Recherches sur le calcul des forces perturbatrices dans la théorie des perturbations séculaires

Séance du 21 novembre 1895

RECHERCHES

sur le calcul des forces perturbatrices dans la théorie des perturbations séculaires

PAR LE Dr LOUIS ARNDT

Dans ses recherches intitulées : *Determinatio attractionis quam in punctum*, etc., Gauss a établi un théorème qui permet de déterminer les perturbations séculaires des éléments de l'orbite d'un corps céleste, si l'on ne considère que la première puissance des masses. Il suppose que la masse du corps produisant la perturbation est distribuée sur son orbite de telle manière que chaque élément d'arc reçoit une partie de la masse proportionnelle au temps pendant lequel la planète reste dans cet élément. L'expression de l'attraction de cette masse, exercée sur un autre corps céleste, représente la partie séculaire des perturbations.

Si ds désigne un élément d'arc, m_1 la masse du corps perturbateur, U_1 la durée de révolution, r_1 le rayon vecteur et v_1 la vitesse instantanée, le potentiel de cette distribution de masse peut être représenté par l'expression suivante :

$$\int \frac{ds}{r_1} \cdot \frac{m_1}{U_1 v_1},$$

dans laquelle l'intégrale doit être étendue à tout le tour de l'ellipse. Les dérivées partielles de ce potentiel représentent les composantes de l'attraction. En remplaçant l'anomalie excentrique par une autre variable d'intégration, on peut donner à ces composantes une forme complètement intégrable. Pour obtenir ces expressions, on a besoin chaque fois de résoudre une équation du troisième degré. La résolution n'est pas difficile, mais devient très incommode si l'on doit calculer les composantes un grand nombre de fois pour les différentes parties de l'orbite. Les recherches suivantes montrent qu'on peut éviter la résolution de cette équation et représenter les composantes de la force perturbatrice par l'expression :

$$A\omega + B\eta,$$

où A et B sont des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation du troisième degré, et où ω et η sont les périodes des fonctions elliptiques de la première et de la deuxième espèce. Les périodes peuvent être exprimées par des séries hypergéométriques, dans lesquelles la variable est l'invariant absolu des fonctions elliptiques. Pour faciliter le calcul numérique des forces perturbatrices, j'ai ajouté à ces recherches une table assez étendue qui donne ces séries hypergéométriques pour toutes les valeurs de variables entre 0,000 et 1,000.

Soient R, U, Z les composantes de la force perturbatrice; R agissant dans la direction du rayon vecteur r du corps perturbateur, positive si r est augmenté; U perpendiculaire au rayon vecteur, positive dans la direction du mouvement; Z perpendiculaire au plan de l'orbite. ☊ désigne la longueur du nœud, i l'inclinaison de l'orbite sur une écliptique fixe, a le demi-grand axe, e l'excentricité, μ le mouvement moyen diurne, ω la distance angulaire du périhélie du nœud ascendant et $u = \omega + v$; v, E, M l'anomalie vraie, excentrique et moyenne.

D'après la méthode de la variation des constantes, on trouve les équations suivantes :

$$\sin i \, . \, (\delta \Omega)' = \frac{a\mu \sec \varphi}{1 + m} \, r \sin u \, . \, Z$$

$$(\delta i)' = \frac{a\mu \sec \varphi}{1 + m} \, r \cos u \, . \, Z$$

$$(\delta e)' = \frac{a^2 \mu \cos \varphi}{1 + m} \left\{ \sin v \, . \, R + (\cos v + \cos E) \, U \right\}$$

$$e(\delta \omega_1)' = \frac{a^2 \mu \cos \varphi}{1 + m} \left\{ - \cos v \, . \, R + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin v U \right\}$$

$$(\delta \omega)' = (\delta \omega_1)' - \cos i \, (\delta \Omega)'$$

$$(\delta \mu)' = - \frac{3 a^2 \mu^2}{(1 + m) \cos \varphi} \left\{ e \sin v \, . \, R + \frac{p}{r} \, U \right\}$$

$$(\delta M)' = - \frac{2 a \mu}{1 + m} \, r \, . \, R + \int (\delta \mu)' \, dt$$

Dans ces formules, les composantes de la force perturbatrice contiennent la masse m_1 du corps perturbateur, mais non multipliée par k^2 (constante du système solaire).

On voit que ces équations différentielles sont de la forme :

$$(\delta c_i)' = \Phi_1 R + \Phi_2 U + \Phi_3 Z,$$

où les quantités Φ ne dépendent pas des éléments du corps perturbateur.

Les trois composantes R, U, Z sont fonctions de l'anomalie moyenne et peuvent être développées, d'après la théorie des séries de Fourier, en séries des *sinus* et *cosinus* des multiples de M et M_1. Les termes de ces séries, qui sont indépendants de M et M_1, donnent la partie séculaire des perturbations, de sorte qu'on a pour la variation séculaire de chaque élément :

$$\delta e_i = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_1 R + \Phi_2 U + \Phi_3 Z)\, dM . dM_1 .$$

Si l'on désigne par J l'inclinaison des deux orbites et par K et K_1 la distance entre leur point d'intersection et l'écliptique, on a les équations :

$$\sin \frac{1}{2} J . \sin \frac{1}{2} (K + K_1) = \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) . \sin \frac{1}{2} (i_1 + i)$$

$$\sin \frac{1}{2} J . \cos \frac{1}{2} (K + K_1) = \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) . \sin \frac{1}{2} (i_1 - i)$$

$$\cos \frac{1}{2} J . \sin \frac{1}{2} (K - K_1) = \sin \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) . \cos \frac{1}{2} (i_1 + i)$$

$$\cos \frac{1}{2} J . \cos \frac{1}{2} (K + K_1) = \cos \frac{1}{2} (\Omega_1 - \Omega) . \cos \frac{1}{2} (i_1 - i)$$

Soient L_1 et B_1 la longitude et la latitude du corps perturbateur par rapport au plan de l'orbite de l'autre corps, on a, en posant $\Pi + v = l$:

$$\xi_1 = r_1 B_1 \cos(L_1 - l), \quad \eta_1 = r_1 \cos B_1 \sin(L_1 - l), \quad \zeta_1 = r_1 \sin B_1 .$$

puis :

$$\begin{aligned} \cos B_1 . \cos L_1 &= \cos(\Pi_1 + v_1) \\ \cos B_1 . \sin L_1 &= \sin(\Pi_1 + v_1) \cos J \\ \sin B_1 &= \sin(\Pi_1 + v_1) \sin J \end{aligned}$$

Pour simplifier les formules, nous poserons :

$$
\begin{aligned}
-\sin \Pi_1 . \cos J &= A . \sin A' ; & -\sin \Pi_1 &= B \sin B' \\
\cos \Pi_1 &= A \cos A' ; & \cos \Pi_1 . \cos J &= B \cos B' \\
A\, a_1 \cos (A' + \Pi + v) &= A_c ; & B a_1 \cos \varphi_1 \sin (B' + \Pi + v) &= A_s \\
-A a_1 \sin (A' + \Pi + v) &= B_c ; & B a_1 \cos \varphi_1 \cos (B' + \Pi + v) &= B_s \\
a_1 \sin \Pi_1 \sin J &= C_c ; & a_1 \cos \varphi_1 \cos \Pi_1 \sin J &= C_s
\end{aligned}
$$

Ensuite des équations :

$$r_1 \cos v_1 = a_1 (\cos E_1 - e_1), \qquad r_1 \sin v_1 = a_1 \cos \varphi_1 \sin E_1$$

les trois coordonnées peuvent être représentées par les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= A_c (\cos E_1 - e_1) + A_s \sin E_1 \\
\eta_1 &= B_c (\cos E_1 - e_1) + B_s \sin E_1 \\
\zeta_1 &= C_c (\cos E_1 - e_1) + C_s \sin E_1
\end{aligned}
$$

et le carré de la distance des deux corps célestes :

$$\Delta^2 = (\xi_1 - r)^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$$

prend la forme :

$$\Delta^2 = A_o - 2 B_o \cos (\varepsilon - E_1) + C_o \cos^2 E_1$$

où l'on a posé :

$$
\begin{aligned}
a_1{}^2 + r^2 + 2 e_1 r A_c &= A_o , & e_1 a_1{}^2 + r A_c &= B_o \cos \varepsilon \\
r . A_s &= B_o \sin \varepsilon , & a_1{}^2 e_1{}^2 &= C_o .
\end{aligned}
$$

Après avoir remplacé l'anomalie moyenne par l'anomalie excentrique, les composantes de la force perturbatrice sont de la forme :

$$R, U, Z = \frac{f(E_1)}{\Delta^3} .$$

Comme on l'a déjà mentionné plus haut, l'intégration par rapport à l'anomalie excentrique du corps perturbateur peut être exécutée. Après l'avoir effectuée, c'est-à-dire après avoir formé les expressions :

$$R_0 = \frac{1}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} R\,(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1$$

$$U_0 = \frac{1}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} U\,(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1$$

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} Z\,(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1$$

les variations des éléments :

$$\delta c_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Phi_1 R_0 + \Phi_2 U_0 + \Phi_3 Z_0)\, dE$$

s'obtiennent par la quadrature mécanique.

