

# Die Bemessung von Stahlbetonstützen mit Hilfe von "Ersatzkrümmungslinien" (Ein einfaches Nährungsverfahren)

Autor(en): **Sparowitz, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen**

Band (Jahr): **17 (1974)**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-16490>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**Die Bemessung von Stahlbetonstützen mit Hilfe von „Ersatzkrümmungslinien“  
(Ein einfaches Näherungsverfahren)**

The Design of Reinforced Concrete Columns by Means of „Substituting  
Curvature Lines“  
(A simple Approximation Method)

Le dimensionnement de colonnes en béton armé à l'aide des „Lignes de  
remplacement moment/courbure“  
(Une méthode simple d'approximation)

**L. SPAROWITZ**

Dipl. Ing.

Institut für Stahlbeton- und Massivbau  
Technische Hochschule Graz  
Graz, Austria

## 1. EINFÜHRUNG

Die Vereinfachung der Verformungsberechnung durch die Annahme eines bestimmten Krümmungsverlaufes entlang der Stabachse führt zu einer Betrachtung des Momenten-Krümmungs-Zusammenhanges im maßgebenden Stabquerschnitt. Im Abschnitt 3 wird dies am einfachsten Beispiel einer sinusförmigen Krümmungsverteilung gezeigt. Eine bessere Näherung erhält man allerdings, wenn man den Krümmungsverlauf infolge der Biegemomente nach Theorie I. Ordnung affin zu diesen und den Krümmungszuwachs infolge der Stabverformungen parabelförmig annimmt [1].

Durch die klare Trennung in Beanspruchung (Bild 4,  $M_a$ -Gerade) und Widerstand (Bild 4, M-K-Linie) lassen sich auch geteilte Sicherheitskoeffizienten in anschaulicher Weise berücksichtigen.

Der Einfluß von Kriechen und Schwinden kann näherungsweise in Rechnung gestellt werden, indem man die Kurzzeit-Stabverformungen mit einem Faktor  $1 \leq c_t \leq 2$  vergrößert; er wird in [1] vom Verhältnis der Dauerlast zur Gesamtlast abhängig gemacht.

Damit das Bemessungsverfahren auch für baupraktisch untergeordnete Zwecke verwendbar ist, muß eine einfache Darstellungsform für den M-K-Zusammenhang angegeben werden. Dies wird, wie nachfolgend für den Rechteckquerschnitt gezeigt, mit Hilfe von "Ersatzkrümmungslinien" erreicht.

## 2. DAS ERSATZ-M-K-DIAGRAMM

Im Bild 1 sind für verschiedene Bewehrungsgrade  $\bar{\mu}$  und symmetrische Bewehrungsanordnung ( $\mu = \mu'$ ) bezogene M-K-Diagramme dargestellt, wobei die Ordinatenwerte für die bezogene Krümmung  $\bar{K} = 1 \%$  auf eins reduziert sind. Die Normalkraft stellt den Kurvenparameter dar.

Man stellt fest, daß sich die Form der bezogenen M-K-Linien mit der Normalkraft nur relativ geringfügig ändert.

Die die Kurvenscharen rechts begrenzenden strichlierten Hüllkurven werden als "Ersatz-M-K-Linien" für den jeweiligen Bewehrungsgrad definiert. Man erkennt, daß dadurch die Krümmung und damit die

