La géométrie de la sphère et l'hexagramme mystique

ments de poterie, car nous voyons, dans les planches du volume que je prends la liberté de faire passer sous vos yeux, des restaurations de vases, ainsi que des fragments couverts de dessins dont la variété et l'originalité ne sont pas sans analogie avec les débris de nos palafittes.

Feu M. Pictet, le paléontologiste distingué, recommandait toujours de ne pas négliger les fragments de fossiles, même isolés, lorsque, par leur état de conservation, ils pourraient aider à la détermination des caractères spécifiques.

Le Musée du Locle possède un petit commencement de collection du genre de celle que je voudrais voir réussir à Neuchâtel, et je rappelle en passant le beau spécimen figuré dans le *Musée neuchâtelois*.

M. *L. Isely* fils lit la note suivante :

LA GÉOMÉTRIE DE LA SPHÈRE
ET L'HEXAGRAMME MYSTIQUE

Par M. L. ISELY, professeur.

Le XVII[e] siècle a droit à notre admiration par la multiplicité et l'importance de ses découvertes dans le domaine des mathématiques. Burgi et Neper inventent les logarithmes, Descartes conçoit la géométrie analytique, Desargues et Pascal donnent à la théorie des coniques un développement considérable, Pascal et Fermat imaginent le calcul des probabilités, Leibnitz et Newton créent l'analyse infinitésimale. Ce fut, sans contredit, l'âge d'or des sciences exactes.

L'*Essai pour les coniques* parut en 1640. Son auteur, Blaise Pascal, était un tout jeune homme, de seize ans à peine. Cet écrit de peu d'étendue, sept pages in-8°, passa pour ainsi dire complètement inaperçu. Les géomètres de l'époque étaient sous le coup de l'immortelle conception de Descartes. Les méthodes synthétiques étaient délaissées pour les procédés analytiques. La géométrie pure ne comptait plus qu'un petit nombre d'adeptes et ce nombre subit encore une notable diminution lors de la découverte du Calcul différentiel et intégral, quelque quarante ans plus tard. L'*Essai* resta enseveli pendant plus d'un siècle. Il ne revit le jour qu'en 1779.

Cet opuscule commençait par un lemme dont l'importance n'échappa pas aux géomètres de notre siècle. Pascal s'en servit pour démontrer plusieurs propriétés des courbes du 2e degré, et lui donna le nom d'*hexagramme mystique*. Cette belle proposition s'énonce généralement comme suit :

« *Les points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont toujours en ligne droite.* »

En 1806, Brianchon, dans son *Mémoire sur les surfaces du 2e degré* (Journal de l'Ecole polytechnique, XIIIe cahier), déduisit du théorème précédent cette proposition non moins remarquable et non moins utile :

« Les diagonales qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique concourent au même point. »

Première et ingénieuse application de la théorie des polaires réciproques, qui depuis a reçu une si heureuse extension !

Plus tard, Steiner, Plucker, Hesse, Bauer, en Allemagne ; Cayley, Kirkman et Salmon, en Angleterre, furent conduits, en approfondissant la question, à la découverte de propriétés qui font de l'hexagramme mystique une des figures les plus singulières que l'on connaisse.

