

# Recherche sur le flambement des barres en aluminium

Autor(en): **Djalaly, H. / Sfintesco, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen**

Band (Jahr): **23 (1975)**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19814>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

RECHERCHE SUR LE FLAMBEMENT DES BARRES EN ALUMINIUM

H. Djalaly  
Ingénieur au Service Recherches  
C.T.I.C.M., Puteaux  
France

D. Sfintesco  
Directeur des Recherches  
C.T.I.C.M., Puteaux  
France

ABSTRACT

With reference to a series of tests carried out by P. Arnault and D. Sfintesco on pin-ended axially compressed members in various aluminium alloys, column curves for this type of members have been established by the authors according to a probabilistic method of approach. This method consists in determining statistically the collapse loads with a given probability.

The random parameters concerning the various initial imperfections have a significant influence on the actual behavior of the member in compression. The stochastic analysis of these parameters and of their combined effects require long calculations and extensive use of computer programs, whilst the statistical analysis of test results is relatively simple and easy.

The statistical approach leads to a clear and consistent degree of safety.

Non-dimensional column curves have been thus established for the probable collapse limit, with a constant probability of 2.5 %.

In addition, the probable dispersion is presented as a function of the slenderness ratio, thus allowing to define a variable safety factor in view of obtaining a constant probability.

## 1. ORIENTATION FONDAMENTALE DE LA RECHERCHE

Cette recherche, dont le but était d'établir une courbe de base du flambement en compression simple, a été réalisée afin de déterminer dans quelles conditions les méthodes de calcul des Règles CM 66 relatives aux constructions en acier pouvaient être appliquées à celles en alliages d'aluminium.

Ce programme d'essais, limité dans son ampleur, n'avait pour objectif que de situer la question. L'exploitation statistique des résultats a permis d'évaluer les paramètres des "courbes Dutheil" de flambement pour les barres en alliages d'aluminium.

La présente étude vise à exposer brièvement l'interprétation des résultats expérimentaux par les moyens statistiques et à présenter les courbes qui en résultent. Nous ne nous attacherons donc pas à décrire les essais et les appareillages.

La méthode probabiliste, employée dans le cadre de cette recherche, consiste à déterminer statistiquement la charge limite d'affaissement pour une probabilité intégrale donnée moyennant un nombre d'essais jugé satisfaisant, effectués sur des barres industrielles qui ne sont ni géométriquement, ni matériellement parfaites. On sait, en effet, que les imperfections initiales (défauts de rectitude et de centrage, tolérances dimensionnelles de la section, contraintes rémanentes, etc...) de nature aléatoire changent sensiblement le comportement des barres prévu par la théorie de l'instabilité élastique ou de l'instabilité élasto-plastique.

Les facteurs aléatoires des imperfections initiales intervenant dans le comportement de la barre comprimée sont à l'origine de divergences importantes. L'étude stochastique des combinaisons de tous ces facteurs aléatoires permet de déterminer théoriquement l'intensité des divergences entre le comportement réel de la barre industrielle et celui d'une barre idéalement parfaite.

Bien entendu, l'étude stochastique du comportement de la barre, compte tenu de ces variables aléatoires, serait non seulement longue et fastidieuse mais aussi fort complexe. C'est pourquoi, ce type de problème requiert, de préférence, une étude expérimentale.

L'étude statistique des résultats d'essais permet aussi de clarifier le problème de la sécurité et d'en donner des bases cohérentes.

Lorsqu'il s'agit de flambement simple, pour un élanement donné et un certain nombre d'essais effectués pour cet élanement, on peut définir des contraintes probables d'affaissement et des contraintes conventionnelles d'affaissement correspondant à une probabilité intégrale de 2,5 %.

Comme on le sait, la détermination de cette probabilité ne peut se faire que si l'on connaît la loi de répartition de la population totale, ici la répartition des contraintes d'affaissement auxquelles on se réfère.

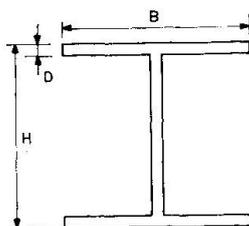
Une éprouvette de flambement en aluminium est caractérisée, avant même sa mise en charge, par un certain nombre de paramètres qui font que, dès que cette éprouvette est sollicitée, la charge d'affaissement est influencée par un nombre de variables aléatoires. Pour que dans ces conditions nous puissions calculer la charge d'affaissement probable, nous devons envisager une loi de répartition telle que celle de Laplace-Gauss, mais encore faut-il s'assurer de la justesse de cette hypothèse.

Pour y parvenir, deux méthodes dites tests d'hypothèses ont été appliquées aux résultats d'essais, ce sont : la méthode de la droite de Henry et la méthode par les coefficients  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de Karl Pearson, qui montrent respectivement si la distribution est symétrique<sup>1</sup> et si elle correspond à une loi normale ou non.

## 2. CLASSES D'ALLIAGES DES BARRES

Les essais ont porté sur des barres industrielles fabriquées dans les conditions normales et plus précisément sur le profilé unique H de 63 x 63 x 4 mm défini par la norme A 65-162, dont les tolérances dimensionnelles sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

	H mm	B mm	D mm	Section mm <sup>2</sup>
Dimensions	63	63	4	737
Tolérances	± 0,95	± 0,95	± 0,24	—



Le tableau I donne les compositions chimiques et les caractéristiques mécaniques des alliages d'aluminium utilisés dans cette recherche.

Les lots livrés provenaient d'une même fusion pour l'A-G5, l'A-SG et l'AS-GM et de trois fusions pour l'AU4G.

TABLEAU I. — Valeurs nominales des compositions chimiques et des caractéristiques mécaniques

	Fe	Si	Cu	Mn	Zn	Mg	Cr	Ti	masse spéci- fique g/cm <sup>3</sup>	limite élastique à 0,2 %		limite de rupture		État
										ga- rantie	moyen- ne	ga- rantie	moyen- ne	
A-G5	min.	—	—	0,2	—	4,5	—	—	2,63	12	15	27	32	Brut de fabrication
	max.	0,5	0,4	0,10	1,0	0,2	5,5	0,4	0,2					
A-U4G	min.	—	0,3	3,5	0,3	—	0,4	—	2,80	25	28	39	42	Trempé mûri
	max.	0,7	0,8	4,7	0,8	0,25	1,0	0,1	0,2					
A-Z5G	—	—	—	—	4,8	1,2	0,2	—	2,80	—	30	—	37	Trempé revenu
A-SG	min.	—	0,8	—	—	—	0,7	—	2,70	—	26	—	32	Trempé revenu dur
	max.	0,5	1,5	0,10	0,2	0,25	1,3	—	0,2					
AS-GM	min.	—	0,6	—	0,1	—	0,6	—	—	—	26	—	32	
	max.	0,5	1,6	0,10	1,0	0,25	1,4	0,3	0,2					

### 3. EXPLOITATION STATISTIQUE DES RESULTATS

La loi de Laplace-Gauss constitue une famille de lois de probabilité dont la fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - m}{s} \right)^2 \right] \quad (1)$$

et dont la fonction de distribution est :

$$F(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i - m}{s} \right)^2} dx \quad (2)$$

où  $m$ , valeur moyenne ou moyenne arithmétique, est égal à  $\frac{\sum n_i x_i}{N}$  et  $s$ , qui est l'écart-type, est égal à :

$$s = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - m)^2}{N - 1}}$$

Avec un changement de variable  $t = \frac{x_i - m}{s}$ , on peut écrire :

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-t^2/2} dt \quad (3)$$

La loi normale est une distribution symétrique. Pour appliquer la loi de distribution gaussienne, il faut que la répartition expérimentale ou le raccordement opéré soit légitime.

