Propriétés harmoniques des miroirs et des lentilles

Autor(en): **Isely, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société des Sciences Naturelles de Neuchâtel**

Band (Jahr): **21 (1892-1893)**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88324

PROPRIÉTÉS HARMONIQUES

DES MIROIRS ET DES LENTILLES

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

(Communication faite dans la séance du 9 février 1893)

En parcourant un grand nombre de traités de physique, notamment ceux de Lamé, de Ganot et de Jamin, nous avons été surpris de n'y trouver aucune application de la théorie si élégante des harmoniques à l'étude mathématique des miroirs et des lentilles. C'est une lacune à combler. Nous espérons que cette communication y contribuera quelque peu.

Rappelons, tout d'abord, les principaux résultats fournis par la méthode des harmoniques.

Soient trois quantités a, b, c, telles que $a > b > c$. On dit qu'elles sont en *proportion harmonique* lorsque l'excès de la première sur la deuxième est à l'excès de la deuxième sur la troisième comme la première est à la troisième. Par exemple, les nombres 6, 3 et 2 sont en proportion harmonique, car $\frac{6-3}{3-2} = \frac{6}{2}$. Cette expression est empruntée à l'acoustique. On sait, en effet, que les longueurs à donner à la corde d'un sonomètre pour rendre les trois notes de l'accord parfait majeur, *ut, mi, sol,* sont $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$, et ces nombres jouissent de la propriété ci-dessus indiquée.

La proportion harmonique $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$ peut se transformer ; elle donne alors naissance à une relation dont on reconnaîtra aisément l'importance. Faisant disparaître les dénominateurs, on trouve :

$$2ac = ab + bc$$

d'où, en divisant les deux membres par le produit *abc*,

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.$$

C'est une des formules capitales de l'optique. On en fait un usage fréquent dans la théorie des miroirs et des lentilles.

b est la *moyenne harmonique* entre a et c. Cette moyenne se calcule à l'aide de l'expression :

$$b=\frac{2\,ac}{a+c}.$$

On donne, par extension, le nom de *points harmoniques* à quatre points A, B, C, D, situés sur la même droite, et tels que les trois segments comptés à partir de l'un d'eux et terminés aux trois autres sont en proportion harmonique.

La géométrie et la physique nous offrent de nombreux exemples de points harmoniques. Tels sont les extrémités d'un côté d'un triangle et les points de rencontre de ce côté avec les bissectrices de l'angle opposé et de son supplément; — les centres de deux cercles et leurs centres de similitude directe et inverse; — le sommet et le centre de courbure d'un miroir sphérique, le point lumineux et le foyer, etc.

Lorsqu'il s'agit de quatre points de cette nature, la proportion harmonique peut s'écrire autrement. En y remplaçant les termes par leurs valeurs segmentaires, elle devient :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD},$$

ou, en tenant compte des signes des segments,

$$\frac{AC}{BC} = - \frac{AD}{BD}.$$

On dit alors que les points A et B divisent *harmoniquement* la distance CD, ou bien qu'ils sont *conjugués harmoniques* par rapport à C et à D. Réciproquement, ceux-ci sont conjugués harmoniques relativement à A et à B.

Toute division harmonique se compose ainsi de deux couples de points conjugués. Il résulte de la proportion précédente que ces couples se croisent, de façon que si le point C, par exemple, tombe entre A et B, son conjugué D se trouve au dehors, et *vice versa*. A et B se comportent de la même manière par rapport à C et à D (fig. 1).

Il est utile, pour la suite, d'examiner les diverses dispositions des points conjugués relativement les uns aux autres. A cet effet, les points A et B étant supposés fixes, voyons comment le point D se mouvra sur la droite AB, à mesure que son conjugué C se déplace sur la même ligne.

Supposons, tout d'abord, le point C à l'infini. Le rapport $\frac{AC}{BC}$ se réduira à l'unité, et par suite $\frac{AD}{BD} = - 1$, c'est-à-dire que D sera le milieu M du segment AB.