Il s'agit maintenant de former les expressions des quantités R_0, U_0, Z_0. D'après Gauss, nous introduisons T comme nouvelle variable d'intégration par les équations :

$$\begin{aligned} N \cos E_1 &= \alpha + \alpha_1 \sin T + \alpha_2 \cos T \\ N \sin E_1 &= \beta + \beta_1 \sin T + \beta_2 \cos T \\ N &= \gamma + \gamma_1 \sin T + \gamma_2 \cos T \end{aligned}$$

Les neuf quantités α, β, γ doivent être des cofficients réels, si l'on donne à la variable T des valeurs réelles; on a donc l'équation suivante :

$$(\alpha + \alpha_1 \sin T + \alpha_2 \cos T)^2 + (\beta + \beta_1 \sin T + \beta_2 \cos T)^2 \\ - (\gamma + \gamma_1 \sin T + \gamma_2 \cos T)^2 = 0$$

Comme cette expression doit être indépendante de la valeur de T, il faut qu'elle soit identique avec l'expression :

$$k(\cos^2 T + \sin^2 T - 1).$$

Cette condition sera remplie si les coefficients α, β, γ satisfont aux relations suivantes, en posant $k = 1$:

$$\begin{array}{ll} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 1\,; & \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \gamma\gamma_1 = 0 \\ {\alpha_1}^2 + {\beta_1}^2 - {\gamma_1}^2 = 1\,; & \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 - \gamma\gamma_2 = 0 \\ {\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2 - {\gamma_2}^2 = 1\,; & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2 = 0 \end{array} \quad \cdot \cdot \quad 1$$

D'autre part, il faut que l'expression :

$$(\alpha \cos E_1 + \beta \sin E_1 - \gamma)^2 - (\alpha_1 \cos E_1 + \beta_1 \sin E_1 - \gamma_1)^2 \\ - (\alpha_2 \cos E_1 + \beta_2 \sin E_1 - \gamma_2)^2 = 0$$

soit identique avec l'expression :

$$k(\cos^2 E_1 + \sin^2 E_1 - 1),$$

de sorte qu'on trouve les relations :

$$\begin{array}{ll} \alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = -1\,; & \alpha\beta - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = 0 \\ \beta^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 = -1\,; & \alpha\gamma - \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 = 0 \\ \gamma^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 = +1\,; & \beta\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2 = 0 \end{array} \quad \cdot \cdot \cdot \quad 2$$

Pour obtenir encore d'autres relations, on dispose des neuf coefficients de telle manière que le carré de la distance entre les deux corps célestes soit donné par l'expression suivante :

$$N^2 \Delta^2 = G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T.$$

Par suite de cette équation,

$$G\alpha^2 - G_1\alpha_1^2 + G_2\alpha_2^2 = C_0; \quad G\alpha\beta - G_1\alpha_1\beta_1 + G_2\alpha_2\beta_2 = 0$$

$$G\beta^2 - G_1\beta_1^2 + G_1\beta_2^2 = 0; \quad G\alpha\gamma - G_1\alpha_1\gamma_1 + G_2\alpha_2\gamma_2 = B_0\cos\varepsilon \qquad 3$$

$$G\gamma^2 - G_1\gamma_1^2 + G_2\gamma_2^2 = A_0; \quad G\beta\gamma - G_1\beta_1\gamma_1 + G_2\beta_2\gamma_2 = B_0\sin\varepsilon$$

Si l'on ordonne ces six équations en trois groupes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \alpha . G\alpha - \alpha_1 . G_1\alpha_1 + \alpha_2 . G_2\alpha_2 &= C_0 \\ \beta . G\alpha - \beta_1 . G_1\alpha_1 + \beta_2 . G_2\alpha_2 &= 0 \qquad \cdots\cdots 4 \\ \gamma . G\alpha - \gamma_1 . G_1\alpha_1 + \gamma_2 . G_2\alpha_2 &= B_0\cos\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha . G\beta - \alpha_1 . G_1\beta_1 + \alpha_2 . G_2\beta_2 &= 0 \\ \beta . G\beta - \beta_1 . G_1\beta_1 + \beta_2 . G_2\beta_2 &= 0 \qquad \cdots\cdots 5 \\ \gamma . G\beta - \gamma_1 . G_1\gamma_1 + \gamma_2 . G_2\beta_2 &= B_0\sin\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha . G\gamma - \alpha_1 . G_1\gamma_1 + \alpha_2 . G_2\gamma_2 &= B_0\cos\varepsilon \\ \beta . G\gamma - \beta_1 . G_1\gamma_1 + \beta_2 . G_2\gamma_2 &= B_0\sin\varepsilon \qquad \cdots\cdots 6 \\ \gamma . G\gamma - \gamma_1 . G_1\gamma_1 + \gamma_2 . G_2\gamma_2 &= A_0 \end{aligned}$$

et si l'on multiplie les équations de chaque groupe respectivement par $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, on tire de chaque groupe les équations :

$$\begin{aligned} G\alpha &= - C_0\alpha + \gamma B_0\cos\varepsilon \\ G\beta &= \gamma B_0\sin\varepsilon \qquad \cdots\cdots 7 \\ G\gamma &= - \alpha B_0\cos\varepsilon - \beta B_0\sin\varepsilon + \gamma A_0 \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} G_1\alpha_1 &= - \alpha_1 C_0 + \gamma_1 B_0\cos\varepsilon \\ G_1\beta_1 &= \gamma_1 B_0\sin\varepsilon \qquad \cdots\cdots 8 \\ G_1\gamma_1 &= - \alpha_1 B_0\cos\varepsilon - \beta_1 B_0\sin\varepsilon + \gamma_1 A_0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} - G_2\alpha_2 &= - \alpha_2 C_0 + \gamma_2 B_0\cos\varepsilon \\ - G_2\beta_2 &= \gamma_2 B_0\sin\varepsilon \qquad \cdots\cdots 9 \\ - G_2\gamma_2 &= - \alpha_2 B_0\cos\varepsilon - \beta_2 B_0\sin\varepsilon + \gamma_2 A_0 \end{aligned}$$

En combinant ces trois systèmes d'équations, on obtient une équation du troisième degré, savoir :

$$x\left\{(x - A_0)(x + C_0) + B_0^2\right\} + B_0^2 C_0 \sin^2 E = 0$$

ou :

$$x^3 - P_1 x + P_2 x - P_3 = 0\,,$$

en posant :

$$P_1 = A_0 - C_0\,, \qquad P_2 = B_0^2 - A_0 C_0\,, \qquad - P_3 = C_0 B_0^2 \sin^2 E\,.$$

Les racines G, G_1, G_2 de cette équation sont réelles (G et G_1 positives, et G_2 négative).

Pour les composantes de la force perturbatrice, nous avions trouvé les expressions :

$$m_1 . R_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{A_c(\cos E_1 - e_1) + A_s \sin E_1 - r\right\}(1 - e_1 \cos E_1)\frac{dE_1}{\Delta^3}$$

$$m_1\, U_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{B_c(\cos E_1 - e_1) + B_s \sin E_1 - r\right\}(1 - e_1 \cos E_1)\frac{dE_1}{\Delta^3}$$

$$m_1\, Z_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{C_c(\cos E_1 - e_1) + C_s \sin E_1 - r\right\}(1 - e_1 \cos E_1)\frac{dE_1}{\Delta^3}$$

En remplaçant la variable E_1 par la nouvelle variable T, chacune de ces expressions se présente sous la forme :

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Gamma + \Gamma_1 \sin^2 T + \Gamma_2 \cos^2 T}{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^{3/2}}\, dT$$

où l'on a posé :

$$\Gamma = f.\gamma^2 + b.\alpha\gamma + h.\beta\gamma - d.\alpha\beta - l.\alpha^2$$
$$\Gamma_1 = f.\gamma_1^2 + b.\alpha_1\gamma_1 + h.\beta_1\gamma_1 - d.\alpha_1\beta_1 - l.\alpha_1^2$$
$$\Gamma_2 = f.\gamma_2^2 + b.\alpha_2\gamma_2 + h.\beta_2\gamma_2 - d.\alpha_2\beta_2 - l.\alpha_2^2$$

les coefficients f, b, etc., prennent les valeurs :

$$\begin{array}{lll}
\text{pour } R_0 & U_0 & Z_0 \\
f = -A_c e_1 - r, & -B_c e_1, & -C_c e_1 \\
b = A_c(1 + e_1^2) + re_1, & B_c(1 + e_1^2), & C_c(1 + e_1^2) \\
h = A_s, & B_s, & C_s \\
d = A_s e_1, & B_s e_1, & C_s e_1 \\
l = A_c e_1, & B_c e_1, & C_c e_1
\end{array}$$

Si l'on pose :

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T}},$$

on a :

$$\frac{\partial W}{\partial G} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = +\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 T . dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 T . dT}{\sqrt{(G - G_1 \sin^2 T + G_2 \cos^2 T)^3}}$$

et l'expression V se réduit à :

$$V = -\frac{1}{\pi}\left(\Gamma \frac{\partial W}{\partial G} - \Gamma_1 \frac{\partial W}{\partial G_1} + \Gamma_2 \frac{\partial W}{\partial G_2}\right).$$

Il s'agit maintenant d'exprimer ces dérivées partielles par les intégrales elliptiques complètes.