Il était facile de prévoir que les coniques sphériques devaient fournir des considérations analogues à celles qui se présentent dans l'étude des coniques planes. Le plan n'est, en effet, qu'une portion de surface sphérique de rayon infini. La géométrie à deux dimensions est un cas particulier de celle de la sphère, la trigonométrie rectiligne est une conséquence toute naturelle, un corollaire forcé, de la trigonométrie sphérique. Chose curieuse, cette vérité, qui paraît si simple aujourd'hui, ne semble pas avoir été connue des anciens. Ce n'est guère qu'à la fin du siècle dernier que l'on cherche à résoudre, sur la sphère, des questions analogues à celles de la géométrie plane. Lexell étudie les propriétés des cercles décrits sur la sphère et fait voir que *le lieu des sommets des triangles sphériques, de même base et de même aire, est un arc de petit cercle, passant par les points diamétralement opposés aux extrémités de la base constante.* Peu après, Fuss s'occupe d'une façon toute spéciale d'une certaine ellipse, intersection de la sphère par un cône du 2e degré, ayant son sommet au centre de la sphère considérée. (*Nova acta Petrop.*, tome III.) Cette courbe est *le lieu des sommets des triangles de même base et dont la somme des deux autres côtés est constante.* Elle se décrit, comme l'ellipse plane, à l'aide d'un fil dont les extrémités sont attachées à deux points fixes, les foyers. Fuss arrive de plus à ce résultat remarquable : si la longueur du fil équivaut à la demi-circonférence de la sphère, ce mode de construction conduit invariablement à un grand cercle, quel que soit du reste l'éloignement des foyers. Quelques années plus tard, Magnus, de Berlin, découvre (Annales de Mathématiques, tome XVI, 1825-1826) cette belle propriété de l'ellipse sphérique : *Les arcs de grands cercles, qui joignent les foyers à un point quelconque de la courbe, font des angles égaux avec l'arc tangent en ce point.*

Lhuilier, professeur de mathématiques à Genève, avait déjà, quelques années auparavant, publié un mémoire sur *les analogies entre les triangles rectangles rectilignes et sphériques.* (Ann. de Math., tome I, 1810-1811, pages 197-201.)

Il y établit entre autres la proposition corrélative de celle de Pythagore, sur le carré de l'hypoténuse. *Dans tout triangle sphérique rectangle*, écrit-il, *le carré du sinus de la demi-hypoténuse est égal à la somme des produits des carrés des sinus de chaque demi-côté par le cosinus au carré de la moitié de l'autre.* On a donc :

$$\sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2},$$

a désignant l'hypoténuse, b et c les côtés de l'angle droit du triangle considéré. Lhuilier ajoute, en guise de scolie, que l'application aux triangles rectilignes a lieu en substituant d'une part aux sinus des demi-côtés ces demi-côtés eux-mêmes et d'autre part l'unité à leurs cosinus.

C'est dans la même revue que Gergonne énonce cette propriété du quadrilatère sphérique analogue à celle du quadrilatère plan : *un quadrilatère est circonscriptible à un cercle lorsque la somme de deux côtés opposés est égale à celle des deux autres* (Ann. de Math., tome V, page 384). Guéneau d'Aumont démontre la proposition supplémentaire, à savoir que *dans tout quadrilatère sphérique inscrit dans un cercle, la somme de deux angles opposés est égale à celle des deux autres* (Mêmes Annales, tome XII, 1821-1822).

Puis la théorie des courbes du 2e degré, tracées sur la surface de la sphère, reprit le dessus. Deux géomètres de premier ordre, Steiner et Chasles, l'un dans le Journal de Crelle, tome II, l'autre dans son mémoire *sur les coniques sphériques* (Mémoires de l'Académie de Bruxelles, tome VI), et dans divers écrits dont les derniers parurent dans les Comptes rendus (mars et juin 1860), firent connaître au monde savant maintes propriétés fort intéressantes de cette espèce de lignes sphériques. L'ellipse sphérique de Fuss devient *l'enveloppe des bases des triangles qui ont même aire et un angle commun.* Il existe en outre deux arcs de grands cercles qui jouent le rôle des asymptotes de l'hyperbole plane. Chasles leur donne le nom d'*arcs cycliques.* A la même époque, Gudermann; de Clèves, publie successivement deux ouvrages intitulés : « *Grundriss der analytischen Sphärik* » (Cologne, 1830), et « *Lehrbuch der niederen Sphärik* » (Münster, 1835). C'est là le premier essai d'une géométrie quelque peu complète de la sphère. Dans le premier de ces écrits, Gudermann étudie les propriétés des courbes sphériques au moyen d'un système de coordonnées conçu en prenant pour modèle celui des coordonnées cartésiennes.

