf keiner weiteren Erläuterung. Beim gelenklosen Bogen sind folgende Iterationsschritte nötig:

1. Leitdehnungszustand für Querschnitt A wählen
2. n_A schätzen, der Leitdehnungszustand liefert m_A, $(Kh)_A$
3. n_E aus (25b) rechnen, $(Kh)_E$ aus (22b)

4. n_E und $(Kh)_E$ zusammen ergeben m_E
5. n_E aus (25a) rechnen mit m_E, m_A und $(Kh)_E$
6. n_E-Identität prüfen

Iteration wiederholen bis die Identität erreicht ist.

Verzweigungslasten müssen mit sehr kleinem (Kh) berechnet werden, weil sie für infinitesimal kleine Verschiebungen definiert sind. Mit größerem (Kh) ist ein Lastabfall verbunden (s.Bild 8).

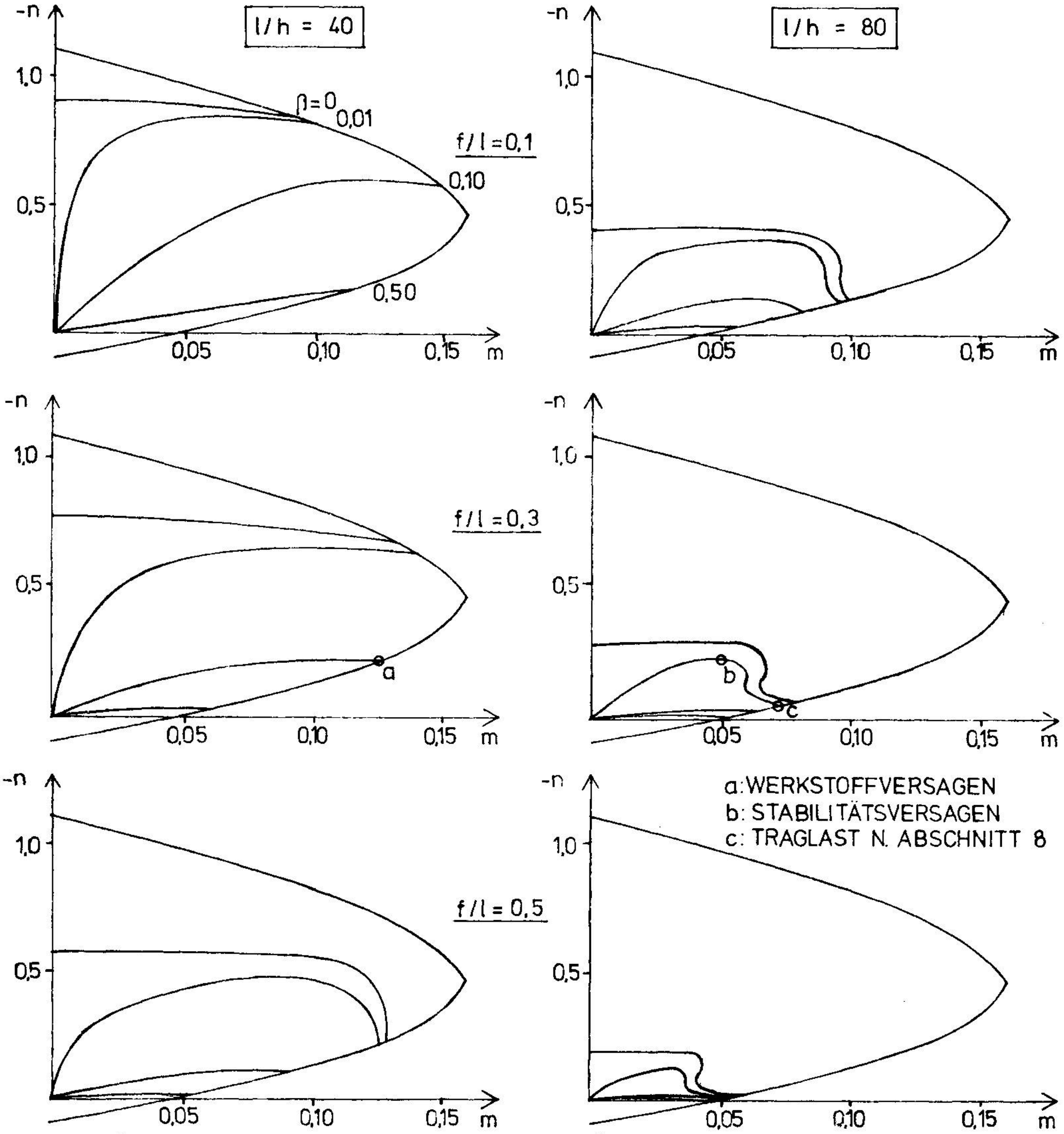

BILD 8 LÖSUNGEN DER ITERATIONSGLEICHUNG FÜR DEN 2-GELENKBOGEN MIT KONST. I-QUERSCHNITT UND $\omega = \bar{\omega} = 0{,}494$ FÜR DIE STÖRPARAMETER $\beta = 0/0{,}01/0{,}10/0{,}50$. σ-ε-DIAGRAMME BETON U. STAHL [1] BILD 13, 14, 15

7. Traglastberechnung mit iterativ verbessertem Krümmungsverlauf

Durch iteratives Verbessern des Krümmungsverlaufs kann das Traglastproblem exakt gelöst werden. Nachdem $(Kh)_{E,cr}$ und n_{cr} nach Abschnitt 6 bestimmt sind, ist eine Iteration mit folgenden Schritten nötig:

1. Biegelinien u und v rechnen.
2. mit den Biegelinienwerten $\tilde{M}_e$- und $\tilde{N}_e$-Verlauf rechnen.

3. aus $\tilde{M}_e = M_r$ und $\tilde{N}_e = N_r$ verbesserten $\tilde{K}$-Verlauf bestimmen
4. Einhalten der Randbedingungen prüfen. Wenn nötig $\tilde{M}_e$-, $\tilde{N}_e$- und $\tilde{K}$-Verlauf durch stat. unbest. Rechnung berichtigen.
5. Iterationsgleichung an den verbesserten und mit den Randbedingungen verträglichen $\tilde{K}$-Verlauf anpassen (C-Werte und ggf. verbesserte Stelle E) und lösen.

Iteration mit den verbesserten n_{cr}- und $(Kh)_{E,cr}$-Werten wiederholen, bis die Ergebnisse zweier Durchgänge ausreichend übereinstimmen. Die Konvergenz ist gut, meist reichen ein bis zwei Durchgänge aus.