Ainsi le *conjugué harmonique du point de l'infini est le milieu de la distance des deux autres points conjugués.*

A mesure que C se rapprochera de B, le point D en fera de même ; et, lorsque C et B coïncideront, BC, et par suite BD, seront nuls tous les deux. Il y aura donc en B *superposition de trois points harmoniques.*

Le point mobile C passera ensuite à l'intérieur de AB ; son conjugué se trouvera alors à l'extérieur, du même côté que B par rapport au milieu M ; et, lorsque C *coïncidera avec M, le point D s'éloignera à l'infini.*

Le point C se mouvant entre M et A, le conjugué D reviendra de l'infini, du même côté que A par rapport à M (une droite, dans la géométrie moderne, n'a qu'un point à l'infini) ; et, lorsque C arrivera en A, D y arrivera en même temps. Il y aura donc de nouveau, à l'autre extrémité A du segment AB, *trois points harmoniques superposés.*

C se plaçant enfin à gauche de A, D restera entre A et M, et coïncidera de nouveau avec ce dernier lorsque C sera à l'infini.

Le point lumineux et le foyer conjugué d'un miroir sphérique se comportent exactement de la même manière, par rapport aux centres de courbure et de figure du miroir.

Lorsque trois points A, B, C sont donnés sur une droite, il est facile d'en trouver un quatrième D formant avec eux une division harmonique. On recourt, à cet effet, à une propriété du quadrilatère complet, d'après laquelle chaque diagonale est l'axe d'une division harmonique dont font partie deux sommets de la figure et deux points diagonaux. Il suffira donc de considérer A et B comme deux sommets et, C étant pris pour point diagonal, de construire le point diagonal correspondant, ce qui se fait au moyen de la règle seulement. On mène par A, par exemple (fig. 2), deux droites quelconques 1 et 2 que l'on coupe par une troisième 3, également quelconque, issue de C. On joint les points d'intersection à B par une quatrième et une cinquième droites 4 et 5, qui rencontrent les deux premières en deux nouveaux points. Joints l'un à l'autre, ces points nous donnent une sixième droite 6, qui va aboutir au point cherché D, conjugué harmonique de C. Cette construction, purement linéaire, est la plus usitée.

Toutes les considérations qui précèdent s'appliquent directement aux miroirs et aux lentilles.

Supposons, en premier lieu, un miroir sphérique *concave* de grande ouverture. On sait alors que les rayons réfléchis infiniment voisins se coupent en des points situés sur une courbe appelée *caustique*. Cette courbe a un point de rebroussement sur l'axe du miroir et, dans le cas où le point lumineux est à l'infini, elle se transforme en une épicycloïde. *Petit* a indiqué un moyen assez simple de construire cette courbe par points. Soit PA un rayon incident (fig. 3) d'une longueur égale à p; soient, en outre, $AB = 4a$ le segment intérieur de ce rayon, et p' la distance de A au point M de la caustique sur le rayon réfléchi.

On démontre aisément que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}$$

ou

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{2a},$$

Fig. 1.

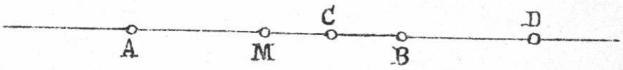


Fig. 2.

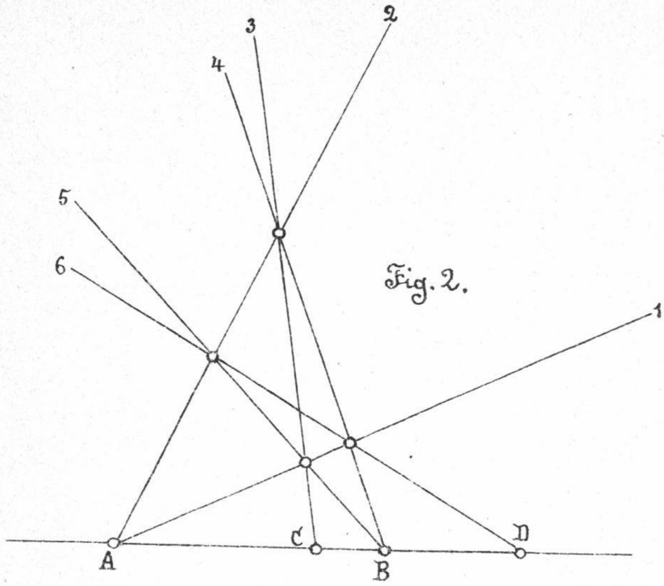


Fig. 3.