Dans ce but, je pose :

$$\sin^2 T = t \quad \text{et} \quad \frac{G_1 + G_2}{G + G_2} = k^2 \quad \text{(module)};$$

il en résulte pour les limites de l'intégrale :

$$t = o \quad \text{pour} \quad T = o$$
$$t = +1 \quad \text{pour} \quad T = \frac{\pi}{2}$$

et comme :
$$dT = \frac{1}{2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}},$$

on a :

$$\frac{\partial W}{\partial G} = +\frac{1}{2} \frac{1}{(G+G_2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(G+G_2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{t.dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)^3}}$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = +\frac{1}{2} \frac{1}{(G+G_2)^{3/2}} \int_0^1 \frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)^3}}$$

Afin de pouvoir effectuer l'intégration à l'aide des fonctions de Weierstrass, je pose :

$$\frac{1}{1-k^2t} = -m(s-G)$$
$$\frac{t}{1-k^2t} = -m_1(s-G_1)$$
$$\frac{1-t}{1-k^2t} = -m_2(s+G_2)$$

où la quantité s désigne une nouvelle variable et les coefficients m, m_1, m_2 représentent des constantes arbitraires dont je puis disposer.

Par différentiation de ces équations, on obtient :

$$\frac{k^2dt}{(1-k^2t)^2} = -m\,ds; \qquad \frac{dt}{(1-k^2t)^2} = -m_1\,ds;$$
$$\frac{(k^2-1)\,dt}{(1-k^2t)^2} = -m_2ds$$

Il résulte de ces équations que :

$$m_1 = m \,.\, \frac{G + G_2}{G_1 + G_2}, \quad m_2 = m \,.\, \frac{G_1 - G}{G_1 + G_2}$$

$$t = \frac{G + G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{s - G_1}{s - G}$$

et l'on obtient pour les limites de l'intégrale :

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \ldots\ldots s = G_1 \\ t &= +1 \ldots\ldots s = -G_2 \end{aligned}$$

Si je fais maintenant :

$$m = \frac{1}{G - G_1}, \quad (G + G_2)(G - G_1)(G_1 + G_2) = C$$

et :

$$\sqrt{4(s - G)(s - G_1)(s + G_2)} = \sqrt{S},$$

on a :

$$\frac{\partial W}{\partial G} = + \frac{G_1 + G_2}{C} \int_G^{-G_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} (s - G)$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = - \frac{G + G_2}{C} \int_G^{-G_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} (s - G_1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = + \frac{G_1 - G}{C} \int_G^{-G_2} \frac{ds}{\sqrt{S}} (s + G_2)$$

En introduisant l'intégrale elliptique de la première espèce :

$$u = \int_{\wp u}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}}$$

comme nouvelle variable et en considérant les formules :

$$s - G = \wp u - e_1, \qquad s - G_1 = \wp u - e_2, \qquad s + G_2 = \wp u - e_3$$

et $\quad s = \wp u, \quad \wp\omega = e_1, \quad \wp(\omega + \omega') = e_2, \quad \wp\omega' = e_3$

on obtient

$$\frac{C}{G_1 + G_2} \frac{\partial W}{\partial G} = -\int_{\omega'}^{\omega+\omega'} (\wp u - e_1)\, du = -\left(e_1 \omega + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega + \omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')\right)$$

$$\frac{C}{G + G_2} \frac{\partial W}{\partial G_1} = -\int_{\omega'}^{\omega+\omega'} (\wp u - e_2)\, du = -\left(e_2 \omega + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega + \omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')\right)$$

$$\frac{C}{G_1 - G} \frac{\partial W}{\partial G_2} = -\int_{\omega'}^{\omega+\omega'} (\wp u - e_3)\, du = -\left(e_3 \omega + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega + \omega') - \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega')\right)$$

où $\wp$ et σ désignent les fonctions weierstrassiennes, et ω, ω', η et η' les périodes des fonctions elliptiques. D'après la théorie des fonctions σ, on a les relations :

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega + \omega') = \eta + \eta', \qquad \frac{\sigma'}{\sigma}\omega' = \eta'$$

de sorte qu'on obtient finalement pour les trois dérivées :

$$\frac{\partial W}{\partial G} = -\frac{G_1 + G_2}{C}(e_1 \omega + \eta)$$
$$\frac{\partial W}{\partial G_1} = +\frac{G + G_2}{C}(e_2 \omega + \eta)$$
$$\frac{\partial W}{\partial G_2} = -\frac{G_1 - G}{C}(e_3 \omega + \eta)$$

et pour les composantes de la force perturbatrice :

$$V = \frac{2}{\pi}\left\{\Gamma \frac{G_1 + G_2}{C}(e_1 \omega + \eta) + \Gamma_1 \frac{G + G_2}{C}(e_2 \omega + \eta) \right.$$
$$\left. + \Gamma_2 \frac{G_1 - G}{C}(e_3 \omega + \eta)\right\}$$

Les trois quantités e doivent remplir la condition suivante :

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

et si l'on pose :

$$G_1 + G_1 - G_2 = P_1$$

on a :

$$e_1 = G - \frac{1}{3} P_1, \quad e_2 = G_1 - \frac{1}{3} P_1, \quad e_3 = - G_2 - \frac{1}{3} P_1$$

Pour simplifier la formule, je pose encore :

$$\Lambda = (G_1 + G_2)\Gamma + (G + G_2)\Gamma_1 + (G_1 - G)\Gamma_2$$

et

$$\Theta = (G_1 + G_2) G\Gamma + (G + G_2) G_1 \Gamma_1 - (G_1 - G) G_2 \Gamma_2,$$

de sorte qu'on a :

$$V = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda}{C}\left(\eta - \omega\frac{P_1}{3}\right) + \omega\frac{\Theta}{C}\right\}.$$

Les quantités Θ et Λ contiennent encore les racines de l'équation cubique, qui doivent être exprimées par les coefficients de cette équation. Dans ce but, on forme les expressions suivantes :

$$A_1 = - \Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2$$
$$B_1 = G\Gamma - G_1\Gamma_1 + G_2\Gamma_2$$
$$C_1 = \frac{\Gamma}{G} - \frac{\Gamma}{G_1} + \frac{\Gamma_2}{G_2};$$

$$G + G_1 - G_2 = P_1$$
$$GG_1 - GG_2 - G_1 G_2 = P_2$$
$$GG_1 G_2 = P_3$$

D'après les formules de la page 11, on a :

$$A_1 = f(-\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2) + b(-\alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)$$
$$+ h(-\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) - d(-\alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$$
$$- l(-\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2),$$

expression qui se réduit à :

$$A_1 = -f - l$$

si l'on prend en considération les formules de la page 12; on obtient pour les trois composantes :

$$A_1 = +r, \quad 0, \quad 0.$$

Les mêmes formules donnent pour la seconde quantité B_1 l'expression suivante :

$$\begin{aligned} B_1 = f(G\gamma^2 - G_1\gamma_1^2 + G_2\gamma_2^2) + b\,(G\alpha\gamma - G_1\alpha_1\gamma_1 + G_2\alpha_2\gamma_2) \\ + h\,(G\beta\gamma - G_1\beta_1\gamma_1 + G_2\beta_2\gamma_2) - d\,(G\alpha\beta - G_1\alpha_1\beta_1 + G_2\alpha_2\beta_2) \\ - l\,(G\alpha^2 - G_1\alpha_1^2 + G_2\alpha_2^2); \end{aligned}$$

qui se réduit à :

$$B_1 = f.A_0 + b.B_0\cos\varepsilon + hB_0\sin\varepsilon - l.C_0.$$

Cette équation paraît la plus commode pour le calcul numérique des quantités B_1^{R} et B_1^{Z}; pour calculer la troisième quantité B_1^{U}, il est préférable d'introduire les valeurs primitives, de sorte qu'on obtient :

$$B_1^{\mathrm{U}} = -\frac{1}{2}r.a_1^2\cos^2\varphi_1\sin^2 J.\sin 2(\Pi + v) - r^2 e_1 B_c.$$