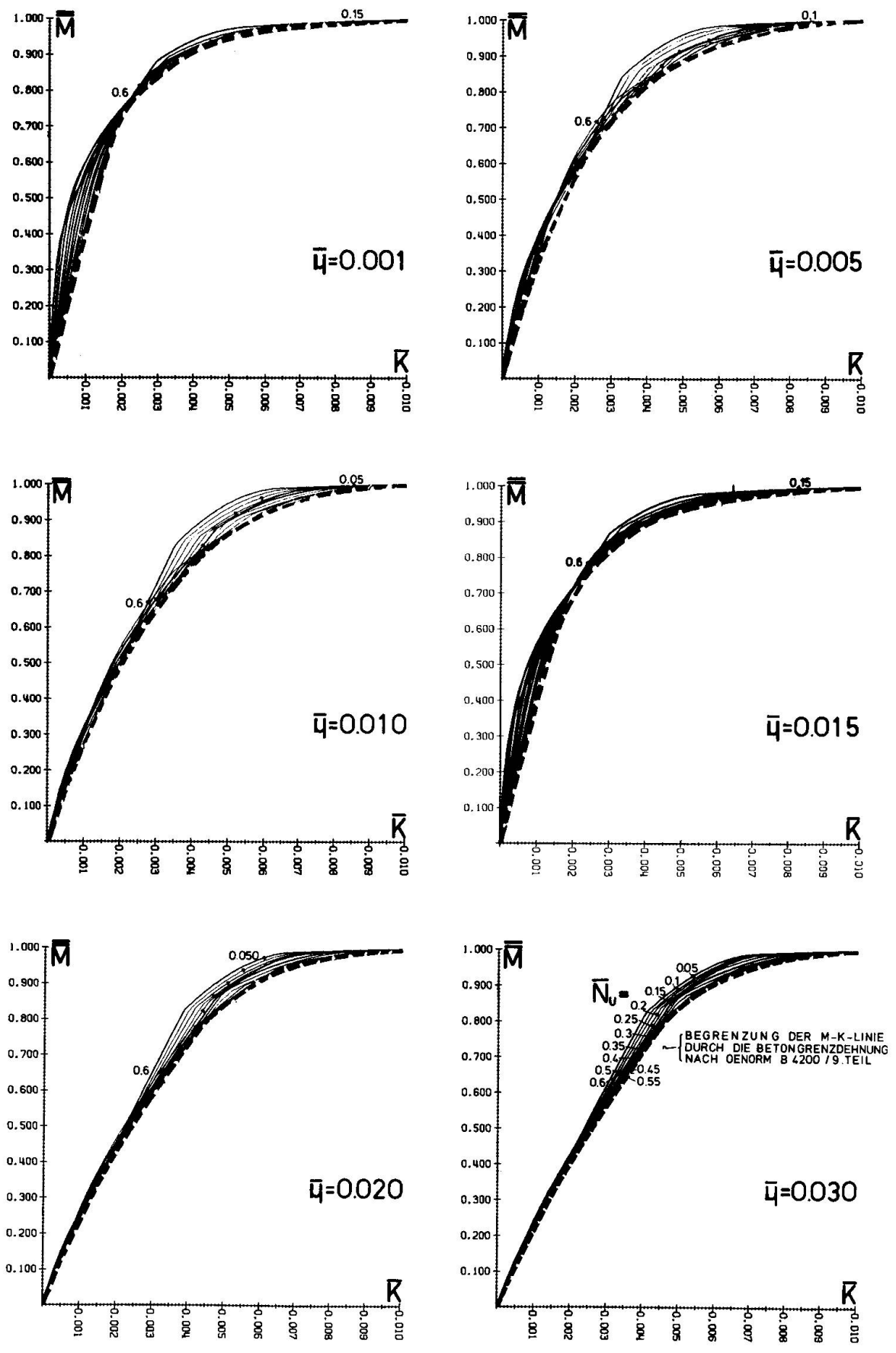


Bild 1

Stabverformung meist etwas zu groß in Rechnung gestellt wird. Das Näherungsverfahren liefert daher immer gegenüber einer strengen Berechnung auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse. Die Abweichungen bleiben für alle möglichen Bewehrungsgrade ungefähr von gleicher Größe.

Im letzten Diagramm des Bildes 1 für  $\bar{\mu} = 3\%$  sind die Grenzdehnungszustände als Funktion der Normalkraft eingetragen, die sich aus bestimmten in den Normen festgelegten Grenzdehnungen ergeben. Sie werden horizontal auf die Ersatzlinie übertragen.

Das Bild 2 zeigt die Ersatz-M-K-Linien zu einem Diagramm zusammengefaßt, mit dem bezogenen Bewehrungsgrad als Kurvenparameter. Die Ersatz-M-K-Linien sind unabhängig von der Normalkraftbeanspruchung. Die querverlaufenden Linien (Grenzlinien) stellen Grenzdehnungszustände als Funktion der Normalkraft dar, wie sie sich nach den österreichischen Vorschriften ergeben. Die Grenzlinien für bezogene Normalkräfte  $< 0,3$  werden zur Erhöhung der Ablesegenauigkeit aus dem Bild herausgezogen.