#### 4. METHODE DE LA DROITE DE HENRY

La méthode de la droite de Henry est une méthode graphique ; elle indique à simple vue si la répartition expérimentale est une distribution légitime de Gauss, et montre aussi si certaines données ne s'éloignent pas trop de la droite passant par les autres points d'essais, permettant ainsi d'écarter des données aberrantes qui seraient conservées dans un calcul trop systématique.

Considérant la formule (2), on peut à toute valeur  $x_i$  de  $X$ , faisant partie de la série de mesures, faire correspondre la valeur de la fréquence expérimentale égale au rapport du nombre de mesures inférieures ou égales à  $x_i$  au nombre total de mesures. Puis, grâce à une table relative à la relation (3) on trouve la valeur  $t$ , en portant les valeurs  $x$  et  $t$  sur des axes de coordonnées cartésiennes, on constate que tous ces points d'une distribution normale sont en ligne droite, que cette ligne droite coupe l'axe des abscisses au point  $m$  et que la pente de cette droite est égale à  $\frac{1}{s}$ . Si la répartition de la série de mesures est une distribution légitime de Gauss, les points de mesures se trouvent au voisinage ou sur la droite de Henry. Le graphique fait ainsi connaître les deux paramètres  $m$  et  $s$  respectivement moyenne et écart-type. La pratique courante est de graduer l'axe des ordonnées non pas suivant les valeurs de  $t$ , mais directement en fréquence cumulée. Cette graduation n'est évidemment pas linéaire, aussi pour faciliter encore la mise en oeuvre de la méthode, Dumas et Maheu préconisent-ils, de faire correspondre à chaque mesure de rang  $n$ , la fréquence cumulée  $\frac{n-0,5}{N}$ , c'est-à-dire :

$$F_n(t) \simeq \frac{n-0,5}{N} \quad (4)$$

Il existe des tables donnant la valeur de  $t$  en fonction de  $N$  et  $n$ . On peut, dans ces conditions, travailler directement sur papier millimétré au lieu de papier logarithmique. Sur un graphique représentant une loi normale, l'aire comprise entre les valeurs  $m - s$  et  $m + s$ , c'est-à-dire  $t = 1$ , est égale à 68,3 % de l'aire totale située sous la courbe en cloche.

##### 4.1. Méthode des moments

Afin de mieux vérifier si la répartition des mesures est symétrique et si elle est pointue par rapport à la distribution normale, on exécute les calculs suivants :

1. Calcul de la valeur moyenne :

$$m = \frac{\sum n_i x_i}{N}$$

2. Calcul des écarts :

$$\delta_i = x_i - m$$

3. Calcul des valeurs :

$$S_2 = \sum_{i=1}^N \delta_i^2, \quad S_3 = \sum_{i=1}^N \delta_i^3, \quad S_4 = \sum_{i=1}^N \delta_i^4$$

4.  $K_2 = \frac{S_2}{N-1}$  d'où l'écart-type  $S = \sqrt{K_2}$

$$K_3 = \frac{N}{(N-1)(N-2)} S_3$$

$$K_4 = \frac{N}{(N-1)(N-2)(N-3)} \left[ (N+1)S_4 - \frac{3(N-1)}{N} S_2^2 \right]$$

$$5. \quad G = K_3/K_2^{3/2}, \quad G_2 = K_4/K_2^2$$

$$6. \quad s'_1 = \sqrt{\text{var.}(G_1)} = \sqrt{6 N(N-1)/(N-2)(N+1)(N+3)}$$

$$s'_2 = \sqrt{\text{var.}(G_2)} = \sqrt{\frac{24 N(N-1)^2}{(N-2)(N-3)(N+3)(N+5)}}$$

7. Les rapports  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont tels que :

$$\gamma_1 = \frac{G_1}{s'_1}, \quad \gamma_2 = \frac{G_2}{s'_2}$$

pour une distribution parfaitement normale, on a  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ .

Pour toute distribution symétrique, on aurait encore  $\gamma_1 = 0$ .  $\gamma_1$  indique combien et comment, par sa valeur et son signe, la distribution n'est pas symétrique.  $\gamma_2$  indique si la distribution est plus ou moins pointue par rapport à la distribution normale.

Lorsque  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont des valeurs assez grandes, on ne peut pas accepter l'hypothèse de la normalité de la distribution de la série de mesures. Ainsi pour  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  supérieurs à 3, l'hypothèse doit être réfutée.

## 5. INTERVALLE DE CONFIANCE POUR LA MOYENNE D'UNE POPULATION NORMALE DE REFERENCE

### 5.1. Estimation de la moyenne quand la variance $\sigma^2$ n'est pas connue

Comme la variance réelle n'est pas connue, nous devons déterminer l'intervalle de Confiance de la moyenne pour une probabilité  $\alpha$  donnée par le procédé suivant.

Nous savons que la distribution des moyennes d'échantillons de taille  $N$ , prélevés non exhaustivement dans une population normale ( $m, \sigma$ ) est elle-même normale et telle que :

$$E(m') = m \text{ (moyenne de la population)}$$

Pour tourner la difficulté créée par cette estimation, les statisticiens se sont efforcés de trouver une valeur caractéristique de l'échantillon dont la loi de distribution (contrairement à celle de  $m'$ ), ne fasse pas intervenir  $\sigma^2$ . Cela a conduit Student

à préconiser la variable  $z = \frac{m' - m}{\sigma}$ . Par la suite, R.A. Fischer a préconisé la variable :

$$t = \frac{m' - m}{\frac{\sigma'}{\sqrt{N-1}}} = \frac{(m' - m)\sqrt{N}}{\sigma_1} \quad (5)$$

Cette variable a pour loi de probabilité la loi de Student-Fischer représentée par l'équation ci-après :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N-1} B\left(\frac{N-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}} \quad (6)$$

$B(a, b)$  étant la fonction bêta qui a pour expression :

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 u^{(a-1)}(1-u)^{(b-1)} du$$

avec  $a > 0$  et  $b > 0$ .

Il s'agit d'une loi symétrique, comme la loi normale mais un peu plus aplatie. Le  $t_\alpha$  qui en résulte, pour un seuil de probabilité  $(1 - \alpha)$  donné, est donc légèrement supérieur à celui qui fournit la loi normale.

Par référence à la loi de Student-Fischer, l'intervalle de probabilité  $(1 - \alpha)$

de  $\frac{m' - m}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}}$  s'écrit en effet :

$$-t_\alpha \leq \frac{m' - m}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}} \leq t_\alpha \quad (7)$$

ou encore :

$$m - \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} t_\alpha \leq m' \leq m + \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} t_\alpha, \quad \sigma_1 = s \quad (8)$$

où  $t_\alpha$  est déterminé pour la probabilité de  $\frac{\alpha}{2}$  ou  $1 - \frac{\alpha}{2}$  dans les tables correspondantes avec  $\nu = N - 1$  degrés de liberté.

## 6. LIMITE DE CONFIANCE DES VARIANCES

Comme la valeur de la moyenne réelle est inconnue, l'intervalle de confiance des variances doit être défini pour ce cas.

