Toisé des voûtes d'arête des églises gothiques

Autor(en): **Isely**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel**

Band (Jahr): **8 (1867-1870)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88053

APPENDICES.

TOISÉ

des voûtes d'arête des églises gothiques,

PAR M. ISELY, PROFESSEUR.

(Voir la séance du 28 janvier, page 239.)

A propos de la restauration de la Collégiale de Neuchâtel, un peintre-gypseur, chargé de la peinture des voûtes de cette église, me demanda quelle était la manière la plus exacte d'en calculer l'aire. Ne trouvant rien sur cette matière dans les ouvrages de géométrie, j'ai essayé le petit travail suivant:

I.

Supposons d'abord quatre piliers en carré A B A′ B′, destinés à supporter les courbes ogivales servant de directrices pour la génération des voûtes qui se pénètrent, représentées dans la perspective cavalière (fig 1). L'ensemble de la voûte se compose ainsi de huit portions de surfaces cylindriques, égales entre elles, dont l'une d'elles est figurée par la partie A O C.

La figure 2 est l'épure de la voûte. A B A′ B′ est le plan de la figure, et A B C la projection verticale des arcs ogivaux. Soit I le centre de l'arc A E C, et r son rayon C I. (Nous admettons que ces arcs sont des portions de cercle, comme cela a lieu généralement.) Développons la portion cylindrique A O C sur un plan; nous obtiendrons la figure N O S R, terminée par la courbe O S R, tandis que N A R est l'arc A E C rectifié.

$$\text{Faisons: } \angle C I A = \alpha$$
$$\angle E I A = \omega$$
$$N F = \text{arc } C E = r(\alpha - \omega) = x$$
$$S F = K L = A K = AI - K I = r(1 - \cos.\ \omega) = y.$$

Nous aurons :

$$\frac{x}{r} = \alpha - \omega;\ \omega = \alpha - \frac{x}{r};\ \cos.\ \omega = \cos\left(\alpha - \frac{x}{r}\right)$$
$$\text{et } y = r\left[1 - \cos.\left(\alpha - \frac{x}{r}\right]\right.$$

C'est l'équation de la courbe O S R, espèce de *sinusoïde*, qui tourne sa convexité contre l'axe des x, car sa dérivée du second ordre $\frac{1}{r}\cos.\left(\alpha - \frac{x}{r}\right)$ est positive.

Il ne reste plus qu'à faire la quadrature de la surface N O S R.

L'intégrale $\int y\,d\,x = r\int\left[d\,x - \cos.\left(\alpha - \frac{x}{r}\right) d\,x\right]$

donne: $r\left[x + r \sin.\left(\alpha - \frac{x}{r}\right)\right]$;

il faut la prendre depuis : $x = o$ à $x = r\,\alpha$.

Pour $x = o$, on a: $r\left[o + r \sin.\,\alpha\right]$

pour $x = r\,\alpha$, on a: $r\left[r\,\alpha + o\right]$.

On a ainsi pour la valeur de l'intégrale définie:

$$r^2(\alpha - \sin.\ \alpha).$$

Appliquons cette formule à quelques cas particuliers.

I. Supposons que le centre soit en N, et que l'ogive se réduise à un *plein-cintre*. Nous aurons alors :

$$\alpha = 90^\circ = \frac{\Pi}{2}$$

et $r^2\left(\frac{\Pi}{2} - \sin.\ \frac{\Pi}{2}\right) = r^2 \times 0{,}5708$,

pour l'aire d'une des portions cylindriques A O C de la voûte en arête. Si a représente la distance A B d'un des piliers à l'autre, on peut écrire aussi:

$$\frac{a^2}{4} \times 0{,}5708 = 0{,}1427\ a^2.$$

II. *Voûte gothique.*

Ici le centre est en B : $r = A\ B = a$, $\alpha = 60^\circ = \frac{\Pi}{3}$

La formule donne:

$a^2 \left(\frac{\Pi}{3} - \sin \frac{\Pi}{3}\right) = a^2\ (1{,}0472 - 0{,}8660) = 0{,}1812\ a^2$ pour la surface A O C.