Il nous reste encore à transformer l'expression de la quantité C_1, savoir :

$$\begin{aligned} C_1 = f\left(\frac{\gamma^2}{G} - \frac{\gamma_1^2}{G_1} + \frac{\gamma_2^2}{G_2}\right) \quad + b\left(\frac{\alpha\gamma}{G} - \frac{\alpha_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{G_2}\right) \\ + h\left(\frac{\beta\gamma}{G} - \frac{\beta_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\beta_2\gamma_2}{G_2}\right) - d\left(\frac{\alpha\beta}{G} - \frac{\alpha_1\beta_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{G_2}\right) \\ - l\left(\frac{\alpha^2}{G} - \frac{\alpha_1^2}{G_1} + \frac{\alpha_2^2}{G_2}\right) \end{aligned}$$

Dans ce but, je multiplie la première des équations, page 10 :

$$G\alpha^2 - G_1\alpha_1^2 + G_2\alpha^2 = C_0$$

par l'équation :

$$G + G_1 - G_2 = P_1$$

puis l'équation :

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha^2 = +1$$

par :

$$GG_1 - GG_2 - G_1G_2 = P_2$$

On obtient par l'addition des produits l'équation suivante :

$$\alpha^2 G_1 G_2 - \alpha_1^2 GG_2 + \alpha_2^2 GG_1 = + P_2 + P_1 C_0 + \alpha_2^2 G_2^2 + \alpha_1^2 G_1^2 - \alpha^2 G^2$$

Les trois termes au carré du second membre de cette équation peuvent être remplacés par des quantités connues, en multipliant les équations :

$$\begin{aligned} G\alpha &= - C_0\alpha + B_0 \cos \varepsilon.\gamma \text{ par } - G\alpha \\ G_1\alpha_1 &= - C_0\alpha_1 + B_0 \cos \varepsilon.\gamma_1 \text{ par } \quad G_1\alpha_1 \\ G_2\alpha_2 &= + C_0\alpha_2 - B_0 \cos \varepsilon.\gamma_2 \text{ par } \quad G_2\alpha_2 \end{aligned}$$

et en additionnant les produits :

$$G_2^2\alpha_2^2 + G_1^2\alpha_1^2 - G^2\alpha^2 = C_0^2 - B_0^2 \cos^2 \varepsilon,$$

et après avoir divisé cette expression par :

$$GG_1G_2 = - P_3$$

on obtient l'équation finale :

$$\frac{\alpha^2}{G} - \frac{\alpha_1^2}{G_1} + \frac{\alpha_2^2}{G_2} = - \frac{1}{P_3}(P_2 + P_1 C_0 + C_0^2 - B_0^2 \cos^2 \varepsilon) = \frac{B_0^2 \sin^2 \varepsilon}{- P_3}$$

D'une manière analogue, on déduit les expressions suivantes :

$$\frac{\gamma^2}{G} - \frac{\gamma_1^2}{G_1} + \frac{\gamma_2^2}{G_2} = -\frac{1}{P_3}(-P_2 + P_1 A_0 + B_0^2 - A_0^2) = 0$$

$$\frac{\alpha\beta}{G} - \frac{\alpha_1\beta_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{G_2} = \frac{1}{-P_3} \, . \, B_0^2 \sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\frac{\alpha\gamma}{G} - \frac{\alpha_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{G_2} = \frac{B_0\cos\varepsilon}{-P_3}(P_1 + C_0 - A_0) = 0$$

$$\frac{\beta\gamma}{G} - \frac{\beta_1\gamma_1}{G_1} + \frac{\beta_2\gamma_2}{G_2} = \frac{B_0\sin\varepsilon}{-P_3}(P_1 - A_0) = \frac{-C_0 B_0 \sin\varepsilon}{-P_3}$$

Les trois termes quadratiques dans l'expression C_1 se présentent sous la forme :

$$\frac{\Gamma}{G} = \frac{\gamma^2}{G} f + \frac{\alpha\gamma}{G} b + \frac{\beta\gamma}{G} h - \frac{\alpha\beta}{G} d - \frac{\alpha^2}{G} l$$

$$-\frac{\Gamma_1}{G_1} = -\frac{\gamma_1^2}{G_1} f - \frac{\alpha_1\gamma_1}{G_1} b - \frac{\beta_1\gamma_1}{G_1} h + \frac{\alpha_1\beta_1}{G_1} d + \frac{\alpha_1^2}{G_1} l$$

$$\frac{\Gamma_2}{G_2} = \frac{\gamma_2^2}{G_2} f + \frac{\alpha_2\gamma_2}{G_2} b + \frac{\beta_2\gamma_2}{G_2} h - \frac{\alpha_2\beta_2}{G_2} - \frac{\alpha_2^2}{G_2} l$$

En additionnant ces trois équations, on obtient l'expression générale :

$$-P_3 C_1 = B_0 \sin\varepsilon \, (d \, . \, B_0 \cos\varepsilon - l \, . \, B_0 \sin\varepsilon - h \, . \, C_0) \, ;$$

après avoir remplacé les coefficients d, h, l par leurs valeurs page 12, cette expression, pour les trois composantes, se présente sous la forme :

$$C_1^{\mathrm{R}} = 0$$

$$-P_3 C_1^{\mathrm{U}} = A_s r^2 e_1 (A_c B_s - A_s B_c) = A_s r^2 e_1 A \, . \, B \, . \, a_1^2 \cos\varphi_1 \cos(A' - B')$$

$$-P_3 C_1^{\mathrm{Z}} = A_s r^2 e_1 (A_c C_s - A_s C_c) \, .$$

A l'aide des valeurs obtenues pour les quantités A_1, B_1, C_1, on peut développer les coefficients :

$$\Lambda = (G_1 + G_2)\,\Gamma + (G + G_2)\,\Gamma_1 + (G_1 - G)\,\Gamma_2$$

et

$$\Theta = (G_1 + G_2)\,G\Gamma + (G + G_2)\,G_1\Gamma_1 + (G - G_2)\,G_2\Gamma_2\,.$$

D'après Halphén[1], on tire de l'identité :

$$\begin{vmatrix} -\Gamma & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ G & G_1 & -G_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{G} & \frac{1}{G_1} & -\frac{1}{G_2} \\ G & G_1 & -G_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 & -B_1 \\ P_1 & 3 & P_1^2 - 2P_2 \\ 3 & \frac{-P_2}{-P_3} & P_1 \end{vmatrix}$$

l'expression suivante :

$$-\frac{\Lambda}{C}\,.\,C^2 = A_1\left(3P_1P_3 - P_1^2P_2 + 2P_2^2\right) - B_1\left(P_1P_2 - 9P_3\right) - 2C_1P_3\left(P_1^2 - 3P_2\right).$$

Si l'on pose :

$$P_1P_2 - 9P_3 = \rho$$
$$P_1^2 - 3P_2 = \lambda$$

on obtient donc :

$$\frac{\Lambda^{R}}{C}\,.\,C^2 = 2\lambda\,.\,\frac{1}{3}P_2r + \rho\left(B_1^{R} + \frac{1}{3}P_1\,.\,r\right)$$

$$\frac{\Lambda^{U}}{C}\,.\,C^2 = 2\lambda P_3\,.\,C_1^{U} + \rho B_1^{U}$$

$$\frac{\Lambda^{Z}}{C}\,C^2 = 2\lambda P_3C_1^{Z} + \rho B_1^{Z}\,.$$

Le calcul du coefficient C^2 se fait de la manière suivante :

Si g_2 et g_3 représentent les invariants de l'équation cubique, dont les quantités G sont les racines, l'expression $g_2^3 - 27g_3^2$ sera le discriminant de cette équation, et on aura :

[1] Halphén, *Théorie des fonctions elliptiques.*

$$C^2 = (G + G_2)^2 . (G - G_1)^2 . (G_1 + G_2)^2 = \frac{1}{16}\left(g_2^3 - 27\, g_3^2\right).$$