Etant donné une série de  $N$  mesures extraite d'une population normale  $N(m, \sigma)$ , la somme quadratique est égale à :

$$X^2 = \sum_i \frac{(x_i - m')^2}{\sigma^2} = \frac{N\sigma'^2}{\sigma^2} \quad (9)$$

et suit une loi de  $X^2$  à  $\nu = N - 1$  degrés de liberté, deux quantités  $X^2\alpha_1$  et  $X^2\alpha_2$  telles que :

- probabilité ( $X^2$  expérimental  $> X^2\alpha_1$ ) =  $\alpha_1$

- probabilité ( $X^2$  expérimental  $> X^2\alpha_2$ ) =  $\alpha_2$

$\alpha_1$  et  $\alpha_2$  étant les seuils de probabilité. On a alors :

$$X^2\alpha_1 \leq \frac{N\sigma'^2}{\sigma^2} \leq X^2\alpha_2 \quad (10)$$

on passe à l'intervalle de confiance :

$$\frac{(N-1) \sigma_1^2}{X^2_{\alpha_2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(N-1) \sigma_1^2}{X^2_{\alpha_1}}$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - m)^2}{X^2_{\alpha_1}}} < \sigma < \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - m)^2}{X^2_{\alpha_2}}} \quad (11)$$

Nous avons effectué les calculs en prenant  $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} = 0,025$  et  $\alpha_2 = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$ , c'est-à-dire qu'il y a 95 % de chances pour que les variances vraies se trouvent dans les intervalles de confiance. Ces valeurs sont rassemblées dans les tableaux 2, 3, 4, 5 et 6. Dans chacun de ces tableaux, on trouve la moyenne, les limites de confiance de la moyenne et de l'écart-type, les coefficients de Pearson, la valeur des variables Student-Fischer, les contraintes limites d'affaîssement compte tenu de 2,5 % de probabilité intégrale et finalement la plus petite et la plus grande valeur observées dans les séries de mesures. Un examen rapide de ces tableaux nous montre que la plupart des séries de mesures correspondant aux différents élancements ont une distribution normale légitime, sauf pour les élancements 120 et 150 de tous les alliages utilisés.

Il est bon de remarquer que les répartitions de la contrainte d'affaîssement des barres en A-SG aux élancements 85, 100, 120, 150 ne sont pas du tout des répartitions normales légitimes.

TABLEAU II. — Résultats des calculs statistiques pour des barres à profil H en A - U 4 G

Élancements	$\lambda$	10	50	70	85	100	120	150
Nombre d'essais	$N$	19	17	17	16	12	5	9
Valeurs moyennes	$\bar{x} = m$	31,884	22,980	14,658	9,951	7,587	5,244	3,447
Limites de confiance de la moyenne	$m'$	30,880	22,183	14,327	9,628	7,478	5,122	3,171
	$m''$	32,888	23,777	14,989	10,274	7,696	5,366	3,723
Écart-types	$S$	2,084	1,550	0,644	0,607	0,171	0,098	0,359
Limite de confiance des écart-types	$S'$	1,577	1,155	0,491	0,502	0,122	0,058	0,242
	$S''$	3,082	2,358	1,030	1,203	0,290	0,282	0,687
Coefficients de Pearson	$\gamma_1$	- 0,076	- 1,113	1,046	- 2,279	0,509	- 0,560	3,481
	$\gamma_2$	- 0,169	- 0,036	0,583	0,627	1,050	51,024	4,901
Variable de Stu. Fischer	$t_\alpha$	2,337	2,400	2,400	2,437	2,655	4,275	4,275
$m - t_\alpha \cdot S$		27,014	19,260	13,112	8,471	7,133	4,825	2,382
$A_{1-\alpha}$		1,390	1,421	1,421	1,437	1,551	2,372	1,711
$S'_{in} = A_{1-\alpha} \cdot S$		2,897	2,202	0,915	0,872	0,265	0,232	0,614
La plus petite valeur expérimentale	$x_e$	27,4	19,78	13,84	8,50	7,33	5,13	3,18
La plus grande valeur expérimentale	$x_u$	35,9	25,49	15,95	10,50	7,89	5,35	4,36
Dispersion en %	$\delta$	19,3	20,5	14,0	24,1	7,6	10,7	20

TABLEAU III. — Résultats des calculs statistiques pour des barres à profil H en A - Z 5 G

Élancements	$\lambda$	10	50	70	85	100	120	150
Nombre d'essais	$N$	24	10	10	10	9	5	5
Valeurs moyennes	$\bar{x} = m$	32,771	24,204	14,051	9,908	7,233	4,860	3,134
Limites de confiance de la moyenne	$m'$	32,108	23,384	13,582	9,702	7,082	4,750	3,040
	$m''$	33,434	25,025	14,519	10,114	7,384	4,970	3,228
Écart-types	$S$	1,571	1,146	0,655	0,288	0,196	0,089	0,076
Limite de confiance des écart-types	$S'$	1,220	0,789	0,450	0,198	0,132	0,053	0,0450
	$S''$	2,203	2,092	1,196	0,525	0,375	0,255	0,218
Coefficients de Pearson	$\gamma_1$	- 1,607	0,163	0,941	0,865	- 0,645	0,114	0,884
	$\gamma_2$	1,037	- 0,355	0,831	- 0,067	0,237	61,65	31,35
Variable de Stu. Fischer	$t_\alpha$	2,225	2,839	2,839	2,839	2,967	4,275	4,275
$m - t_\alpha \cdot S$		29,275	20,950	12,191	9,090	6,651	4,479	2,809
$A_{1-\alpha}$		1,338	1,645	1,645	1,645	1,711	2,372	2,372
$S'_{in} = A_{1-\alpha} \cdot S$		2,102	1,885	1,077	0,474	0,335	0,211	0,180
La plus petite valeur expérimentale	$x_e$	28,6	22,4	13,05	9,5	6,95	4,76	3,07
La plus grande valeur expérimentale	$x_u$	35,4	26,00	15,40	10,40	7,53	4,98	3,24
Dispersion en %	$\delta$	13,4	17,2	17,0	10,6	10,3	10,5	13,8

TABLEAU IV. — Résultats des calculs statistiques pour des barres à profil H en A S G

Élancements	$\lambda$	10	50	70	85	100	120	150
Nombre d'essais	$N$	26	10	10	10	10	5	5
Valeurs moyennes	$\bar{x} = m$	29,381	21,775	14,677	9,547	6,687	4,760	2,986
Limites de confiance de la moyenne	$m'$	29,103	20,840	14,364	9,423	6,586	4,586	2,959
	$m''$	29,659	22,710	14,990	9,671	6,788	4,934	3,013
Écart-types	$S$	0,688	1,307	0,438	0,173	0,141	0,140	0,022
Limite de confiance des écart-types	$S'$	0,539	0,899	0,302	0,119	0,036	0,034	0,010
	$S''$	0,95	2,386	0,799	0,316	0,257	0,402	0,062
Coefficients de Pearson	$\gamma_1$	- 0,982	- 0,235	0,366	- 1,575	1,374	2,037	—
	$\gamma_2$	- 0,465	- 0,695	0,408	6,441	4,021	2,684	—
Variable de Stu. Fischer	$t_\alpha$	2,193	2,839	2,839	2,839	2,839	4,275	4,275
$m - t_\alpha \cdot S$		27,872	18,064	13,433	9,056	6,287	4,161	2,892
$A_{1-\alpha}$		1,308	1,645	1,645	1,645	1,645	2,372	2,372
$S'_{in} = A_{1-\alpha} \cdot S$		0,900	2,15	0,720	0,284	0,232	0,332	0,052
La plus petite valeur expérimentale	$x_e$	28,00	19,65	14,00	9,15	6,50	4,64	2,95
La plus grande valeur expérimentale	$x_u$	30,60	23,70	15,50	9,82	7,00	5,00	3,02
Dispersion en %	$\delta$	6,5	21,9	10,9	7,8	7,7	16,8	—