III. *Ogive romane.*

C'est le cas des voûtes de la Collégiale de Neuchâtel. Le centre I de la voûte est à une distance $NI = \frac{1}{3}\ N B = \frac{1}{6}$ A B, de sorte que $r = \frac{2}{3}$ A B ou $\frac{2}{3}$ a. et α est un angle de 75° 31′ 20″.

La formule devient :

$\frac{4}{9}\ a^2$ (arc 75° 31′ 20″ — sin. 75° 31′ 20″)

ou $\frac{4}{9}\ a^2\ (1{,}318 - 0{,}968) = 0{,}156\ a^2$.

II.

Pour donner plus de généralité à cette recherche, nous devons l'étendre au cas où les piliers ne sont pas disposés en carré, mais en rectangle.

Dans ce cas si l'on désigne par *a* la distance des piliers A B et par *b* celle des piliers A A′, la formule de la courbe O S R deviendra, en se servant des mêmes notations que ci-dessus :

$$y = \frac{br}{a}\left[1 - \cos.\left(\alpha - \frac{x}{r}\right)\right]$$

et celle de la surface N O S R sera :

$$\frac{br^2}{a}\ (\alpha - \sin.\ \alpha).$$

Cette formule servira pour calculer les portions de voûte aboutissant à la face A B.

Pour calculer les portions de voûtes qui aboutissent à la face A A′, il faut employer la formule :

$$\frac{ar^2}{b}(\alpha' - \sin.\ \alpha')$$

Les valeurs r r', α α' sont liées entre elles par les conditions suivantes :

$$1^\circ \quad r' \sin.\alpha' = r \sin.\alpha,$$

résultant de ce que les voûtes des deux faces doivent avoir la même hauteur.

$$2^\circ \quad r' \cos.\alpha' + {}^1/_2\, b = r' \text{ ou } b = 2r' (1 - \cos.\alpha')$$

$$r \cos.\alpha + {}^1/_2\, a = r \text{ ou } a = 2\, r\, (1 - \cos.\alpha).$$

Il en résulte que :

$$\frac{b}{a} = \frac{r'(1 - \cos.\alpha')}{r\,(1 - \cos\alpha\,)} = \frac{r' \sin.^2\, {}^1/_2\,\alpha'}{r \sin.^2\, {}^1/_2\,\alpha}$$

$$\text{ou } \frac{a}{b} = \frac{\sin.\alpha \sin.^2\, {}^1/_2\,\alpha'}{\sin.\alpha' \sin^2\, {}^1/_2\,\alpha} = \frac{\text{tang.}\, {}^1/_2\,\alpha'}{\text{tang.}\, {}^1/_2\,\alpha},$$

$$\text{et enfin tang.}\, {}^1/_2\,\alpha' = \frac{b}{a}\,\text{tang.}\, {}^1/_2\,\alpha.$$

III.

En reprenant la formule du premier paragraphe :

$$r^2 (\alpha - \sin.\alpha)$$

qui peut s'écrire : $r^2 (\alpha - 2 \sin.\, {}^1/_2\,\alpha \cos.\, {}^1/_2\,\alpha.$

On peut comparer cette valeur exacte à celle qu'obtient le peintre-gypseur. Celui-ci mesure la surface en question en multipliant la longueur de l'arc de l'ogive, égale à N R ou r cos. α par la largeur K L, répondant au milieu de cet arc. Celle-ci vaut : $r\,(1 - \cos.\, {}^1/_2\,\alpha)$

de sorte que son évaluation répond à

$$r^2 (\alpha - \alpha \cos.\, {}^1/_2\,\alpha)$$

et puisque $\alpha > 2 \sin.\, {}^1/_2\,\alpha$, il s'ensuit que son évaluation est trop faible, c'est-à-dire qu'*il perd.* Heureusement pour lui qu'il se sert de la *ficelle* pour mesurer.

IV.

Si on calcule quelle est l'aire du segment, on trouve facilement : ${}^1/_2\, r^2 (\alpha - \sin.\alpha)$,

c'est-à-d. qu'elle est *la moitié* de la portion cylindrique A O C.

C'est un résultat assez remarquable.