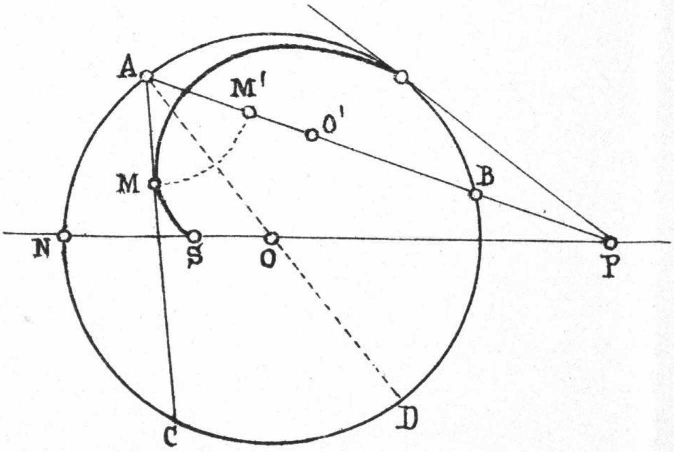
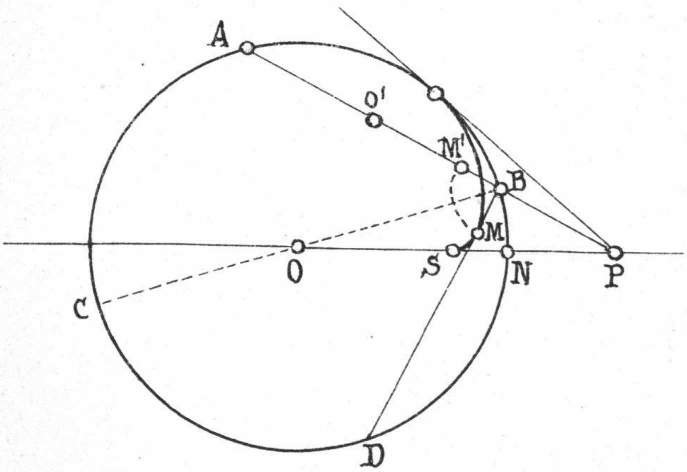


Fig. 4.



$2a$ étant la moitié du segment intérieur du rayon incident. Il suffira donc de mesurer p et a, et l'on déduira de la formule précédente la valeur de p', et, par suite, la position du point M de la caustique. Le point de rebroussement S se construirait de la même manière ; le rayon incident étant alors dirigé suivant l'axe du miroir, on a $2a = r$, le rayon de courbure. La longueur p' est donc donnée par la formule :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}.$$

Telle est la méthode de Petit, généralement mentionnée dans les traités d'optique. Il nous semble que la construction suivante, purement géométrique, est plus avantageuse.

Comparant la relation qui caractérise les points de la caustique, et que l'on peut à juste titre considérer comme son équation, à la formule :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b},$$

déduite de la proportion harmonique, on voit que les quantités p, p' et $2a$, ou r, sont en proportion harmonique, $2a$ ou r étant la *moyenne harmonique* entre p et p'. Désignons donc par O′ le milieu de la corde AB; les points A, O′, M′, P sont harmoniques, M′ étant l'extrémité du segment $AM' = AM = p'$. A et O′ sont conjugués, ainsi que P et M′. Connaissant les trois points A, O′ et P, on déterminera linéairement le quatrième harmonique M′, qu'on ramènera à l'aide d'un arc de cercle sur le rayon réfléchi, en M. M sera un point de la caustique. Les autres points de cette courbe s'obtiendront de la même façon. En particulier, le point de rebroussement S sera le conjugué de P, par rapport aux centres de courbure et de figure du miroir.

Considérons, en second lieu, un miroir concave de petite ouverture, c'est-à-dire dont l'angle au centre ne dépasse pas 8 ou 9°. La caustique se réduit alors à un point, et S se nomme le *foyer conjugué* du point P. Le foyer est donc, comme dans le cas précédent, le conjugué harmonique du point éclairant, par rapport aux centres du miroir, et se construit aussi à l'aide du quadrilatère complet.

Soient O et N les centres de courbure et de figure du miroir (fig. 3), P le point lumineux et S son foyer conjugué, ou son image. Ces quatre points, étant harmoniques, pourront prendre l'une ou l'autre des positions que nous avons indiquées précédemment. Nous aurons donc les cas suivants:

1° Le point lumineux P est à l'infini, c'est-à-dire que les rayons incidents sont parallèles à l'axe. L'image sera le milieu de la distance des centres O et N ; on l'appelle alors *foyer principal.*

2° Le point lumineux se rapproche du centre de courbure; l'image s'approche de ce point en même temps, et lorsque le point lumineux coïncide avec O, l'image coïncide avec lui. Il y a au centre de courbure trois points harmoniques superposés.