Dans le second, il s'appuie sur des considérations de géométrie élémentaire et de trigonométrie sphérique pour établir des propositions dont l'importance n'échappera à personne. Nous ne citerons que les deux suivantes: « *Les côtés opposés d'un hexagone sphérique inscrit dans un cercle se coupent en trois points situés sur un arc de grand cercle* (page 207). — *Les arcs de grands cercles, qui joignent les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à un cercle, se rencontrent toujours en un point* (pages 230 et 231). On reconnaît immédiatement dans ces énoncés ceux des théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Le 15 novembre 1847, Borgnet, alors professeur de mathématiques à Tours, présentait à l'Académie des Sciences un Essai de géométrie de la sphère. L'Académie renvoya cet Essai à l'examen d'une commission choisie parmi ses membres, et qui fut composée de Cauchy, Poncelet et Liouville. Ce mémoire, écrit avec beaucoup de clarté, vit le jour l'année suivante (1848) sous le titre d'*Essai de géométrie analytique de la sphère* (antidaté le 12 juin 1847). Mais, à son insu, Borgnet ne fit que répéter ce que Gudermann avait dit douze ans auparavant. Il généralisa cependant d'une manière assez ingénieuse les théorèmes de Pascal et de Brianchon (Nouvelles Ann. de Math., tome VII, pages 175 et 176). A peu près à la même époque paraissaient d'excellents articles sur les figures sphériques, dus à la plume d'un éminent professeur de

Versailles, Vannson (voir *Note sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique*, Nouv. Ann., tome VII, pages 14 et 51 ; puis *Formules fondamentales de l'analyse sphérique*, tome XVII, pages 65, 99, 140, 163, 209, 243 et 307, tome XVIII, page 5; enfin *Propriétés des coniques sphériques homofocales*, tome XIX, page 197, 1860). Il est entre autres fait mention de l'hexagramme mystique et de son théorème inverse à la page 220 du tome XVII.

Enfin, tout dernièrement, M. Salmon, le savant professeur de l'université de Dublin, a consacré un chapitre de son *Traité de géométrie analytique à trois dimensions* aux coniques sphériques (1re partie, ch. X de la traduction française par M. Chemin, 1882). Entre autres propositions, on remarque les suivantes, qui sont fondamentales: *Etant donnés la base et le produit des cosinus des côtés d'un triangle sphérique, le lieu du sommet est une conique sphérique dont les arcs cycliques sont les grands cercles qui ont pour pôles les extrémités de la base donnée. Deux tangentes variables coupent les arcs cycliques en quatre points situés sur un cercle.* — Dans un système de *deux coniques homofocales, l'excès de la somme des tangentes, menées par un point de la courbe extérieure à la conique intérieure, sur l'arc qu'elles embrassent est constant.* Quelques-unes de ces propositions sont déjà énoncées dans les œuvres de Gudermann, de Borgnet et de Vannson.

« Ainsi, comme le dit Chasles, la géométrie de la « sphère est commencée d'une manière régulière et « dogmatique. On ne contestera point l'utilité théori- « que de pareilles recherches. Il est bon de contempler « les vérités géométriques dans leur plus grande éten-

« due, dans leur plus grande généralité, dans leur plus « grande approximation, pour ainsi dire, des lois su- « prêmes, dont la recherche doit être l'objet constant « des efforts des géomètres. Elles ont, dans cet état « de généralité, des rapports et des analogies qu'on « ne rencontre point dans leurs corollaires, qui en « montrent l'enchaînement et servent à s'élever plus « haut et à découvrir des principes généraux dont les « traces étaient effacées ou inaperçues dans les pro- « positions plus circonscrites et plus particulières. La « géométrie de la sphère, ne fût-elle donc considérée « que comme mode de généralisation des propriétés « des figures planes, et indépendamment de son ca- « ractère et de sa valeur propres et absolus, mérite- « rait l'attention et l'étude des géomètres. » (Aperçu historique, page 240.)