Normalerweise genügen auch für diese Rechnung die Näherungsausdrücke des Abschnitts 6 für $\tilde{M}_{ek}$ und $\tilde{N}_{ek}$. Es wäre nicht schwierig, nur mühsam, die genauen Gleichungen (2) zu benutzen. Ebenso könnte die Achsdehnung ε_o in die Iteration einbezogen werden, was vor allem bei 3-Gelenkbogen mit $f/l < 0,1$ nötig sein kann.

Das Verfahren der iterativen Verbesserung soll nicht die Regel sein. Es ist vielmehr besonders zum Nachprüfen der Güte der $\tilde{K}$-Ansatzfunktion gedacht, wenn Querschnitt und Bewehrung veränderlich sind. Dazu genügt schon ein Iterationsdurchgang.

8. Traglastberechnung mit Grenzdehnungszuständen

Das ist die einfachste Art der Traglastrechnung. Sie arbeitet mit einem angenommenen Krümmungsverlauf (Abschnitt 6), verzichtet aber auf die Rasterung des n-m-Diagramms durch Leitdehnungszustände (Abschnitt 5) und löst die Iterationsgleichung nur für die Begrenzungslinie des Diagramms, also für Grenzdehnungszustände. Damit ist zwar die Bruchlast erfaßbar, nicht aber die vielfach beträchtlich höhere Traglast bei Stabilitätsversagen, das durch $dn/dm = 0$ gekennzeichnet ist (s. Bild 8).

9. Verallgemeinern der Ergebnisse

Die für einen bestimmten Bogen gewonnenen Ergebnisse gelten für alle Bogen gleichen statischen Systems mit gleichen Geometrie-, Bewehrungs-, Werkstoff- und Lastparametern (Bild 9). Beispielsweise sind die Verschiebungen (8) u/h und v/h parametrisierte Verschiebungswerte und die krit. Lasten (14) (19) (26) q/bf_c' parametrisierte Lasten. Parametrisiert sind sie für konst. Querschnitt. Bei veränderlicher Querschnittshöhe und -fläche wäre grundsätzlich h durch h_o zu ersetzen, wenn h_o als Höhenparameter eingeführt wird, und außerdem in (8) $(Kh)_E$ durch $(Kh)_E\ h_o/h_E$ und in (14) (19) b durch $b_E\ h_E/h_o$, um einige Beispiele zu nennen.