3° P est entre le centre et le foyer principal, l'image se fait alors de l'autre côté du centre.

4° Le point lumineux est au foyer principal. L'image est rejetée à l'infini, c'est-à-dire que les rayons réfléchis sont parallèles à l'axe.

5° Le point P est entre le foyer principal et le sommet du miroir; son conjugué se trouve alors de l'autre côté du sommet, et l'image est *virtuelle*.

6° Le point lumineux coïncide avec le sommet N, ou le centre de figure. L'image coïncide aussi avec ce point.

7° P passe de l'autre côté du sommet; le miroir devient *convexe*, et l'image, se faisant entre le sommet et le foyer principal, est toujours *virtuelle*.

On peut donc répéter sur les miroirs sphériques convexes l'étude que nous venons de faire au sujet des miroirs concaves. Les points de la caustique se construisent comme précédemment (fig. 4). Ces points sont virtuels.

Lorsque l'angle au centre du miroir est suffisamment petit, la caustique se réduit sensiblement à un point. On peut dire alors que ce point est un foyer virtuel unique. Sa distance p' au sommet du miroir se calcule au moyen de l'expression :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{2}{r}.$$

Les lentilles donnent lieu à des considérations du même genre.

On sait que, si les surfaces qui limitent une lentille ne sont pas de petites portions des sphères dont elles font partie, le lieu des intersections successives des rayons émergents est une courbe, appelée *diacaustique,* analogue à la caustique par réflexion ou *catacaustique*[1]. De là résulte une cause de confusion

[1] Ces courbes, découvertes par *Tschirnhausen*, en 1682, ont été tout spécialement étudiées par *Malus* et *Sturm*.

des images, à laquelle les physiciens donnent le nom d'*aberration de sphéricité*, et dont ils diminuent les effets en plaçant, devant la lentille, un diaphragme découpé de manière à intercepter les rayons venant des bords.

La diacaustique a un point de rebroussement et, dans le cas particulier où l'ouverture de la lentille ne dépasse pas 10 à 12 degrés, elle se réduit à ce point, c'est-à-dire que les rayons émergents vont très sensiblement concourir en un point, réel ou virtuel, appelé *foyer*.

Considérons tout d'abord un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal; le point où vont concourir les rayons émergents est le *foyer principal*. Nous le désignerons par F. Sa distance à la lentille est la *distance focale principale f*. Cette distance se détermine par l'expression:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

n étant l'*indice de réfraction* de la substance de la lentille, r et r' ses rayons de courbure.

Dans les lentilles ordinaires, qui sont de *crown-glass*, verre dont l'indice est sensiblement égal à $\frac{3}{2}$, la formule ci-dessus se réduit à

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

La distance focale principale peut donc, dans ce cas, être considérée comme la *moyenne harmonique* entre les deux rayons de courbure de la lentille. Cette remarque permet de trouver une construction géométrique très simple du foyer principal.

Dans le cas, plus spécial encore, où les rayons r et r' sont égaux, la lentille prend une forme régulière ou symétrique et l'on a:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{r}.$$

Le foyer principal coïncide donc très *approximativement* avec l'un des centres de courbure.

Considérons maintenant un point P, situé sur l'axe principal, à une distance p du centre optique de la lentille. Les rayons, issus de ce point, viennent sensiblement concourir en un point, réel ou virtuel, qui est le *foyer conjugué* P′ de P, et réciproquement. Soit p' sa distance au centre de la lentille.

Il existe, comme on le démontre en physique, une relation entre p, p' et f. Cette relation, qui est *harmonique,* est la suivante:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

C'est l'*équation aux foyers conjugués.*

Il résulte de là que $2f$ est *moyenne harmonique* entre p et p'. Ainsi *le double de la distance focale principale est égal à la moyenne harmonique des distances focales conjuguées.*

Dans le cas où $f = r$, la formule précédente deviendrait:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}.$$

C'est ce qui arrive, comme nous l'avons dit plus haut, dans les lentilles régulières faites de *crown.*