En désignant par g l'invariant absolu, on obtient :

$$C^2 = \frac{27}{16} \cdot g_3^2 (g - 1)$$

où les invariants ont les valeurs respectives :

$$g_2 = \frac{4}{3}\lambda$$

$$g_3 = \frac{4}{27}(2 P_1 \lambda - 3\rho).$$

$$g = \frac{g_3^2}{27\, g_3^2}$$

L'autre coefficient Θ s'obtiendra à l'aide de l'identité :

$$\begin{vmatrix} G\Gamma & -G_1\Gamma_1 & G_2\Gamma_1 \\ G & G_1 & -G_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{G} & \frac{1}{G_1} & -\frac{1}{G_2} \\ \frac{G_2 + G_1}{G} & -\frac{G_2 + G}{G_1} & \frac{G_1 - G}{G_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & -A_1 & \Lambda \\ P_1 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{-P_2}{-P_3} & \frac{-C_3}{-P_3} \end{vmatrix}$$

sous la forme :

$$\Theta . 2\left(P_1^2 - 3 P_2\right) = \Lambda (P_1 P_2 - 9 P_3) + C (P_1 A_1 + 3 B_1)$$

ou :

$$\frac{\Theta^{R}}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^{R}}{C}\rho + 3\left(B_1^{R} + \frac{1}{3} P_1 r\right)\right)$$

$$\frac{\Theta^{U}}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^{U}}{C}\rho + 3\, B_1^{U}\right)$$

$$\frac{\Theta^{Z}}{C} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\Lambda^{Z}}{C}\rho + 3\, B_1^{Z}\right).$$

Pour effectuer le calcul de l'expression :

$$V = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda}{C}\left(\eta - \omega\frac{P_1}{3}\right) + \omega\frac{\Theta}{C}\right\}$$

il nous reste encore à calculer les intégrales elliptiques ω et η. Ce calcul se fait d'après les recherches de M. Bruns[1].

Si g_2 et g_3 désignent les coefficients de l'équation cubique :

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

et g l'invariant absolu, M. Bruns pose :

$$\omega = \Omega g_3^{-\frac{1}{6}} . g_2^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \eta = \mathrm{H} g_3^{\frac{1}{6}}$$

et trouve pour les quantités Ω et H les équations différentielles suivantes :

$$g(g-1)\frac{d^2\Omega}{dg^2} + \left(\frac{7}{3}g - \frac{4}{3}\right)\frac{d\Omega}{dg} + \frac{55}{144}\Omega = 0$$

$$g(g-1)\frac{d^2\mathrm{H}}{dg^2} + \left(\frac{4}{3}g - \frac{1}{3}\right)\frac{d\mathrm{H}}{dg} - \frac{5}{144}\mathrm{H} = 0,$$

ces équations correspondent à l'équation différentielle de la série hypergéométrique de Gauss, savoir :

$$x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + \left(x(\alpha+\beta+1) - \gamma\right)\frac{dF}{dx} + \alpha.\beta.F = 0;$$

on pourrait donc poser :

$$\Omega = C.F\left(\frac{11}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{3}, g\right)$$

$$\mathrm{H} = C'.F\left(\frac{5}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{3}, g\right)$$

où C et C' représentent deux constantes.

En prenant en considération les relations :

[1] Bruns, *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$
$$x^{\alpha - \gamma}(1-x)^{\gamma - \alpha - \beta} . F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right)$$

on obtient pour les deux quantités Ω et H les expressions suivantes :

$$\Omega = C . 27^{\frac{1}{12}} . g_2^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right)$$
$$H = C' 27^{-\frac{1}{12}} g_2^{\frac{1}{4}} F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1 \frac{g-1}{g}\right)$$

Pour déterminer les constantes C et C', on pose :

$$g = 1, g_3 = 1 \text{ donc } g_2 = 3;$$

dans ce cas, on aura :

$$e_1 = 1, e_2 = e_3 = -\frac{1}{2}, k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = 0,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}},$$

et comme :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{e_1 \omega + \eta}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

on obtient :

$$\eta = \frac{\pi}{24}$$

Les intégrales elliptiques se calculent donc d'aprés les formules :

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} g_2^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right)$$
$$\eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} g_2^{\frac{1}{4}} F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, 1, \frac{g-1}{g}\right),$$

Pour faciliter la détermination de ces quantités ω et η, j'ai calculé une table qui donne pour l'argument $\frac{g-1}{g} = x$ les deux séries hypergéométriques :

$$F_\omega\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, x\right) \quad \text{et} \quad F_\eta\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, x\right)$$

Si l'argument de ces séries est $> \frac{1}{2}$, leur convergence est petite ; pour ce cas, j'ai effectué le calcul de la table de la manière suivante :

La somme de la série hypergéométrique dont l'argument est 1, se représente par l'expression :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

ou d'après Gauss :

$$= \frac{\Pi(\gamma - 1)\,\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\,\Pi(\gamma - \beta - 1)}\,;$$

dans ces formules Γ et Π ont la signification connue.

Pour quelques valeurs spéciales on a :

$$\Pi(0) = 1,\ \Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \Pi(\mu) = \mu \cdot \Pi(\mu - 1)$$

de sorte qu'on obtient :

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, 1\right) = \frac{77 \cdot \sqrt{\pi}}{144 \cdot \Pi\left(\frac{7}{12}\right)\Pi\left(\frac{11}{12}\right)}$$

$$F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, 1\right) = \frac{5 \cdot \sqrt{\pi}}{12 \cdot \Pi\left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Pi\left(\frac{1}{15}\right)}$$

Les logarithmes des fonctions Π se trouvent dans une table calculée par Gauss[1].

[1] Gauss, *Disquisitiones generales circa seriem*, etc. Werke III.

En introduisant au lieu de x l'argument $1-x$, on a la relation générale :

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = A\,.\,F(\alpha,\alpha+\beta-\gamma-1,1-x)$$
$$+ B\,.\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,.\,F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x),$$

où

$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

$$B = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}.$$

On aura donc, pour les séries hypergéométriques dont nous avons besoin, les expressions suivantes :

$$F_\omega\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,x\right) = A_1.F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},\frac{1}{2},1-x\right)$$
$$+ B_1(1-x)^{\frac{1}{2}}.F\left(\frac{11}{12},\frac{7}{12},\frac{3}{2},1-x\right)$$

$$F_\eta\left(\frac{7}{12},-\frac{1}{12},1,x\right) = A_2\cdot F\left(\frac{7}{12},-\frac{1}{12},\frac{1}{2},1-x\right)$$
$$+ B_2(1-x)^{\frac{1}{2}}.F\left(\frac{5}{12},\frac{13}{12},\frac{3}{2},1-x\right)$$

et

$$A_1 = F\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12},1,1\right),\quad A_2 = F\left(\frac{7}{12},-\frac{1}{12},1,1\right)$$
$$B_1 = -\frac{1}{6}A_2 \qquad B_2 = +\frac{1}{6}A_1$$
$$\log A_1 = 0{,}040\,77266,\quad \log A_2 = 9{,}939\,19972-10;$$

Pour des valeurs de l'argument qui dépassent 0,980, l'interpolation devient inexacte pour un calcul de sept décimales, à cause des différences supérieures; il sera donc plus opportun pour un cas spécial de calculer directement les séries, où l'on n'a besoin que de quelques termes. Pour faciliter ce calcul, voici les coefficients de ces quatres séries :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1-x) = 1 + c_1(1-x) + c_2(1-x)^2 + c_3(1-x)^3 + \ldots$$

	$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, (1-x)\right)$	$F\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{2}, (1-x)\right)$
$lg\, c_1$	8.841 6375	9.478 4596
c_2	8.550 5460	9.249 5160
c_3	8.377 4602	9.100 5639
c_4	8.253 9553	8.989 9089
c_5	8.157 8823	8.901 8194
c_6	8,079 2491	8.828 6286
c_7	8.012 6888	8.766 0164
c_8	7.954 9840	8.711 3067
c_9	7.904 0532	8.662 7260
c_{10}	7.858 4720	8.619 0380

	$F\left(\frac{7}{12}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{2}, (1-x)\right)$	$F\left(\frac{5}{12}, \frac{13}{12}, \frac{3}{2}, (1-x)\right)$
$lg\, c_1$	8.987 7655 n	9.478 4596
c_2	8.672 4280 n	9.249 5160
c_3	8.267 0553 n	8.901 8194
c_4	8.492 0937 n	9.100 5639
c_5	8.365 1397 n	8.989 9089
c_6	8.187 1057 n	8.828 6286
c_7	8.119 6172 n	8.766 0164
c_8	8.061 2230 n	8.711 3067
c_9	8.009 7599 n	8.662 7260
c_{10}	7.963 7554 n	8.619 0380

Résumé des Formules.