TABLEAU V. — Résultats des calculs statistiques pour des barres à profil H en A - S G M

Élancements	$\lambda$	10	50	70	85			
Nombre d'essais	$N$	9	10	10	9			
Valeurs moyennes	$\bar{x} = m$	32,111	24,586	15,186	10,037			
Limites de confiance de la moyenne	$m'$	31,879	23,363	14,347	9,683			
	$m''$	32,879	25,809	16,025	10,390			
Écart-types	$S$	0,302	1,710	1,173	0,460			
Limite de confiance des écart-types	$S'$	0,204	1,176	0,807	0,311			
	$S''$	0,578	3,122	2,141	0,881			
Coefficients de Pearson	$\gamma_1$	- 0,043	0,815	0,951	1,707			
	$\gamma_2$	- 0,089	- 0,904	0,323	1,727			
Variable de Stu. Fischer	$t_\alpha$	2,967	2,839	2,839	2,967			
$m - t_\alpha \cdot S$		31,215	19,731	11,856	8,672			
$A_{1-\alpha}$		0,517	2,813	1,929	0,787			
$S' t_n = A_{1-\alpha} \cdot S$		0,517	2,813	1,929	0,787			
La plus petite valeur expérimentale	$x_e$	31,6	22,4	13,7	9,55			
La plus grande valeur expérimentale	$x_u$	32,6	27,1	17,54	10,97			
Dispersion en %	$\delta$	1,8	12,7	14	8,8			

TABLEAU VI. — Résultats des calculs statistiques pour des barres en A G 5

Élancements	$\lambda$	10	50	70	85	100	120	150
Nombre d'essais	$N$	27	8	8	8	8	5	5
Valeurs moyennes	$\bar{x} = m$	12,00	9,580	7,810	7,040	6,229	4,850	3,070
Limites de confiance de la moyenne	$m'$	11,871	9,396	7,504	6,747	6,038	4,803	2,983
	$m''$	12,129	9,764	8,116	7,333	6,420	4,897	3,156
Écart-types	$S$	0,326	0,220	0,366	0,351	0,229	0,038	0,089
Limites de confiance des écart-types	$S'$	0,257	0,145	0,242	0,231	0,151	0,022	0,053
	$S''$	0,447	0,448	0,745	0,714	0,466	0,108	0,255
Coefficients de Pearson	$\gamma_1$	- 1,239	0,189	- 1,318	- 0,211	- 0,183	—	- 0,947
	$\gamma_2$	- 0,704	0,234	1,013	- 0,424	0,388	—	30,35
Variable de Stu. Fischer	$t_\alpha$	2,178	3,136	3,136	3,136	3,136	4,275	4,275
$m - t_\alpha \cdot S$		11,29	8,89	6,66	5,94	5,51	4,69	2,69
$A_{1-\alpha}$		1,300	1,797	1,797	1,797	1,797	2,373	2,372
$S' = A_{1-\alpha} \cdot S$		0,424	0,393	0,658	0,631	0,411	0,091	0,211
La plus petite valeur expérimentale	$x_e$	11,3	9,29	7,09	6,51	5,9	4,81	2,94
La plus grande valeur expérimentale	$x_u$	12,5	9,90	8,27	7,54	6,56	4,90	3,16
Dispersion en %	$\delta$	7,5	10,2	19,1	20,3	15	12	12

TABLEAU VII. — Comparaison sommaire des moyennes de contraintes en compression et en traction

		A-Z5G	A-U4G	A-SG	A-G5
Compression	$N_A$	48	44	51	23
	$S_A$	1,739	1,687	0,665	0,906
	$m_A$	32,642	36,176	29,374	15,987
Traction	$N_B$	39	38	41	27
	$S_B$	1,743	1,187	0,944	0,326
	$m_B$	31,47	32,384	28,956	12,000
$S_p$		1,741	1,477	0,801	0,659
Valeur appr. de $v_f$		83	78	71	27
$t'_{0,975}$		1,989	1,991	1,996	2,052
$m_A - m_B$		1,171	3,792	0,418	3,987
$u^*$		0,439	0,635	0,348	0,408

\*  $u = t_1 - \alpha Sp \sqrt{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_B}}$  ou  $u = t'_1 - \alpha \sqrt{\frac{S_A^2}{N_A} + \frac{S_B^2}{N_B}}$  Pour tous les alliages  $m_A - m_B > u$ .

TABLEAU VIII. — Résultats des calculs statistiques à l'éclatement nul sur l'A - G 5

Contraintes limites de	Compression			Traction		
	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$
Nombre d'essais $N$	27	27	28	23	23	23
Valeur minimale $x_u$	7,30	11,30	18,50	12,00	14,50	30,90
Valeur maximale $x_e$	8,80	12,50	21,10	16,00	17,90	33,90
Valeur moyenne $m$	7,963	12,00	19,964	13,930	15,987	31,783
Écart-type $S$	0,373	0,326	0,612	0,866	0,906	0,718
$\gamma_1$	0,103	- 1,239	- 0,314	0,397	2,142	3,598
$\gamma_2$	0,344	- 0,704	0,029	1,110	1,756	3,613
$t_\alpha$	2,612	2,612	2,595	2,697	2,697	2,697
$m - t_\alpha S$	6,990	11,149	18,376	11,000	13,543	29,847

TABLEAU IX. — Résultats des calculs statistiques à l'éclatement nul sur l'A - S G

		Compression			Traction		
Contraintes limites de		$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$
Nombre d'essais	$N$	51	51	51	42	41	40
Valeur minimale	$x_u$	23,50	28,0	28,4	26,5	27,3	30,9
Valeur maximale	$x_e$	27,4	30,6	30,8	30,5	32,9	45,8
Valeur moyenne	$m$	25,47	29,37	29,68	28,10	28,96	32,26
Écart-type	$S$	0,924	0,665	0,623	0,878	0,944	2,293
	$\gamma_1$	- 1,217	- 1,401	- 0,912	1,575	4,312	14,654
	$\gamma_2$	0,292	- 0,810	- 0,924	0,910	9,145	45,334
	$t_\alpha$	2,379	2,379	2,379	2,438	2,445	—
	$m - t_\alpha S$	23,27	27,79	28,20	25,95	26,65	—

TABLEAU X. — 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> livraison (A - U 4 G)