Abordons maintenant la question qui doit faire le sujet de cette communication. L'hexagramme mystique, nous l'avons vu précédemment, existe sur la sphère. Quels en sont les caractères distinctifs et quels sont les développements dont cette figure est susceptible? Tels sont les points que nous allons chercher à éclaircir le plus succinctement possible.

L'analyse et la synthèse conduisent l'une et l'autre rapidement au but.

La géométrie analytique enseigne que, si l'équation d'un plan est de la forme :

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point (x', y', z') sur ce plan est :

$$x' \cos \alpha + y' \cos \beta + z' \cos \gamma - p.$$

Si donc nous introduisons les coordonnées d'un point de la sphère dans le premier membre de l'équation d'un plan passant par son centre, nous obtiendrons la longueur de la perpendiculaire que l'on peut abaisser du point sur le plan, c'est-à-dire la valeur du sinus de l'arc perpendiculaire abaissé de ce point sur le grand cercle, intersection de la sphère par le plan considéré. Cette remarque conduit à quelques propriétés très intéressantes des coniques sphériques, propriétés analogues à celles dont jouissent les coniques planes.

Représentons maintenant par le symbole abréviatif $A=0$, l'équation d'un plan qui passe par le centre de la sphère (origine des coordonnées). Nous pourrons l'envisager comme étant aussi celle du grand cercle, suivant lequel ce plan coupe la sphère. Soient donc

$$A=0,\ B=0,\ C=0 \text{ et } D=0,$$

les équations des côtés d'un quadrilatère sphérique. Il est évident que la formule

$$(1)\ldots\ AC + K.\ BD=0,$$

où K est un paramètre arbitraire, exprime qu'une conique quelconque passe par les sommets de ce polygone. On voit qu'alors (1) *le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés d'un point d'une conique sphérique sur deux des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est dans un rapport constant avec le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés du même point sur les deux autres côtés.* (Salmon, G. anal. à trois dimensions, page 319.)

(1) Théorème de Pappus.

L'égalité (1) permet de démontrer très simplement l'hexagramme mystique sur la sphère. Ce théorème, débarrassé de toutes considérations supplémentaires, peut s'énoncer de la manière suivante :

« *Les points de concours des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sphérique sont situés sur une circonférence de grand cercle.* »

Désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6 les sommets de l'hexagone, selon leur rang [1]. Les côtés opposés seront les arcs (12), (45); (23), (56); (34), (61), où (12), par exemple, représente la corde sphérique ayant pour extrémités les points 1 et 2. La diagonale (14) divisera l'hexagone en deux quadrilatères et la conique circonscrite aura pour équation, soit :

$$(12)\,(34) + K\,(23)\,(14) = 0,$$

soit

$$(45)\,(61) + K'\,(56)\,(14) = 0.$$

Ces équations représentant la même courbe, on pourra toujours déterminer les paramètres K et K' de manière qu'on ait l'identité :

$$(12)\,(34) + K\,(23)\,(14) - (45)\,(61) - K'\,(56)\,(14) \equiv 0,$$

quelles que soient les valeurs assignées aux variables.

Cette identité donne lieu aux deux équations équivalentes :

$$(12)\,(34) - (45)\,(61) = 0,$$

et

$$(14)\,[K\,(23) - K'\,(56)] = 0.$$

Les figures représentées par ces deux expressions sont nécessairement identiques. Voyons ce qu'elles