$$\sin\frac{1}{2}J\sin\frac{1}{2}(K+K_1)=\sin\frac{1}{2}(\Omega_1-\Omega)\sin\frac{1}{2}(i_1+i)$$
$$\sin\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(K+K_1)=\cos\frac{1}{2}(\Omega_1-\Omega)\sin\frac{1}{2}(i_1-i)$$

$$-\sin\Pi_1\cos J=A\sin A',\qquad -\sin\Pi_1=B\sin B'$$
$$\cos\Pi_1=A\cos A',\quad \cos\Pi_1\cos J=B\cos B'$$

$$A\,.\,a_1\cos(A'+\Pi+v)=A_c$$
$$-A\,.\,a_1\sin(A'+\Pi+v)=B_c$$
$$a_1\sin\Pi_1\sin J=C_c$$

$$B\,.\,a_1\cos\varphi_1\sin(B'+\Pi+v)=A_s$$
$$B\,.\,a_1\cos\varphi_1\cos(B'+\Pi+v)=B_s$$
$$a_1\cos\varphi_1\cos\Pi_1\,.\,\cos J=C_s$$

$$a_1^2+r^2+2e_1r\,.\,A_c=A_o$$
$$e_1a_1^2+r\,.\,A_c=B_o\cos\varepsilon;\quad rA_s=B_o\sin\varepsilon;\quad a_1^2e_1^2=C_o$$

$$P_1=A_o-C_o;\quad P_2=B_o^2-A_oC_o;\quad -P_3=C_oB_o^2\sin^2\varepsilon$$
$$P_1^2-3P_2=\lambda,\qquad P_1P_2-GP_3=\rho$$

$$g_2=\frac{4}{3}\lambda,\quad g_3=\frac{4}{27}\,.\,(2P_1\lambda-3\rho),\qquad g=\frac{g_2^3}{27\,.\,g_3^2}$$

$$\omega=\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}\,g_2^{-\frac{1}{4}}F_\omega;\qquad \eta=\frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}}\,g_2^{\frac{1}{4}}F_\eta$$

$$\log\frac{\pi}{\sqrt[4]{12}}=0{,}22735456,\qquad \log\frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}}=9{,}68776394-10$$

On prend de la table les valeurs de F_ω et F_η avec l'argument :

$$\frac{g-1}{g} = x$$

$$A_1^R = r\,, \qquad A_1^U = o\,, \qquad A_1^Z = o$$

$$B_1^R = -A_o\,(A_c\, e_1 + r) + B_o \cos \varepsilon \left(e_1 r + A_c\,(1 + e_1^2)\right) + A_s B_o \sin \varepsilon - A_c\, C_o\, e_1$$

$$B_1^U = -\frac{1}{2}\, r\, a_1^2 \cos^2 \varphi_1 \sin^2 J \sin 2\,(\Pi + v) - r^2 e_1 B_c$$

$$B_1^Z = -A_o\, C_c\, e_1 + B_o \cos \varepsilon\, C_c\,(1 + e_1^2) + C_s\, B_o \sin \varepsilon - C_c\, C_o\, e_1$$

$$-P_3\, C_1^R = 0$$

$$-P_3\, C_1^U = A_s\, r^2 e_1\, A\, B\, a_1^2 \cos^2 \varphi_1 \cos (A' - B')$$

$$-P_3\, C_1^Z = A_s\, r^2 e_1\,(A_c\, C_s - A_s\, C_c)$$

$$C^2 = \frac{27}{16} \cdot g_3^2\,(g-1)$$

$$\frac{\Lambda^R}{C} \cdot C^2 = \frac{2}{3} \lambda\, P_2 r + \rho \left(B_1^R + \frac{1}{3} P_1 r\right)$$

$$\frac{\Lambda^U}{C} \cdot C^2 = 2 \lambda\, P_3\, C_1^U + \rho\, B_1^U$$

$$\frac{\Lambda^Z}{C} \cdot C^2 = 2 \lambda\, P_3\, C_1^Z + \rho\, B_1^Z$$

$$\frac{\Theta^R}{C} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\Lambda^R}{C} \rho + 3 \left(B_1^R + \frac{1}{3} P_1 r\right) \right)$$

$$\frac{\Theta^U}{C} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\Lambda^U}{C} \rho + 3\, B_1^U \right)$$

$$\frac{\Theta^Z}{C} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\Lambda^Z}{C} \rho + 3\, B_1^Z \right)$$

$$R_0 = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{\mathrm{R}}}{C}\left(\omega - \eta\frac{P_1}{3}\right) + \omega\,.\,\frac{\Theta^{\mathrm{R}}}{C}\right\}$$

$$U_0 = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{\mathrm{U}}}{C}\left(\omega - \eta\frac{P_1}{3}\right) + \omega\,.\,\frac{\Theta^{\mathrm{U}}}{C}\right\}$$

$$Z_0 = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\Lambda^{\mathrm{Z}}}{C}\left(\omega - \eta\frac{P_1}{3}\right) + \omega\,\frac{\Theta^{\mathrm{Z}}}{C}\right\}$$

Pour contrôler ces formules, j'ai calculé les composantes de la force perturbatrice exercée par la planète Vénus sur Mercure et j'ai obtenu les mêmes valeurs que M. Hill[1] a trouvées.

Après avoir évalué les forces perturbatrices, le calcul des perturbations séculaires se fait de la manière suivante : on divise en douze parties l'orbite du corps céleste qui subit les perturbations, et on calcule pour chaque point de division, donc pour $E = 0^{\circ}, 30^{\circ}, \ldots 330^{\circ}$, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
H_{\Omega} &= Z_o\, r \sin u \\
H_i &= Z_o\, r \cos u \\
H_e &= R_o \sin v + U_o (\cos v + \cos E) \\
H_{\omega} &= -R_o \cos v + U_o\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin v \\
H_{M_1} &= -r\,.\,R_o\,.
\end{aligned}$$

Soient les valeurs trouvées $H^0, H^1, H^2 \ldots H^{11}$.

Si l'on pose :

$$(H) = \frac{1}{12}(H^0 + H^1 + \ldots + H^{11})$$

on obtient :

[1] *On Gauss' Method of computing secular perturbations.* Astron. Papers, vol. I, part. V.

$$\sin i \,.\, (\delta\Omega)' = \frac{m_1}{1+m} \,.\, a\,\mu \sec\varphi \,.\, (H\omega)$$

$$(\delta i)' = \frac{m_1}{1+m} \,.\, a\,\mu \sec\varphi \,.\, (H_i)$$

$$(\delta e)' = \frac{m_1}{1+m} \,.\, a^2\,\mu \cos\varphi \,.\, (H_e)$$

$$e\,(\delta\omega_1)' = \frac{m_1}{1+m}\, a^2\,\mu \cos\varphi \,.\, (H\omega)$$

$$(\delta M_1)' = \frac{m_1}{1+m}\, 2\,a\,\mu\,(H_{M_1})$$

$$(\delta\omega)' = \delta\omega_1 - \cos i \,.\, \delta\Omega$$

$$(\delta\pi)' = \delta\omega_1 + 2\sin^2\frac{i}{2}\ \ \delta\Omega$$

$$(\delta L)' = \delta M_1 + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \,.\, \delta\omega_1 + 2\sin^2\frac{i}{2} \,.\, \delta\Omega$$

où L désigne la longitude moyenne et π la longitude du périhélie mesurée d'un équinoxe fixe.

TABLES DES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, 1, x\right) = F_\omega$$

$$F\left(\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, 1, x\right) = F_\eta$$

pour évaluer les périodes des intégrales elliptiques de la première et de la deuxième espèce, d'après les formules :

$$\omega = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} \cdot g_2^{-\frac{1}{4}} \cdot F_\omega; \qquad \log \frac{\pi}{\sqrt[4]{12}} = 0{,}227\,3545\,6$$

$$\eta = \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} \cdot g_2^{\frac{1}{4}} \cdot F_\eta; \qquad \log \frac{\pi}{\sqrt[4]{1728}} = 9{,}687\,7639\,4 - 10$$