		Compression			Traction		
Contraintes limites de		$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$
Nombre d'essais	$N$	34	34	35	28	28	28
Valeur minimale	$x_u$	22,0	27,0	35,3	30,1	31,7	42,5
Valeur maximale	$x_e$	20,7	35,9	38,9	38,0	39,6	53,0
Valeur moyenne	$m$	26,74	33,02	37,15	35,64	37,17	50,61
Écart-type	$S$	2,142	1,745	0,992	2,249	2,393	2,572
	$\gamma_1$	- 1,496	- 3,902*	- 0,932	- 2,339	- 1,853	- 4,243*
	$\gamma_2$	- 0,268	4,664*	- 0,831	0,255	0,259	3,592*
	$t_\alpha$	2,513	2,513	2,501	2,595	2,595	2,595
	$m - t_\alpha S$	21,36	28,64	34,66	29,80	30,96	43,94*

TABLEAU XI. — 3<sup>e</sup> livraison (A - U 4 G)

		Compression			Traction		
Contraintes limites de		$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$
Nombre d'essais	$N$	10	10	10	10	10	10
Valeur minimale	$x_u$	15,0	27,4	36,1	27,5	30,3	43,5
Valeur maximale	$x_e$	23,7	31,2	38,1	32,9	35,3	47,0
Valeur moyenne	$m$	19,08	30,22	36,99	29,68	33,39	45,43
Écart-type	$S$	2,738	1,094	0,671	1,674	1,645	1,091
	$\gamma_1$	- 0,036	- 3,107*	0,398	1,606	- 1,247	- 0,927
	$\gamma_2$	- 0,593	- 4,206*	- 0,821	0,530	- 0,045	0,054
	$t_\alpha$	3,532	3,532	3,532	3,532	3,532	3,532
	$m - t_\alpha S$	9,67	26,36*	34,62	23,77	27,58	41,58

TABLEAU XII. — Résultats des calculs statistiques à l'éclatement nul sur l'A - Z5G

Contraintes limites de	Compression			Traction		
	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$	$\sigma_{0,02}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_{rup.}$
Nombre d'essais $N$	48	48	48	39	39	39
Valeur minimale $x_u$	25,00	26,6	29,2	22,7	25,8	32,7
Valeur maximale $x_e$	32,8	35,4	35,8	31,1	34,2	40,1
Valeur moyenne $m$	28,746	32,642	33,548	27,931	31,471	36,302
Écart-type $S$	1,628	1,739	1,419	1,973	1,743	1,991
$\gamma_1$	0,123	- 3,740	- 3,154	- 2,590	- 4,501	- 2,642
$\gamma_2$	0,502	3,799	2,202	1,144	5,279	2,937
$t_\alpha$	2,385	2,385	2,385	2,472	2,472	2,472
$m - t_\alpha S$	24,863	28,495*	30,164*	23,05	27,16*	31,38

(\*) La distribution de la série de mesures n'est pas symétrique.

## 7. INTERPRETATION DES RESULTATS PAR LA METHODE DUTHEIL

Si l'on soumet une barre prismatique pratiquement droite à un effort de compression centré constamment croissant, appliqué à ses extrémités articulées, on constate qu'elle se courbe dès le début du chargement (à condition d'utiliser des appareils de mesure suffisamment sensibles). La relation empirique de la flèche au milieu de la barre soumise à l'effort de compression simple, aussi bien centré que possible, est définie d'après Dutheil par :

$$f = a \frac{\sigma_k}{\sigma_k - (1+b)\sigma} (1+b)\sigma \frac{I}{vN_k} = \frac{a(1+b)\sigma}{\sigma_k - (1+b)\sigma} \frac{I}{Av} \quad (12)$$

où :

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad N_k = A\sigma_k$$

$a$  et  $b$  étant les paramètres empiriques (déterminés à partir des résultats statistiques de la charge d'affaissement probable).

Cette flèche provoque un moment fléchissant qui a pour valeur :

$$M = Nf = A\sigma f = \frac{a(1+b)\sigma^2}{\sigma_k - (1+b)\sigma} \frac{I}{v} \quad (13)$$

La contrainte maximale a donc pour expression :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{Mv}{I} = \sigma + \frac{a(1+b)\sigma^2}{\sigma_k - (1+b)\sigma} = \sigma \left[ \frac{\sigma_k - (1+b)(1-a)\sigma}{\sigma_k - (1+b)\sigma} \right] \quad (14)$$

La valeur de la contrainte limite d'affaissement  $\sigma_s$  pour laquelle  $\sigma_{max} = \sigma_e$  satisfait alors à :

$$\sigma_s \left[ \frac{\sigma_k - (1+b)(1-a)\sigma_s}{\sigma_k - (1+b)\sigma_s} \right] = \sigma_e \quad (15)$$

d'où :

$$\sigma_s^2 (1+b)(1-a) - \sigma_s [\sigma_k + \sigma_e (1+b)] + \sigma_e \sigma_k = 0 \quad (16)$$

ou encore :

$$\sigma_s = \frac{\sigma_k + (1+b)\sigma_e}{2(1+b)(1-a)} - \sqrt{\left[ \frac{\sigma_k + (1+b)\sigma_e}{2(1+b)(1-a)} \right]^2 - \frac{\sigma_e \sigma_k}{(1+b)(1-a)}} \quad (17)$$

Ainsi nous avons introduit trois paramètres  $a$ ,  $b$ , et  $\sigma_e$  qui se déterminent à l'aide des résultats expérimentaux.

### 7.1. Détermination de $a$ , $b$ et $\sigma_e$

Si l'on considère trois valeurs de l'élancement  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  auxquelles correspondent les contraintes critiques d'Euler  $\sigma_{k1}$ ,  $\sigma_{k2}$ ,  $\sigma_{k3}$  et trois valeurs expérimentales  $\sigma_{s1}$ ,  $\sigma_{s2}$ ,  $\sigma_{s3}$  de la contrainte d'affaissement, on peut écrire en vertu de l'équation (16) le système de trois équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{s1}^2 (1+b)(1-a) - \sigma_{s1} (1+b)\sigma_e + \sigma_{k1}\sigma_e &= \sigma_{s1}\sigma_{k1} \\ \sigma_{s2}^2 (1+b)(1-a) - \sigma_{s2} (1+b)\sigma_e + \sigma_{k2}\sigma_e &= \sigma_{s2}\sigma_{k2} \\ \sigma_{s3}^2 (1+b)(1-a) - \sigma_{s3} (1+b)\sigma_e + \sigma_{k3}\sigma_e &= \sigma_{s3}\sigma_{k3} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

qui permet de calculer les trois inconnues  $a$ ,  $b$ , et  $\sigma_e$ .

Après avoir résolu le système de trois équations (18), on obtient :

$$\sigma_e = \frac{\sigma_{s1}(\sigma_{k2} - \sigma_{k1}) + \sigma_{s2}(\sigma_{k2} - \sigma_{k3}) + \sigma_{s3}(\sigma_{k3} - \sigma_{k1})}{\sigma_{s1} \left( \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_{k3}}{\sigma_{s3}} \right) + \sigma_{s2} \left( \frac{\sigma_{k3}}{\sigma_{s3}} - \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_{s1}} \right) + \sigma_{s3} \left( \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_{s1}} - \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{s2}} \right)} \quad (19)$$

$$(1+b) = \frac{\sigma_{s1} \left[ \sigma_{k2} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)_3 - \sigma_{k3} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)_2 \right] + \sigma_{s2} \left[ \sigma_{k3} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)_1 - \sigma_{k1} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)_3 \right] + \sigma_{s3} \left[ \sigma_{k1} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)_2 - \sigma_{k2} \left( \frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)_1 \right]}{\sigma_{s1}(\sigma_{k2} - \sigma_{k3}) + \sigma_{s2}(\sigma_{k3} - \sigma_{k1}) + \sigma_{s3}(\sigma_{k1} - \sigma_{k2})} \quad (20)$$

$$(1+b)(1-a) = \frac{\sigma_{k1} \left( \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_{k3}}{\sigma_{s3}} \right) + \sigma_{k2} \left( \frac{\sigma_{k3}}{\sigma_{s3}} - \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_{s1}} \right) + \sigma_{k3} \left( \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_{s1}} - \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{s2}} \right)}{\sigma_{s1} \left( \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{s2}} - \frac{\sigma_{k3}}{\sigma_{s3}} \right) + \sigma_{s2} \left( \frac{\sigma_{k3}}{\sigma_{s3}} - \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_{s1}} \right) + \sigma_{s3} \left( \frac{\sigma_{k1}}{\sigma_{s1}} - \frac{\sigma_{k2}}{\sigma_{s2}} \right)} \quad (21)$$