## ERSATZ - M - K - DIAGRAMM

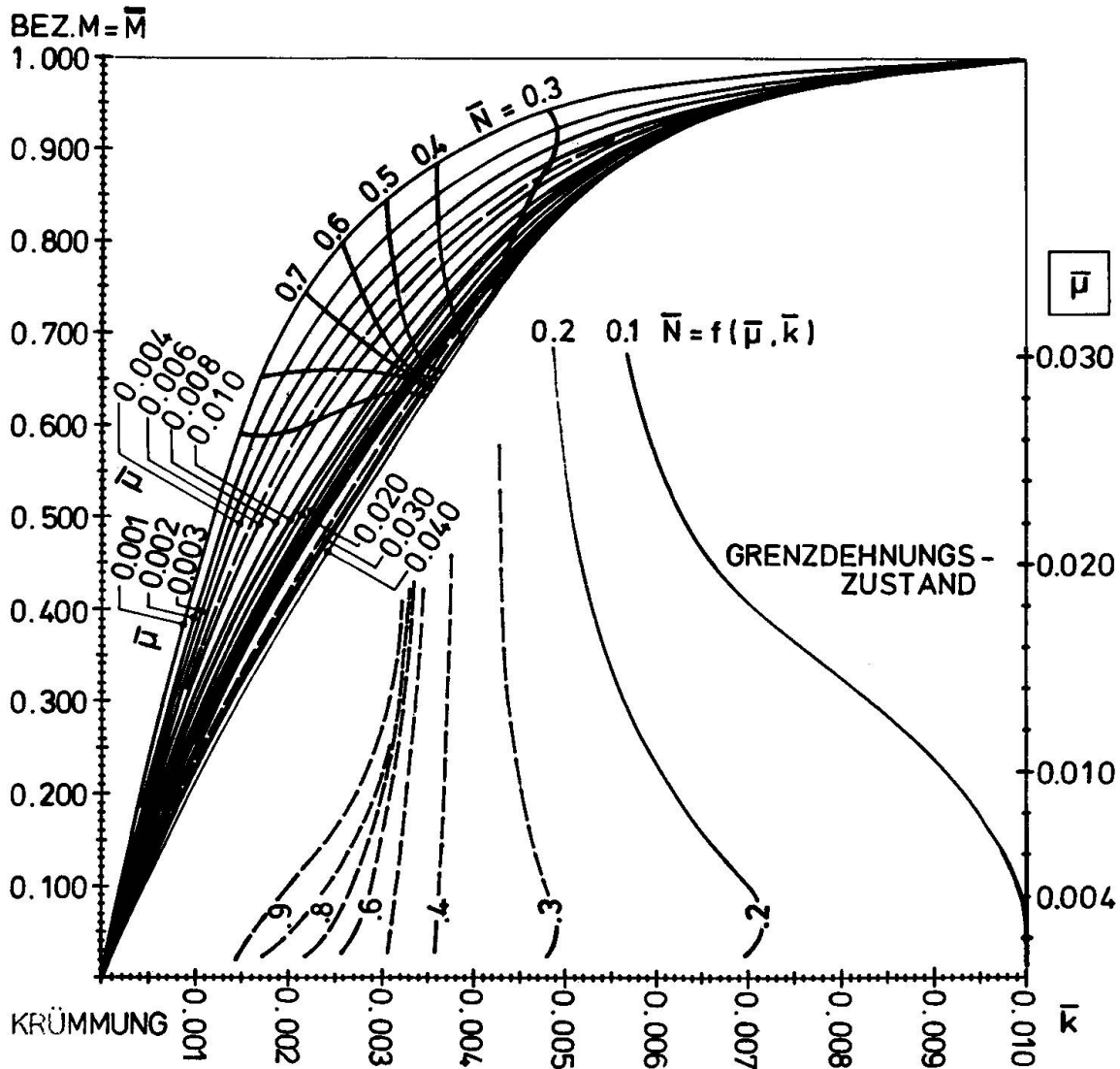


Bild 2

3. DIE VERWENDUNG VON ERSATZ-M-K-DIAGRAMMEN ALS BEMESSUNGSHILFS-MITTEL

Das Bild 3a zeigt die übliche Darstellungsform eines Spannungsfalles. Die  $M_a$ -Gerade