g_2 et g_3 représentant les invariants et

$$g = \frac{g_2^3}{27 \cdot g_3^2}, \quad x = \frac{g-1}{g}$$

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —	x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.000	1.000 0000	347	1.000 0000	486	0.040	1.001 4107	358	0.998 0267	501
1	0347	348	0.999 9514	487	41	4465	359	0.997 9766	501
2	0695	348	9027	487	42	4824	359	9265	502
3	1043	348	8540	487	43	5183	359	8763	502
4	1391	348	8053	488	44	5542	360	8261	502
5	1739	349	7565	488	45	5902	360	7759	503
6	2088	349	7077	488	46	6262	360	7256	503
7	2437	349	6589	489	47	6622	360	6753	504
8	2786	350	6100	489	48	6982	361	6249	504
9	3136	350	5611	490	49	7343	361	5745	504
0.010	3486	350	5121	490	0.050	7704	361	5241	505
11	3836	350	4631	490	51	8065	362	4736	505
12	4186	351	4141	490	52	8427	362	4231	505
13	4537	350	3651	491	53	8789	362	3726	506
14	4887	351	3160	491	54	9151	362	3220	506
15	5238	352	2669	492	55	9513	363	2714	507
16	5590	352	2177	492	56	9876	363	2207	507
17	5942	352	1685	493	57	1.002 0239	363	1700	507
18	6294	352	1192	493	58	0602	364	1193	508
19	6646	352	0699	493	59	0966	364	0685	508
0.020	6998	353	0206	493	0.060	1330	364	0177	509
21	7351	353	0.998 9713	494	61	1694	364	0.996 9668	509
22	7704	353	9219	494	62	2058	365	9159	509
23	8057	354	8725	495	63	2423	365	8650	510
24	8411	354	8230	495	64	2788	366	8140	510
25	8765	354	7735	495	65	3154	365	7630	511
26	9119	355	7240	495	66	3519	366	7119	511
27	9474	354	6745	496	67	3885	367	6608	511
28	9828	355	6249	497	68	4252	366	6097	512
29	1.001 0183	356	5752	497	69	4618	367	5585	512
0.030	0539	355	5255	497	0.070	4985	367	5073	512
31	0894	356	4758	497	71	5352	368	4561	513
32	1250	356	4261	498	72	5720	368	4048	513
33	1606	356	3763	498	73	6088	368	3535	514
34	1962	357	3265	499	74	6456	368	3021	514
35	2319	357	2766	499	75	6824	369	2507	515
36	2676	357	2267	499	76	7193	369	1992	515
37	3033	358	1768	500	77	7562	369	1477	515
38	3391	358	1268	500	78	7931	370	0962	516
39	3749	358	0768	501	79	7301	370	0446	516
0.040	4107		0267		0.080	8671		0.995 9930	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —	x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.080	1.002 8671	370	0.995 9930	517	0.120	1.004 3725	383	0.993 8945	533
81	9041	370	9413	517	21	4108	383	8412	534
82	9411	371	8896	517	22	4491	384	7878	534
83	9782	371	8379	518	23	4875	384	7344	535
84	1.003 0153	372	7861	518	24	5259	384	6809	535
85	0525	372	7343	519	25	5643	385	6274	536
86	0897	372	6824	519	26	6028	385	5738	536
87	1269	372	6305	519	27	6413	385	5202	536
88	1641	373	5786	520	28	6798	385	4666	537
89	2014	373	5266	520	29	7183	386	4129	537
0.090	2387	373	4746	520	0.130	7569	386	3592	538
91	2760	374	4226	521	31	7955	387	3054	538
92	3134	374	3705	522	32	8342	387	2516	539
93	3508	374	3183	522	33	8729	388	1977	539
94	3882	375	2661	522	34	9117	387	1438	540
95	4257	375	2139	523	35	9504	388	0898	540
96	4632	375	1616	523	36	9892	388	0358	540
97	5007	375	1093	523	37	1.005 0280	389	0.992 9818	541
98	5382	376	0570	524	38	0669	389	9277	541
99	5758	376	0046	525	39	1058	390	8736	542
0.100	6134	377	0.994 9521	525	0.140	1448	389	8194	542
01	6511	377	8996	525	41	1837	390	7652	543
02	6888	377	8471	525	42	2227	391	7109	543
03	7265	377	7946	526	43	2618	391	6566	544
04	7642	378	7420	527	44	3009	391	6022	544
05	8020	378	6893	527	45	3400	391	5478	544
06	8398	378	6366	527	46	3791	392	4934	545
07	8776	379	5839	528	47	4183	392	4389	546
08	9155	379	5311	528	48	4575	392	3843	546
09	9534	380	4783	529	49	4967	393	3297	546
0.110	9914	379	4254	529	0.150	5360	393	2751	547
11	1.004 0293	380	3725	529	51	5753	394	2204	547
12	0673	380	3196	530	52	6147	394	1657	548
13	1053	381	2666	530	53	6541	394	1109	548
14	1434	381	2136	531	54	6935	395	0561	549
15	1815	381	1605	531	55	7330	395	0012	549
16	2196	382	1074	532	56	7725	395	0.991 9463	549
17	2578	382	0542	532	57	8120	395	8914	550
18	2960	382	0010	532	58	8515	396	8364	551
19	3342	383	0.993 9478	533	59	8911	397	7813	551
0.120	3725		8945		0.160	9308		7262	