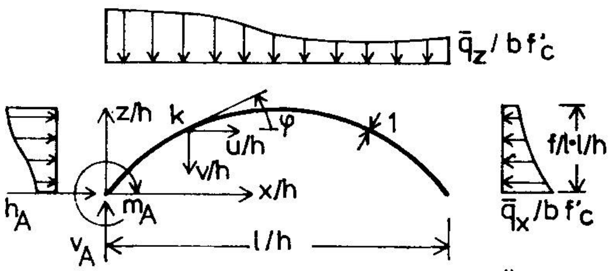

BILD 9 PARAMETRISIERTER BOGEN FÜR KONSTANTES A_c UND h.
$h_A = H_A/A_c f_c'$, $v_A = V_A/A_c f_c'$

10. Berücksichtigen des Einflusses nichtlinearer Geometrieglieder

Der Einfluß der nichtlinearen Geometrieglieder läßt sich durch Korrekturen $\triangle u$, $\triangle v$ der Biegelinien u,v nach dem Gesetz

$$\triangle u' - \triangle v'z' + (\tfrac{1}{2}\, v'^2 + \varepsilon_o v'z')\,(1 + z'^2) = 0 \qquad (29)$$

abschätzen. Der Vergleich mit der linearisierten Verschiebungsbeziehung:
$$u' - v'z' - \varepsilon_o\,(1 + z'^2) = 0$$
zeigt, daß $(1/2\ v'^2 + \varepsilon_o v'z')$ als fiktive Achsdehnung gedeutet werden kann. Die Biegelinienkorrekturen $\triangle u$, $\triangle v$ sind demnach in 1. Näherung nichts anderes als die horizontale bzw. vertikale Biegelinie aus einer fiktiven Dehnung

$$\varepsilon_{o\ fikt} = -\left(\frac{1}{2}\,v'^2 + \varepsilon_o v' z'\right) \tag{30}$$

Auch sie sind demnach mit baustatischen Mitteln berechenbar.

Der Einfluß ist nur für den Grenzfall äußerst schlanker Bogen bedeutsam. Die Rechnung vermag lediglich das Einleiten des Durchschlags zu erfassen.

In Glchg.(2) sind die Glieder vernachlässigt, die Produkte von Verschiebungsgrößen enthalten, bei M_{ek}: $\triangle V_A u_k$ und $\triangle H_A v_k$.

SCHRIFTTUM

[1] DIN 1045, Ausgabe 1972

[2] Internationale CEB-FIP-Richtlinien, Ausgabe Juni 1970

[3] Bomhard, H.: "Verfahren zur Traglastberechnung ebener Druckbogen mit nichtlinear-elastischem Werkstoffgesetz und nichtlinearen Geometriebeziehungen". Dissertation TU München, 1974

[4] Bomhard, H.: "Versagensformen und -größen der Druck- und Zugbogen des Hallenbaus". Sicherheit von Betonbauten, Beiträge zur Arbeitstagung, Berlin 1973. Wiesbaden: Deutscher Beton-Verein E.V.

ZUSAMMENFASSUNG

Für ebene Druckbogen wird ein leistungsfähiges Handrechenverfahren beschrieben, das im gesamten Ausmittenbereich mit geringem Arbeitsaufwand sehr genaue Traglasten liefert. Das Verfahren arbeitet auf deterministischer Basis und kann mit unterschiedlichen Genauigkeitsansprüchen betrieben werden. Es führt bei iterativ verbesserter Stabkrümmung zur genauen Lösung des geometrisch linearisierten Traglastproblems. Das Problem wird so parametrisiert, dass die Ergebnisse bei gleichen Parametern allgemein gelten.

SUMMARY

An efficient manual computation method for plane compression arches is presented by which very accurate load carrying capacities can be evaluated for the whole eccentricity range with a comparatively small effort. The method works on a deterministic basis and can be applied to varying demands of accuracy. By iteratively improving the bar-curvature, it eventually leads to the accurate solution of the geometrically linearized problem. The problem is parametrizised thus that the results are generally applicable.

RESUME

Pour les arcs comprimés plans, on décrit un procédé pratique de calcul à la main, qui fournit en peu de temps les charges ultimes très précises dans toute la zone d'excentricité. Le procédé fonctionne sur une base déterministe et peut être appliqué avec n'importe quel degré de précision. En améliorant itérativement la courbure des barres, il peut conduire à la solution exacte du problème de charge ultime géométriquement linéarisé. Le problème repose sur des paramètres tels que les résultats sont toujours valables quand les paramètres sont égaux.