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

sont. Le premier membre de la seconde équation se décomposant en deux facteurs, on a d'une part :

$$(14) = 0$$

et de l'autre

$$(23) - l\,(56) = 0,$$

où l est le signe représentatif du rapport $\frac{K'}{K}$. Nous obtenons de la sorte deux grands cercles dont l'un est la diagonale (14) elle-même, et l'autre une circonférence passant par le point de concours des arcs (23) et (56). La première équation doit donc fournir les mêmes grands cercles. Or, la ligne qui renferme les intersections des arcs (21), (61) et (34) (45) n'est pas autre chose que la diagonale (14); il s'ensuit que l'arc de cercle qui passe par les points (12), (45) et (34), (61) doit coïncider avec celui qui contenait l'intersection des côtés (23) et (56). Les points (12), (45); (23), (56) et (34), (61) sont donc situés sur la même circonférence de grand cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Deux grands cercles de la sphère se rencontrent toujours en deux points diamétralement opposés. Il en résulte que les côtés opposés de l'hexagone inscrit donnent naissance à trois couples de points. Ces six points sont évidemment situés sur la même circonférence. Nous donnerons à cette dernière le nom de *cercle de Pascal.*

La démonstration synthétique se ferait tout aussi simplement.

Nous avons vu que le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés d'un point d'une conique sphérique sur deux des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit est dans un rapport constant avec le produit des sinus des arcs perpendiculaires abaissés du même point sur les deux autres côtés. De ce théorème, il est facile de conclure le suivant :

Le faisceau, formé par les arcs de grands cercles qui joignent quatre points fixes de la conique à un point quelconque de cette courbe, a un rapport anharmonique constant.

On sait en effet que, si du sommet C d'un triangle sphérique ABC on abaisse une perpendiculaire CD sur le côté opposé AB, le produit du sinus de ce côté par celui de l'arc perpendiculaire est égal au produit des sinus des deux autres côtés par le sinus de l'angle que ces côtés comprennent.

$$\sin AB . \sin CD = \sin CA . \sin CB . \sin ACB.$$

Soient donc AB, BC, CD et DA les côtés du quadrilatère inscrit qui a pour sommets les points fixes A, B, C et D de la conique. O étant un point quelconque de cette courbe, et E, F, G, H les pieds des arcs perpendiculaires abaissés de ce point sur les côtés du quadrilatère, nous aurons les quatre égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin AB . \sin OE &= \sin OA . \sin OB . \sin AOB,\\
\sin BC . \sin OF &= \sin OB . \sin OC . \sin BOC,\\
\sin CD . \sin OG &= \sin OC . \sin OD . \sin COD,\\
\sin DA . \sin OH &= \sin OA . \sin OD . \sin AOD.
\end{aligned}$$

Divisons maintenant la première de ces égalités par la deuxième, la troisième par la quatrième. Nous obtiendrons :

$$\frac{\sin AB . \sin OE}{\sin BC . \sin OF} = \frac{\sin OA . \sin AOB}{\sin OC . \sin BOC};$$

$$\frac{\sin CD.\ \sin OG}{\sin DA.\ \sin OH} = \frac{\sin OC.\ \sin COD}{\sin OA.\ \sin AOD}$$

Multiplions ces deux dernières expressions membre à membre. Il viendra :

$$\frac{\sin AOB.\ \sin COD}{\sin BOC.\ \sin AOD} = \frac{\sin OE.\ \sin OG}{\sin OF.\ \sin OH} \times \frac{\sin AB.\ \sin CD}{\sin BC.\ \sin DA}.$$

Le second membre de cette équation est constant. Le premier est le rapport anharmonique des arcs de grands cercles qui joignent le point O aux quatre points fixes A, B, C et D.

En conséquence, le faisceau formé par ces arcs a un rapport anharmonique constant. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous dirons, pour abréger, que ce rapport anharmonique est celui des points fixes de la conique.

Il résulte de ce qui précède que, dans l'hexagone inscrit (1 2 3 4 5 6), les faisceaux (1. 2 3 5 6) et (4. 2 3 5 6) ont des rapports anharmoniques égaux. On peut donc écrire :

$$(1.\ 2\ 3\ 5\ 6) = (4.\ 2\ 3\ 5\ 6)$$

ou

$$(1.\ 2\ 3\ 5\ 6) = (4.\ 3\ 2\ 6\ 5)$$

De ces égalités de rapports on peut conclure, par analogie aux coniques planes, que les arcs de grands cercles suivants concourent au même point : l'arc (23), l'arc (65) et celui qui contient les intersections de (61), (34) et de (12), (45).