$$\bar{M}^{II} = \bar{N} \cdot c_t \cdot \bar{w} + \bar{M}^I \quad +)$$

schneidet die  $M_r$ -Linie in jenem Grenzpunkt U, wo mindestens eine Grenzdehnung im maßgebenden Querschnitt erreicht wird. Das Bild 3b stellt einen Instabilitätsfall dar. Die  $M_a$ -Gerade tangiert die  $M_r$ -Linie im Punkt T, der auf der  $M_r$ -Linie zwischen dem Koordinatenursprung und dem Grenzdehnungspunkt U liegt.

Bei Annahme einer bestimmten Krümmungsverteilung entlang der Stabachse ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Stabauslenkung  $\bar{w}$  und der Krümmung  $\bar{K}$  im maßgebenden Querschnitt:

$$\bar{w} = c_1 \cdot \bar{K} + c_2$$

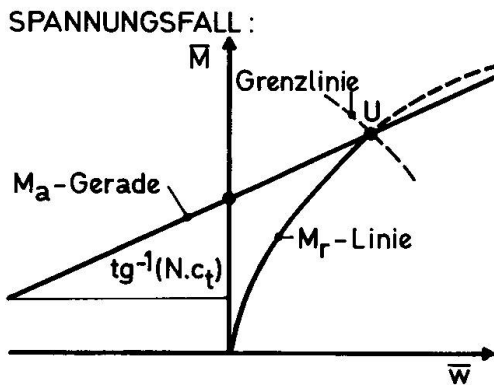


Bild 3a

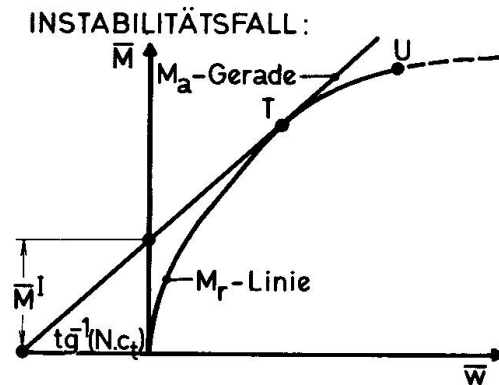


Bild 3b

Die Gleichung der  $M_a$ -Geraden ergibt sich dadurch, wie folgt:

$$\bar{M}^{II} = \bar{N} \cdot c_t \cdot c_1 \cdot \bar{K} + \bar{N} \cdot c_t \cdot c_2 + \bar{M}^I = \bar{c}_1 \cdot \bar{K} + \bar{c}_2 \quad (1)$$

Daher lassen sich die Bilder 3 durch affine Verzerrung der Abszissenachse auf eine Betrachtung des M-K-Zusammenhanges umformen, wie das Bild 4 am einfachsten Beispiel einer sinusförmigen Krümmungsverteilung zeigt. Die  $M_a$ -Linie entspricht dadurch dem M-K-Diagramm.

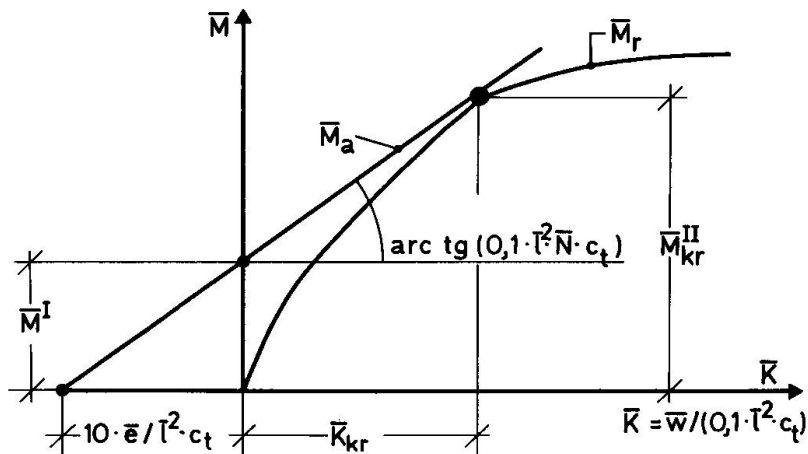


Bild 4

+ ) Der Beiwert  $c_t$  erfasst näherungsweise den Kriech- und Schwindeinfluss des Betons. Er wird im Abschnitt 5 erklärt.