Dans le tableau ci-dessous nous avons rassemblé les valeurs de  $a$ ,  $b$ , et  $\sigma_e$  pour chaque alliage d'aluminium dans cet article,

TABLEAU

	A-U4G	A-SG	AS-GM	A-Z5G	A-G5
$a$	0,0954	0,2605	0,2091	0,1174	0,8885
$b$	0,2346	0,0370	0,252	0,0378	- 0,1545
$\sigma_e$	27,12	28,11	31,53	29,15	11,24
$E$	7400	7000	7000	7200	7000

## 8. CONCLUSIONS

### 8.1. Essais sur matériaux

A l'examen des tableaux 8, 9, 10, 11 et 12 on constate que :

- l'alliage A-U4G présente, pour les différentes fusions, des écarts considérables aussi bien en traction qu'en compression ;
- l'alliage A-SG ne manifeste pas d'anomalie appréciable, mais qu'il possède, contrairement à l'alliage précédent, une limite d'élasticité de compression légèrement supérieure à celle de traction.

### 8.2. Essais de flambement et comparaison avec la courbe Dutheil

Les coefficients de Pearson, insérés dans les tableaux 2, 3, 4, 5 et 6, nous permettent de relever quelques élancements pour lesquels la série de mesures de contrainte d'affaissement n'a pas de répartition normale. Dans le souci de faciliter la détermination de la contrainte probable d'affaissement, on a utilisé une même relation, c'est-à-dire  $X = m - t_{\alpha} s_{\alpha}$  où  $t_{\alpha}$  varie avec le nombre de mesures à chaque élancement.

Comme le montrent les figures 1 à 5, la courbe théorique de chaque alliage ne dépasse presque en aucun cas la limite des contraintes d'affaissement ; ces courbes peuvent donc servir de base au calcul de la résistance au flambement simple des barres en alliage d'aluminium à traitement thermique, compte tenu du facteur de sécurité de la barre.

Sur la figure 6, on voit que les courbes non-dimensionnelles de flambement pour les alliages à traitement thermique, plus précisément A-U4G, A-SG, A-SGM et A-Z5G, sont proches les unes des autres.

Afin de simplifier le calcul, H. Djalaly a été amené à proposer une courbe moyenne (représentée par des points sur le figure 6) ayant pour expression :

$$\bar{\sigma} = \frac{0,53993}{\bar{\lambda}^2} + 0,59041 - \sqrt{\left[\frac{0,53993}{\bar{\lambda}^2} + 0,59041\right]^2 - \frac{1,07987}{\bar{\lambda}^2}}$$

$\bar{\sigma}$  et  $\bar{\lambda}$  étant les valeurs non-dimensionnelles de la contrainte et de l'élancement.

Il est intéressant de remarquer que la loi de comportement de l'alliage A-G5 (alliage sans traitement thermique) présente un écrouissage important, par conséquent la courbe de flambement eulérienne ne peut répondre à la résistance ultime des barres en A-G5 pour des barres relativement élancées. Cela est parfaitement visible sur la figure 5. Bien entendu, en ce qui concerne les barres élancées la courbe eulérienne est valable pour les matériaux dont le phénomène d'écrouissage n'est pas considérable, notamment pour le cas des alliages d'aluminium à traitement thermique.