Ce qui démontre l'hexagramme mystique relatif à la sphère.

La théorie des polaires réciproques (principe de dualité) qui s'applique aussi aux figures sphériques, comme il est facile de le faire voir, donne immédiatement la démonstration du théorème corrélatif de Brianchon.

Six points, pris sur une conique sphérique, donnent lieu, lorsqu'on les joint de toutes les manières possibles, à $\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}{12} = 60$ hexagones inscrits différents. Chacun de ces polygones, jouissant des propriétés indiquées précédemment, on est conduit de la sorte à 60 cercles de Pascal, se rapportant aux mêmes six points. Ces circonférences ne sont pas disposées d'une manière arbitraire sur la surface de la sphère. Elles se coupent trois par trois en vingt points (nous faisons abstraction des points diamétralement opposés), que nous appellerons, par analogie à la théorie des coniques planes, *points de Steiner*. Démontrons-le.

La conique considérée, étant circonscrite au quadrilatère (2 3 5 6), aura une équation de la forme :

$$(25)\,(36) + K''\,(23)\,(56) = 0.$$

Combinons-la avec chacunè des expressions déjà trouvées pour la même courbe ; nous aurons successivement :

$$(12)\,(34) - (25)\,(36) + (23)\,[K\,(14) - K''\,(56)] \equiv 0$$
$$(25)\,(36) - (45)\,(61) + (56)\,[K''\,(23) - K'\,(14)] \equiv 0$$

La première de ces identités indique que les points (12), (36); (34), (25) et (14), (56) sont situés sur la circonférence de grand cercle, représentée par l'équation :

$$K\,(14) - K''\,(56) = 0$$

La seconde fait voir que les points (45), (36) ; (61), (25) ; et (23), (14) se trouvent sur l'arc de grand cercle dont l'équation est :

$$K''\,(23) - K'\,(14) = 0$$

Nous arrivons ainsi à trois grands cercles dont les équations respectives sont :

$$\begin{aligned} K\,(23) - K'\,(56) &= 0 \\ K\,(14) - K''\,(56) &= 0 \\ K''(23) - K'\,(14) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplions ces égalités par les constantes $-K''$, K', K ; puis ajoutons les résultats. Nous tomberons sur l'identité :

$$0 \equiv 0.$$

Les plans des trois cercles en question passent donc par un même diamètre de la sphère. Les circonférences de ces cercles se rencontrent donc aux extrémités de ce diamètre. Or, ces lignes sont les cercles de Pascal des hexagones (1 2 3 4 5 6), (1 4 3 6 5 2), (1 6 3 2 5 4). L'existence des points de Steiner est donc confirmée.

La formation d'un tableau renfermant les soixante hexagones, disposés en vingt groupes correspondant aux vingt points de Steiner, n'offrirait aucune difficulté. Nous en laissons le soin au lecteur, tout en le renvoyant à l'excellent ouvrage de J. Steiner : Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften (2me édition, page 133).

L'analogie entre l'hexagramme mystique dans le plan et l'hexagramme mystique sur la sphère peut être poussée plus loin. Les points de Steiner sont, à leur tour, arrangés d'une manière spéciale. Ils se trouvent, quatre par quatre, sur quinze circonférences de grands cercles (nous faisons toujours abstraction des points diamétralement opposés qui, du reste, n'influent nullement sur le nombre de ces circonférences). Nous les appellerons les *cercles de Steiner*. La démonstration est tout aussi simple que les précédentes. Nous ne la ferons pas ici, cette communication ne pouvant dépasser certaines limites. Nous nous bornerons de même à énumérer les propriétés suivantes :