Um die  $M_a$ -Gerade direkt in das Bild 2 eintragen zu können, müssen auch die Ordinaten mit dem Maßstabfaktor

$$f = \bar{\bar{M}}_u / \bar{M}_u$$

verzerrt werden. Darin bedeuten  $\bar{M}_u$  das unverzerrte Tragmoment, welches z.B. einem Interaktionsdiagramm entnommen wird, und  $\bar{\bar{M}}_u$  das Tragmoment im Maßstab des Bildes 2. Sowohl  $\bar{M}_u$  als auch  $\bar{\bar{M}}_u$  sind von der Normalkraft  $\bar{N}$  und dem Bewehrungsgrad  $\bar{\mu}$  abhängig.

Für die Bemessung einer Stahlbetonstütze sind somit ein Interaktionsdiagramm und ein Ersatz-M-K-Diagramm erforderlich (Bild 5).

#### 4. BEISPIELE

##### 4.1. Spannungsfall

Die übliche Aufgabenstellung lautet:

Gegeben sind für einen Rechteckquerschnitt:

die Normalkraft  $\bar{N} = 0,3$

das Biegemoment nach Theorie I. Ordnung  $\bar{M}^I = 0,25$

die Stabschlankheit  $\lambda = 60$

das Verhältnis Dauerlast zu Gesamtlast  $M_t/\text{ges}M = 0$

Gesucht ist der erforderliche Bewehrungsgrad  $\bar{\mu}$ .

$$\begin{aligned} \bar{\ell} &= \lambda / \sqrt{12} = 17,32 & c_t &= 1 & \bar{N} \cdot c_t \cdot (\bar{\ell} / \Pi)^2 &= 9,12 \\ \bar{M}^{II} &= \bar{M}^I + \bar{N} \cdot c_t \cdot \bar{w} = \bar{M}^I + \bar{N} \cdot c_t \cdot (\bar{\ell} / \Pi)^2 \cdot \bar{K} & & & &= 0,25 + 9,12 \cdot \bar{K} \end{aligned} \quad (2)$$

Aus dem Ersatz-M-K-Diagramm des Bildes 5 entnimmt man nun für einen mittleren Bewehrungsgrad ( $\bar{\mu} = 0,010$ ) die Krümmung ( $\bar{K} = 0,0045$ ). Mit Hilfe der Formel (2) wird eine erste Näherung für das Moment nach Theorie II. Ordnung berechnet:

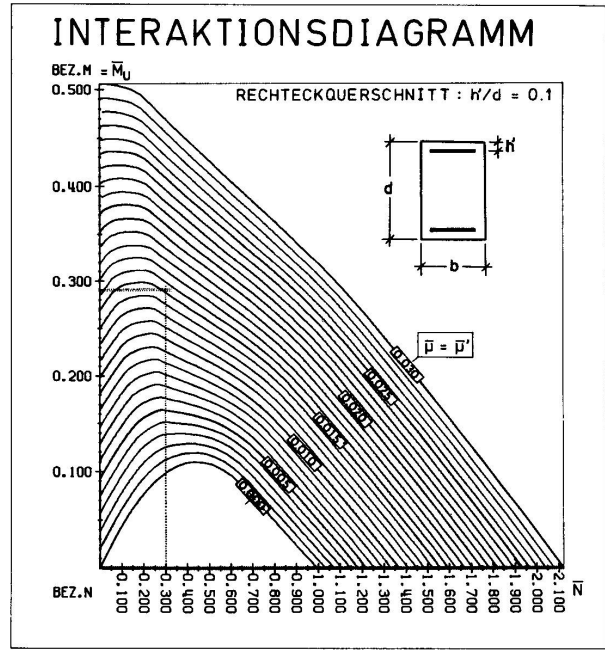
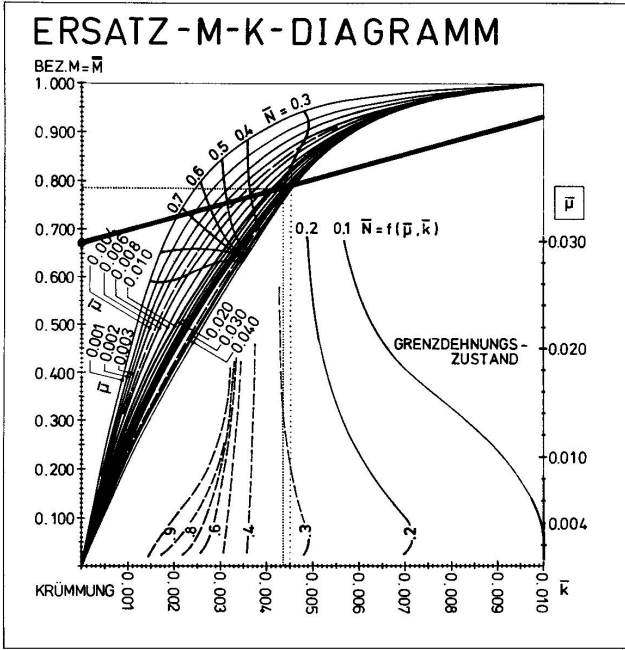
$$\bar{M}^{II} = 0,25 + 9,12 \cdot 0,0045 = 0,291$$

Für dieses Moment entnimmt man einem üblichen Bemessungsbehelf (Interaktionsdiagramm im Bild 5) den erforderlichen Bewehrungsgrad  $\bar{\mu} = 0,0152$ . Dem linken Bild kann nun ein verbesserter Krümmungswert  $\bar{K} = 0,00435$  entnommen werden. Das Biegemoment ändert sich dabei nach Formel (2) nur geringfügig ( $\bar{M}^{II} = 0,290$ ).  $\bar{M}^{II}$  entspricht dem Tragmoment  $\bar{\bar{M}}_u$ . Aus dem Interaktionsdiagramm im Bild 5 erhält man den gesuchten Bewehrungsgrad  $\bar{\mu} = 0,015$ . Bei Verwendung exakter M-K-Diagramme erhält man in diesem Fall dasselbe Ergebnis.

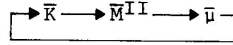
Um die Gerade der äußeren Beanspruchung in das linke Bild eintragen zu können, muß das Moment nach Theorie I. Ordnung  $\bar{M}^I$  in den Maßstab des Ersatz-M-K-Diagrammes verzerrt werden, was mit dem Maßstabfaktor  $f$  erfolgt.

$$\begin{aligned} f &= \bar{\bar{M}}_u^{II} / \bar{M}_u^{II} = 0,785 / 0,290 = 2,70 \\ \bar{M}^I &= f \cdot \bar{M}^I = 2,7 \cdot 0,25 = 0,67 \end{aligned}$$

Mit  $\bar{M}^I$  und  $\bar{M}^{II}$  ist die Gerade der äußeren Beanspruchung im Ersatz-M-K-Diagramm (Bild 5) bestimmt. Im vorliegenden Beispiel handelt es sich um einen Spannungsfall, da der Anstieg der  $M_a$ -Geraden geringer ist als der der  $M_r$ -Kurve im Schnittpunkt  $\bar{\bar{M}}_u^{II}$ .



$$\bar{M}^{II} = \bar{M}^I + \bar{N} \cdot c_t \cdot (\bar{\lambda} / \Pi)^2 \cdot \bar{K}$$



$$\bar{M}^I = f \cdot \bar{M}^I$$

Bild 5

4.2. Instabilitätsfall

Gegeben:  $\bar{M}^I = 0,042$  ;  $\bar{N} = 0,1$  ;  $\lambda = 180$  ;  $c_t = 1$   
 Gesucht:  $\bar{\mu}$

$\bar{e} = \bar{M}^I / \bar{N} = 0,42$  ;  $\bar{\lambda} = \lambda / 12 = 51,96$  ;  $\bar{N} \cdot (\bar{\lambda} / \pi)^2 = 27,36$