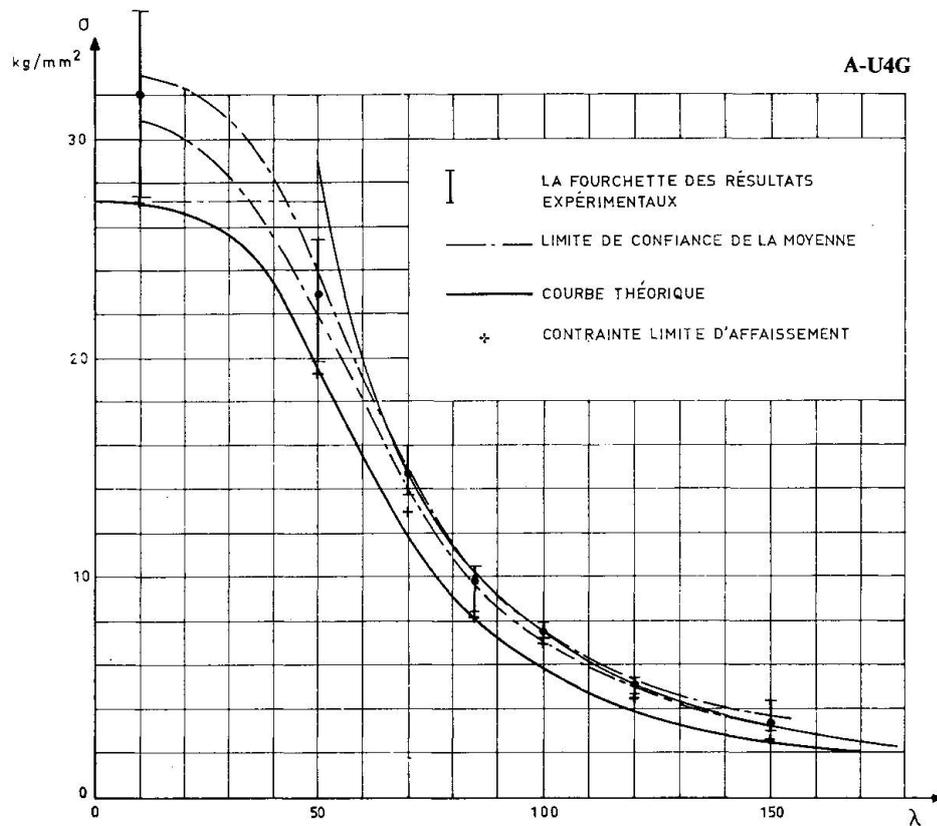


Fig. 1

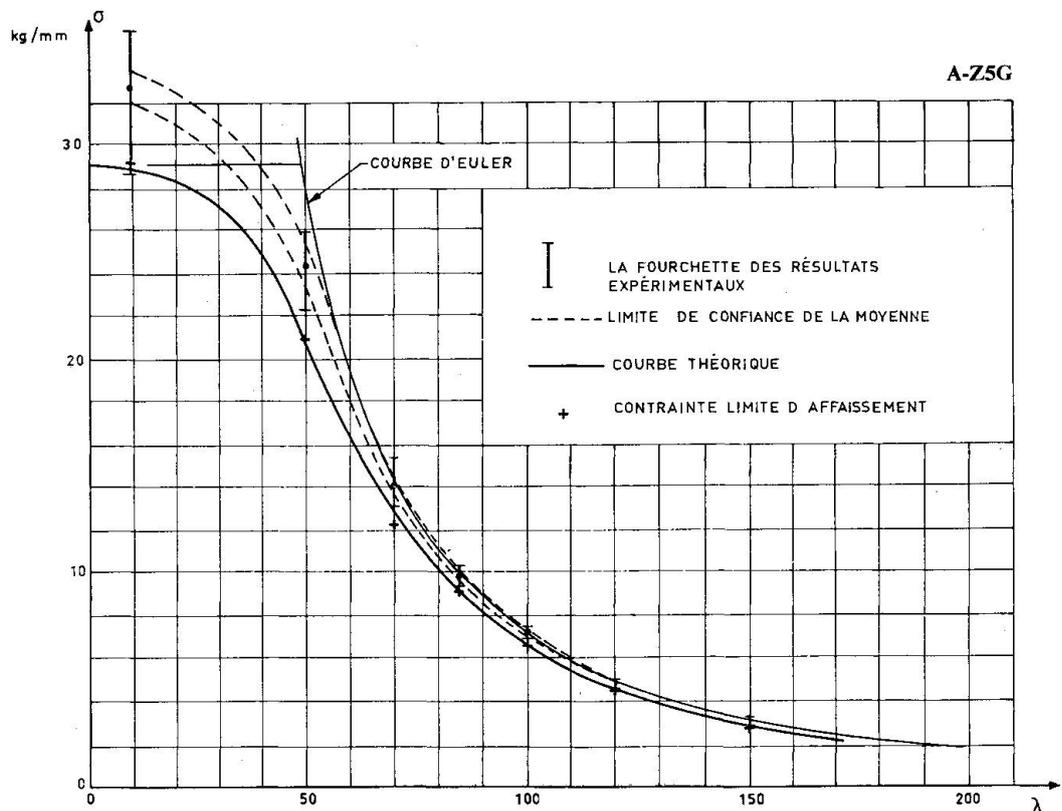


Fig. 2

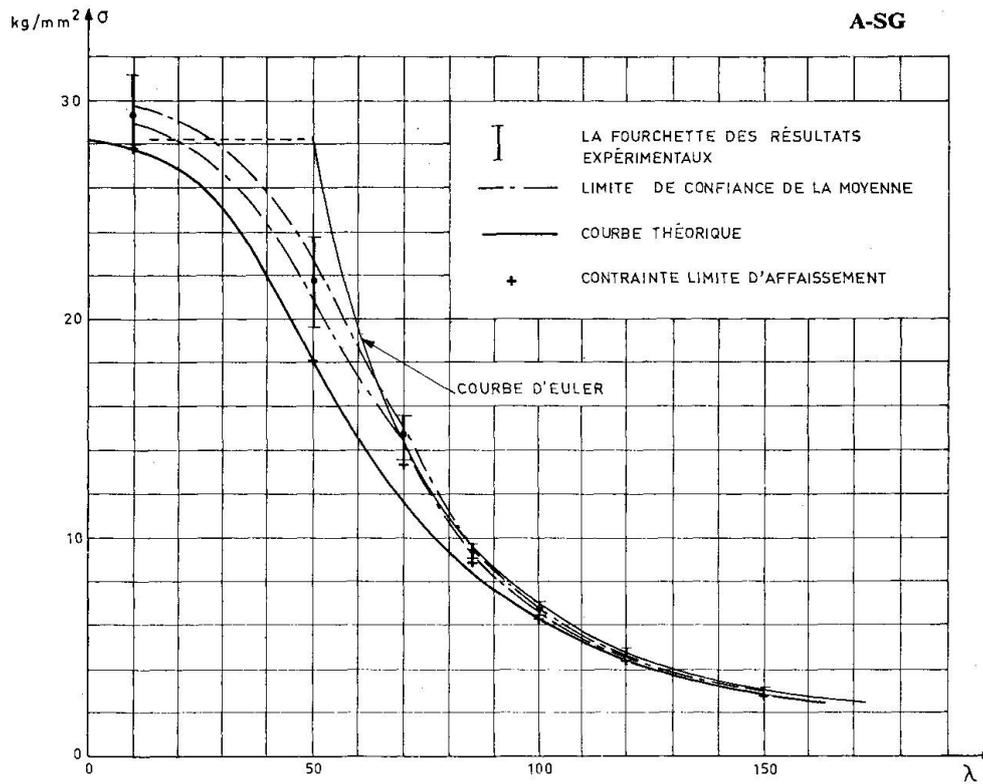


Fig. 3

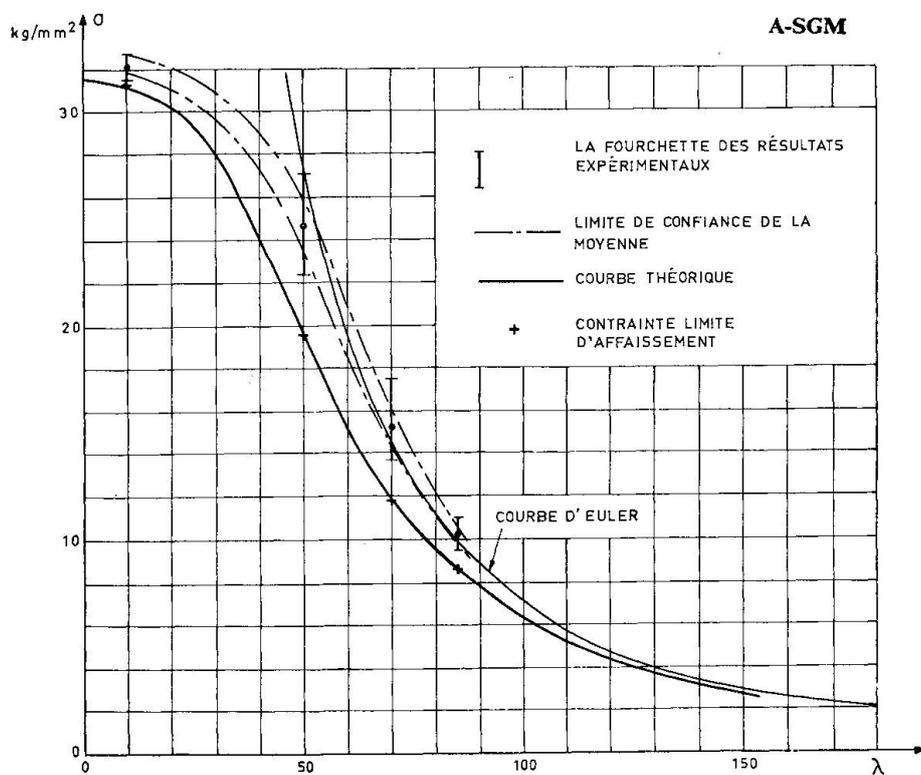


Fig. 4

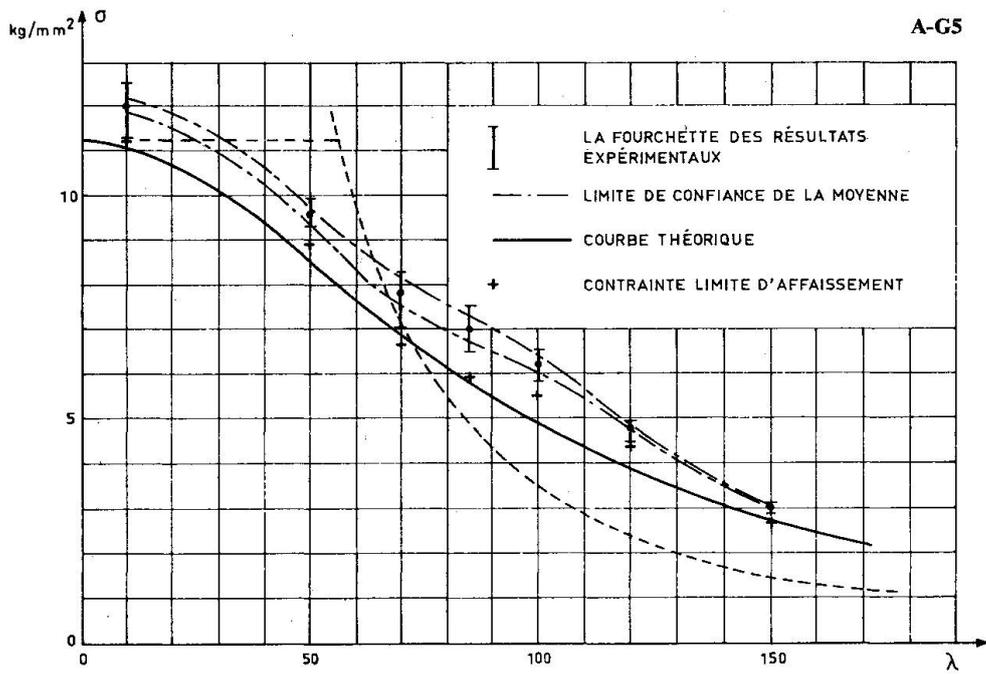


Fig. 5

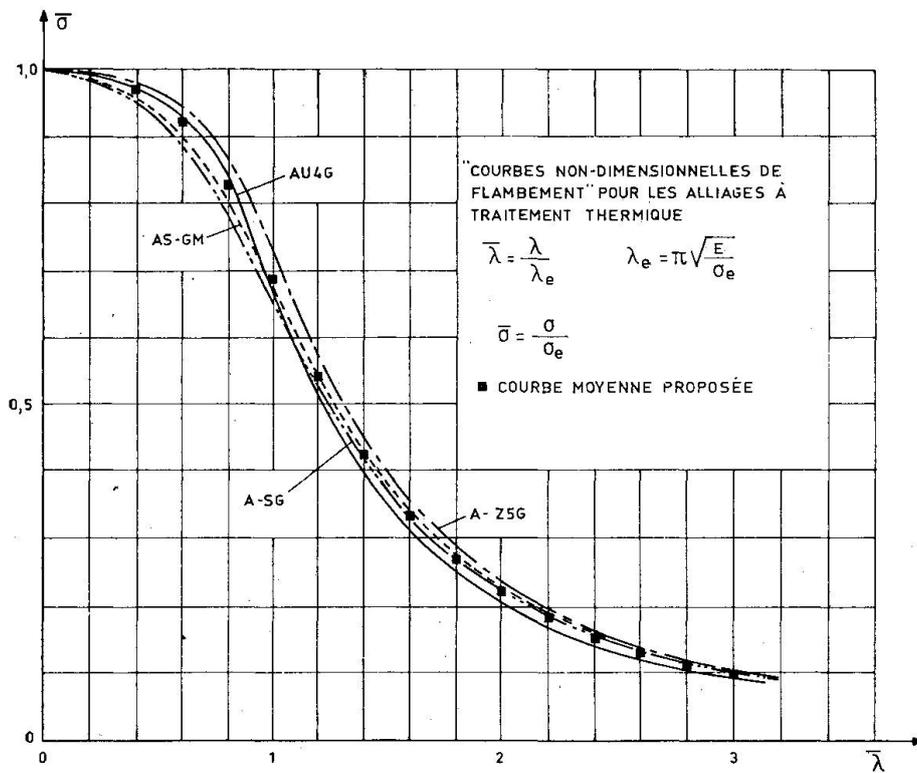


Fig. 6

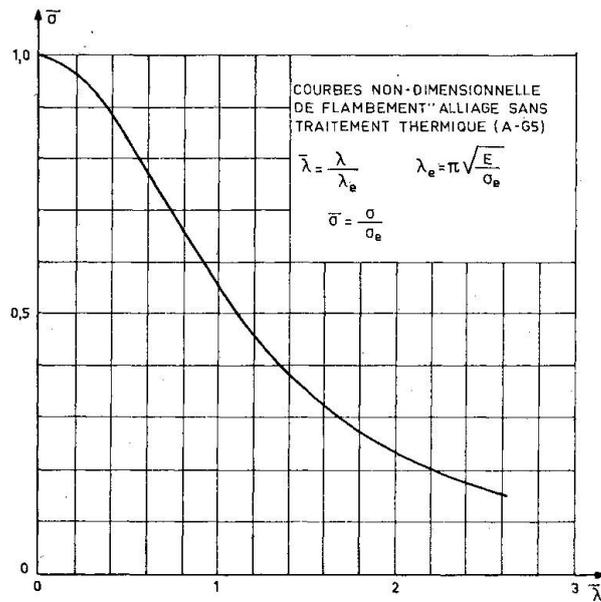


Fig. 7

La partie expérimentale de cette recherche a été effectuée avec l'appui de l'Aluminium Français, au Laboratoire du C.E.B.T.P. par MM. Dauphin et Texier.

M. P. Arnault, Ingénieur au Service Recherches du C.T.I.C.M., était chargé de cette recherche et a effectué la première exploitation des résultats, sous la direction de D. Sfintesco, à l'usage des règles de conception et de calcul des charpentes en alliages d'aluminium.

## B I B L I O G R A P H I E

---

- /1/ J. Dutheil *Conception probabiliste de la sécurité dans le flambement.*  
Commission 8. Note n° 8, octobre 1959.
- /2/ D. Sfintesco *Etude expérimentale du flambement des barres en acier.*  
P. Dauphin  
J. Jacquet  
Annales de l'I.T.B.T.P. n° 217 EM-89, janvier 1966.
- /3/ D. Sfintesco *Etude expérimentale du flambement.*  
Construction Métallique, n° 1-1965, p. 19-22.
- /4/ J. Jacquet *Essais de flambement et exploitation statistique.*  
Construction Métallique, n° 3-1970, p. 13-36.
- /5/ J. Mothes *Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise.*  
Ed. Dunod, Paris, 1968.
- /6/ R.L. Anderson *Statistical theory in research.*  
T.B. Bancroft  
Mc Graw-Hill book Co., 1952.
- /7/ R.A. Fischer *Statistical methods for research workers.*  
Oliver and Boyd, Edimbourg, 1958.
- /8/ M.G. Natrella *Experimental statistics.*  
NBS, Handbook 91, Issued August 1, 1963
- /9/ P. Arnault *Recherche sur le flambement des profils en alliages légers.*  
D. Sfintesco  
Rapport interne du C.T.I.C.M., octobre 1967.
- /10/ H. Djalaly *Recherche sur le flambement des barres en aluminium.*  
D. Sfintesco  
Rapport présenté au Colloque sur le Flambement, Paris,  
novembre 1972.