Chaque hexagone de Pascal, pris à part, possède, outre ses six côtés, neuf diagonales. La théorie des combinaisons apprend, en effet, que l'on peut joindre six points, deux à deux, de quinze manières différentes. Ces neuf diagonales donnent naissance à trois hexagones dont les cercles de Pascal se coupent dans un nouveau point, que nous appellerons *point de Kirkman*. Prenons un exemple. Soit l'hexagone (1 2 3 4 5 6) dont les côtés sont, suivant leur rang, (12), (23), (34), (45), (56) et (61). Les neuf diagonales seront les arcs de grands cercles (13), (14), (15), (24), (25), (26), (35), (36) et (46). Les cercles de Pascal des trois hexagones :

(1 3 5 2 6 4), (3 5 1 4 2 6) et (5 1 3 6 4 2)

se rencontrent, comme il est facile de s'en assurer, en un certain point (nous sous-entendons toujours le point diamétralement opposé).

Il existe donc autant de points de Kirkman que de cercles de Pascal, c'est-à-dire soixante. O. Hesse a fait voir qu'il y avait entre ces soixante points des relations qui ne sont que les réciproques de celles qui se rapportent aux cercles de Pascal. Les points de Kirkman sont situés, trois par trois, sur vingt circonférences de grands cercles, les *cercles de Cayley*. Ces derniers cercles passent, quatre par quatre, par quinze points, *les points de Salmon* (même remarque au sujet des points diamétralement opposés).

Ces considérations montrent que toutes les particularités qui caractérisent l'hexagramme mystique plan se retrouvent dans l'hexagramme sphérique. Il en serait de même du théorème de Brianchon.

Nous avons fait remarquer à diverses reprises qu'à chaque point de la surface de la sphère correspondait un point diamétralement opposé. Il semblerait donc, de prime abord, qu'il y eût une lacune dans l'analogie entre la sphère et le plan.

Cette lacune n'est qu'apparente. Une sphère à rayon infini se scinde en deux moitiés planes, dont l'une reste dans l'espace fini et l'autre s'en va à l'infini. Il en résulte que dans chaque couple de points diamétralement opposés, l'un des points est infiniment éloigné, mais n'en existe pas moins. L'analogie entre la géométrie sphérique et la géométrie plane ne subit donc aucune altération.

Nous nous arrêtons là pour aujourd'hui. Les relations que l'on peut déduire des théorèmes de Pascal et de Brianchon sont multiples et variées. Nous y reviendrons peut-être un jour. La géométrie de la sphère fait de grands progrès; il est de toute nécessité que nous soyons constamment au courant de ce qui se passe autour de nous, et s'il est un fait qui nous surprenne et nous afflige, c'est de voir combien peu nos manuels de géométrie tiennent compte des découvertes modernes. La plupart sont conçus dans un esprit de routine qui n'est plus de mode. Qui n'avance, recule ! Il faut un revirement dans notre manière de comprendre et d'enseigner la géométrie. Nous espérons que ce revirement se produira bientôt.

M. *Billeter* donne quelques détails sur la falsification des vins. Il arrive à la conclusion qu'il est inutile et même dangereux pour le législateur de vouloir poursuivre le commerce des vins artificiels, comme tels. On ne peut ni ne doit prohiber des procédés permettant de fournir des vins, à base de raisin, qui ne peuvent pas, dans la règle, être caractérisés par l'analyse comme des vins artificiels, mais qui, d'ailleurs, sont sains et, par leur prix, accessibles à tout le monde. L'analyse devra se borner à constater la qualité de ces boissons, au point de vue de leur influence sur la santé. Quant à la valeur d'un vin, le palais a été et sera toujours le meilleur juge.

Séance du 26 mai 1882.

Présidence de M. L. Coulon.

M. *L. Favre*, vice-président, lit la notice nécrologique suivante sur M. Desor.