Der Abszissenabschnitt der  $M_a$ -Geraden (vgl. Bild 4):

$\bar{e} \cdot (\pi / \bar{\lambda})^2 \cdot c_t = 0,0015$   
 $\bar{M}^{II} = \bar{M}^I + \bar{N} \cdot (\bar{\lambda} / \pi)^2 \cdot \bar{K} = 0,042 + 27,36 \cdot \bar{K}$

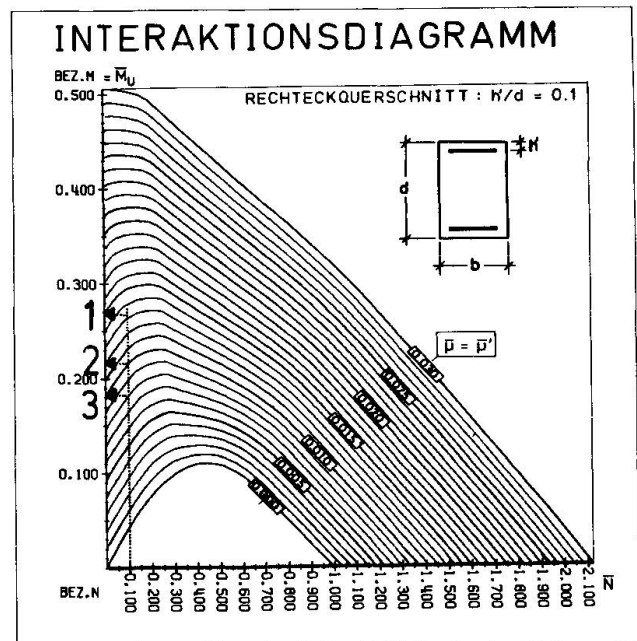
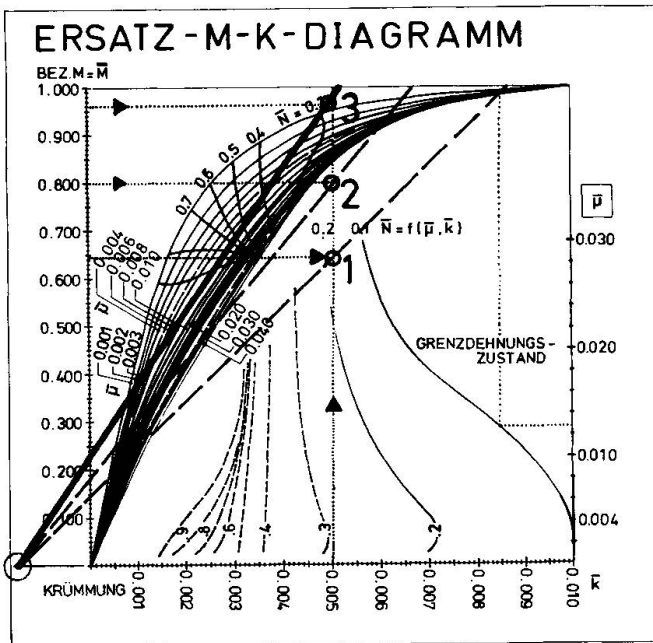
Die Berechnung als Spannungsfall würde einen Bewehrungsgrad von  $\bar{\mu} = 13,2 \%$  und die  $M_a$ -Gerade 1 im Bild 6 ergeben. Da die  $M_a$ -Gerade 1 steiler verläuft als die  $M_r$ -Linie im Grenzpunkt  $\bar{M}_U^I$ , hat man es jedoch mit einem Instabilitätsfall zu tun. Der Bewehrungsgrad kann abgemindert werden. Dabei vergrößert sich der Maßstabfaktor  $f$ , wodurch sich die  $M_a$ -Gerade um ihren Schnittpunkt mit der Abszissenachse dreht. Zur Bestimmung der Lage der  $M_a$ -Geraden wird z.B. der Punkt mit der Abszisse  $\bar{K} = 0,005$  herangezogen:

$\bar{M}_{0,005}^{II} = 0,042 + 27,36 \cdot 0,005 = 0,179$

Der Bewehrungsgrad wird solange variiert, bis die  $M_a$ -Gerade die entsprechende  $M_r$ -Linie tangiert.  $\bar{\mu} = 0,01$  liefert die Gerade 2 im Bild 6. Für  $\bar{\mu} = 0,008$  ergibt sich mit

$\bar{M}_U = 0,99$  ;  $\bar{M}_U = 0,184$  ;  $f = 5,38$  ;  $\bar{M}_{0,005} = f \cdot \bar{M}_{0,005}^{II} = 0,96$

die Gerade 3, die die  $M_r$ -Linie für  $\bar{\mu} = 0,008$  tangiert. Der gesuchte Bewehrungsgrad ergibt sich somit zu  $\bar{\mu} = 0,008$ .



$\rightarrow \bar{\mu} \rightarrow \bar{M}_U$  ,  $\bar{M}_U \rightarrow f = \bar{M}_U / \bar{M}_U$

Bild 6



## 5. BEZEICHNUNGEN

Der Querstrich über den Bezeichnungen bedeutet, daß es sich um eine bezogene (dimensionslose) Größe handelt. Der Kopfzeiger I bzw. II bedeutet Theorie I. bzw. II. Ordnung.

|               |  |   |                                 |
|---------------|--|---|---------------------------------|
| $M_a$         | aktives (äußeres) Biegemoment  | $\bar{M} = M / (\beta_c \cdot b \cdot h^2)$         |                                 |
| $M_r$         | reaktives (inneres) Biegemoment  |   |                                 |
| $N$           | Normalkraft  | $\bar{N} = N / (\beta_c \cdot b \cdot h)$           |                                 |
| $\beta_c$     | rechnungsmäßige Prismenfestigkeit des Betons   |   |                                 |
| $\beta_{300}$ | Bezugsgröße: rechnerische Prismenfestigkeit eines Betons, dessen mittlere 28 Tage Würfel Festigkeit 300 kp/cm <sup>2</sup> beträgt.<br>( $\beta_{300} = 225 \text{ kp/cm}^2$ ) |   |                                 |
| $b$           | Querschnittsbreite   |   |                                 |
| $h$           | Querschnittshöhe   |   |                                 |
| $\mu$         | Bewehrungsgrad   | $\bar{\mu} = \mu \cdot \frac{\beta_{300}}{\beta_c}$ |                                 |
| $K$           | Krümmung   |   | $\bar{K} = K \cdot h$           |
| $\lambda$     | Stabschlankheit  | $\lambda = \lambda \cdot \sqrt{12} / h$             |                                 |
| $l$           | Stablänge  |   | $\bar{l} = l / h$               |
| $w$           | Stabausbiegungen   | $\bar{w} = w / h$                                   |                                 |
| $e$           | Lastexzentrizität  |   | $\bar{e} = \bar{M}^I / \bar{N}$ |
| $c_t$         | Beiwert zur Erfassung von Kriecheinflüssen [1]   | $c_t = 1 + \frac{M_t}{\text{ges}M}$                 | $1 \leq c_t \leq 2$             |
| $M_t$         | Biegemoment infolge der Dauerlast  |   |                                 |
| $\text{ges}M$ | Biegemoment infolge der Gesamtlast   |   |                                 |

## 6. LITERATUR

- [1] Kordina K., Quast U.  
Bemessung von schlanken Bauteilen - Knicksicherheitsnachweis  
Betonkalender 1974 (1. Teil)

## ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Näherungsverfahren vorgeschlagen, das auf einfache und anschauliche Art die Bemessung von Stahlbetonstützen ermöglicht. Neben einem üblichen Interaktionsdiagramm verwendet das Verfahren ein Ersatz-Momenten-Krümmungs-Diagramm.

## SUMMARY

A method of approximation is proposed allowing in a simple and clear way the design of reinforced concrete columns. Besides from a usual interaction diagram the method is based on a substitute moment/curvature diagram.

## RESUME

On propose une méthode d'approximation permettant de calculer d'une façon simple et claire le dimensionnement de colonnes en béton armé. La méthode emploie le diagramme d'interaction conventionnel et un diagramme de remplacement moment/courbure.