x	F_{ω}	Diff. +	F_{η}	Diff. —	x	F_{ω}	Diff. +	F_{η}	Diff. —
0.160	1.005 9308	396	0.991 7262	551	0.200	1.007 5461	412	0.989 4828	571
61	9704	397	6711	552	01	5873	412	4257	572
62	1.006 0101	398	6159	552	02	6285	412	3685	572
63	0499	398	5607	553	03	6697	413	3113	573
64	0897	398	5054	553	04	7110	413	2540	573
65	1295	398	4501	554	05	7523	414	1967	573
66	1693	399	3947	554	06	7937	414	1394	574
67	2092	399	3393	555	07	8351	414	0820	575
68	2491	400	3838	555	08	8765	415	0245	575
69	2891	400	3283	556	09	9180	415	0.988 9670	576
0.170	3291	400	1727	556	0.210	9595	415	9094	576
71	3691	401	1171	557	11	1.008 0010	416	8518	577
72	4092	401	0614	557	12	0426	416	7941	577
73	4493	401	0057	558	13	0842	417	7364	578
74	4894	402	0.990 9499	558	14	1259	417	6786	578
75	5296	402	8941	559	15	1676	418	6208	579
76	5698	403	8382	559	16	2094	418	5629	579
77	6101	403	7823	560	17	2512	418	5050	580
78	6504	403	7263	560	18	2930	418	4470	580
79	6907	403	6703	560	19	3348	419	3890	581
0.180	7310	404	6143	561	0.220	3767	420	3309	582
81	7714	404	5582	562	21	4187	420	2727	582
82	8118	405	5020	562	22	4607	420	2145	582
83	8523	405	4458	562	23	5027	421	1563	583
84	8928	406	3896	563	24	5448	421	0980	584
85	9334	406	3333	564	25	5869	421	0396	584
86	9740	406	2769	564	26	6290	422	0.987 9812	585
87	1.007 0146	407	2205	564	27	6712	422	9227	585
88	0553	407	1641	565	28	7134	423	8642	586
89	0960	407	1076	566	29	7557	423	8056	586
0.190	1367	408	0510	566	0.230	7980	424	7470	587
91	1775	408	0.989 9944	566	31	8404	424	6883	587
92	2183	408	9378	567	32	8828	424	6296	588
93	2591	409	8811	568	33	9252	425	5708	588
94	3000	409	8243	568	34	9677	425	5120	589
95	3409	410	7675	568	35	1.009 0102	426	4531	590
96	3819	410	7107	569	36	0528	426	3941	590
97	4229	410	6538	570	37	0954	426	3351	591
98	4639	411	5968	570	38	1380	427	2760	591
99	5050	411	5398	570	39	1807	427	2169	582
0.200	5461		4828		0.240	2234		1577	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —	x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.240	1.009 2234	428	0.987 1577	592	0.280	1.010 9682	445	0.984 7441	616
41	2662	428	0985	593	81	1.011 0127	446	6825	616
42	3090	429	0392	593	82	0573	446	6209	617
43	3519	429	0.986 9799	594	83	1019	447	5592	617
44	3948	429	9205	595	84	1466	447	4975	618
45	4377	430	8610	595	85	1913	448	4357	618
46	4807	430	8015	595	86	2361	448	3739	619
47	5237	431	7420	596	87	2809	449	3120	620
48	5668	431	6824	597	88	3258	449	2500	620
49	6099	432	6227	598	89	3707	450	1880	621
0.250	6531	432	5629	598	0.290	4157	450	1259	622
51	6963	432	5031	598	91	4607	450	0637	622
52	7395	433	4433	599	92	5057	451	0015	623
53	7828	433	3834	600	93	5508	452	0.983 9392	623
54	8261	434	3234	600	94	5960	452	8769	624
55	8695	434	2634	601	95	6412	452	8145	625
56	9129	435	2033	601	96	6864	453	7520	626
57	9564	435	1432	602	97	7317	453	6894	626
58	9999	435	0830	602	98	7770	454	6268	626
59	1.010 0434	436	0228	603	99	8224	454	5642	627
0.260	0870	436	0.985 9625	604	0.300	8678	455	5015	628
61	1306	437	9021	604	01	9133	456	4387	629
62	1743	437	8417	605	02	9589	456	3758	629
63	2180	438	7812	605	03	1.012 0045	456	3129	630
64	2618	438	7207	606	04	0501	457	2499	630
65	3056	439	6601	607	05	0958	457	1869	631
66	3495	439	5994	607	06	1415	458	1238	632
67	3934	440	5387	608	07	1873	458	0606	632
68	4374	440	4779	608	08	2331	458	0.982 9974	633
69	4814	440	4171	609	09	2789	459	9341	634
0.270	5254	441	3562	609	0.310	3248	460	8707	634
71	5695	441	2953	610	11	3708	460	8073	635
72	6136	442	2343	611	12	4168	461	7438	636
73	6578	442	1732	611	13	4629	461	6802	636
74	7020	442	1121	612	14	5090	462	6166	637
75	7462	443	0509	612	15	5552	462	5529	637
76	7905	444	0.984 9897	613	16	6014	463	4892	638
77	8349	444	9284	614	17	6477	463	4254	639
78	8793	444	8670	614	18	6940	464	3615	640
79	9237	445	8056	615	19	7404	464	2975	640
0.280	9682		7441		0.320	7868		2335	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —	x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.320	1.012 7868	465	0.982 2335	641	0.360	1.014 6864	486	0.979 6167	669
21	8333	465	1694	641	61	7350	487	5498	669
22	8798	466	1053	642	62	7837	487	4829	670
23	9264	466	0411	643	63	8324	487	4159	671
24	9730	467	0.981 9768	644	64	8811	488	3488	672
25	1.013 0197	467	9124	644	65	9299	489	2816	673
26	0664	468	8480	645	66	9788	490	2143	673
27	1132	468	7835	645	67	1.015 0278	490	1470	674
28	1600	469	7190	646	68	0768	490	0796	675
29	2069	469	6544	647	69	1258	491	0121	675
0.330	2538	470	5897	648	0.370	1749	492	0.978 9446	676
31	3008	470	5249	648	71	2241	492	8770	677
32	3478	471	4601	649	72	2733	493	8093	678
33	3949	471	3952	649	73	3226	494	7315	678
34	4420	472	3303	651	74	3720	494	6737	679
35	4892	472	2652	651	75	4214	494	6058	680
36	5364	473	2001	652	76	4708	495	5378	681
37	5837	474	1349	652	77	5203	496	4697	681
38	6311	474	0697	653	78	5699	496	4016	683
39	6785	474	0044	653	79	6195	497	3333	683
0.340	7259	475	0.980 9391	655	0.380	6692	498	2650	684
41	7734	476	8736	655	81	7190	498	1966	684
42	8210	476	8081	656	82	7688	499	1282	686
43	8686	477	7425	656	83	8187	499	0596	686
44	6163	477	6769	658	84	8686	500	0.977 9910	687
45	9640	478	6111	658	85	9186	500	9223	687
46	1.014 0118	478	5453	659	86	9686	501	8536	689
47	0596	479	4794	659	87	1.016 0187	502	7847	689
48	1075	479	4135	660	88	0689	502	7158	690
49	1554	480	4475	660	89	1191	503	6468	691
0.350	2034	481	2815	662	0.390	1694	504	5777	692
51	2515	481	2153	662	91	2198	504	5085	692
52	2996	482	1491	663	92	2702	505	4393	693
53	3478	482	0828	664	93	3207	505	3700	694
54	3960	483	0164	664	94	3712	506	3006	695
55	4443	483	0.979 9500	665	95	4218	507	2311	695
56	4926	484	8835	666	96	4725	507	1616	697
57	5410	484	8169	667	97	5232	508	0919	697
58	5894	485	7502	667	98	5740	508	0222	698
59	6379	485	6835	668	99	6248	509	0.976 9524	699
0.360	6864		6167		0.400	6757		4825	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —	x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.400	1.016 6757	510	0.976 8825	700	0.440	1.018 7646	536	0.974 0180	734
01	7267	510	8125	700	41	8182	537	0.973 9446	735
02	7777	511	7425	701	42	8719	537	8711	736
03	8288	511	6724	702	43	9256	538	7975	737
04	8799	512	6022	703	44	9794	539	7238	738
05	9311	513	5319	704	45	1.019 0333	540	6500	738
06	9824	513	4615	705	46	0873	540	5762	740
07	1.017 0337	514	3910	705	47	1413	541	5022	740
08	0851	515	3205	706	48	1954	542	4282	742
09	1366	515	2499	707	49	2496	542	3540	742
0.410	1881	516	1792	708	0.450	3038	543	2798	744
11	2397	517	1084	709	51	3581	543	2054	744
12	2914	517	0375	710	52	4124	545	1310	745
13	3431	518	0.975 9665	710	53	4669	545	0565	746
14	3949	519	8955	711	54	5214	546	0.972 9819	747
15	4468	519	8244	712	55	5760	547	9072	748
16	4987	520	7532	713	56	6307	548	8324	749
17	5507	520	6819	714	57	6855	548	7575	750
18	6027	521	6105	715	58	7403	549	6825	751
19	6548	522	5390	716	59	7952	549	6074	752
0.420	7070	522	4674	716	0.460	8501	550	5322	753
21	7592	523	3958	717	61	9051	551	4569	754
22	8115	524	3241	718	62	9602	552	3815	755
23	8639	524	2523	719	63	1.020 0154	553	3060	755
24	9163	525	1804	720	64	0707	553	2305	757
25	9688	526	1084	721	65	1260	554	1548	758
26	1.018 0214	527	0363	722	66	1814	555	0790	759
27	0741	527	0.974 9641	722	67	2369	556	0031	759
28	1268	528	8919	724	68	2925	556	0.971 9272	761
29	1796	528	8195	724	69	3481	557	8511	762
0.430	2324	529	7471	725	0.470	4038	558	7749	763
31	2853	530	6746	726	71	4596	559	6986	763
32	3383	531	6020	727	72	5155	559	6223	765
33	3914	531	5293	727	73	5714	560	5458	765
34	4445	532	4566	729	74	6274	561	4693	767
35	4977	532	3837	730	75	6835	562	3926	768
36	5509	533	3107	731	76	7397	563	3158	769
37	6042	534	2376	731	77	7960	563	2389	769
38	6576	535	1645	732	78	8523	564	1620	771
39	7111	535	0913	733	79	9087	565	0849	771
0.440	7646		0180		0.480	9652		0078	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —	x	F_η	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.480	1.020 9652	566	0.971 0078	773	0.520	1.023 2918	600	0.967 8332	817
81	1.021 0218	566	0.970 9305	774	21	3518	600	7515	817
82	0784	567	8531	775	22	4118	601	6698	819
83	1351	568	7756	776	23	4719	602	5879	820
84	1919	569	6980	777	24	5321	603	5059	822
85	2488	570	6203	777	25	5924	603	4237	822
86	3058	570	5426	779	26	6527	605	3415	824
87	3628	571	4647	780	27	7132	606	2591	824
88	4199	572	3867	782	28	7738	607	1767	826
89	4771	573	3085	782	29	8345	607	0941	827
0.490	5344	574	2303	783	0.530	8952	608	0114	829
91	5918	574	1520	784	31	9560	609	0.966 9285	829
92	6492	576	0736	786	32	1.024 0169	611	8456	831
93	7068	576	0.969 9950	786	33	0780	611	7625	832
94	7644	577	9164	788	34	1391	612	6793	834
95	8221	577	8376	788	35	2003	613	5959	834
96	8798	579	7588	790	36	2616	614	5125	836
97	9377	579	6798	790	37	3230	615	4289	837
98	9956	580	6008	792	38	3845	616	3452	839
99	1.022 0536	581	5216	793	39	4461	617	2613	839
0.500	1117	582	4423	794	0.540	5078	618	1774	841
01	1699	583	3629	795	41	5696	618	0933	841
02	2282	584	2834	796	42	6314	620	0092	844
03	2866	584	2038	797	43	6934	621	0.965 9248	844
04	3450	585	1241	799	44	7555	622	8404	846
05	4035	586	0442	799	45	8177	622	7558	847
06	4621	587	0.968 9643	801	46	8799	624	6711	848
07	5208	588	8842	801	47	9423	625	5863	849
08	5796	589	8041	803	48	1.025 0048	626	5014	852
09	6385	590	7238	804	49	0674	626	4162	852
0.510	6975	590	6434	805	0.550	1300	628	3310	854
11	7565	591	5629	806	51	1928	628	2456	854
12	8156	592	4823	808	52	2556	630	1602	856
13	8748	583	4015	808	53	3186	630	0746	857
14	9341	594	3207	810	54	3816	632	0.964 9889	859
15	9935	595	2397	810	55	4448	633	9030	860
16	1.023 0530	596	1587	812	56	5081	634	8170	862
17	1126	597	0775	813	57	5715	634	7308	862
18	1723	597	0.967 9962	815	58	6349	636	6446	864
19	2320	598	9147	815	59	6985	636	5582	865
0.520	2918		8332		0.560	7621		4717	

x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.	x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.
		+		—			+		—
0.560	1.025 7621	638	0.964 4717	867	0.600	1.028 3980	682	0.960 8951	925
61	8259	639	3850	868	01	4662	684	8026	926
62	8898	640	2982	869	02	5346	685	7100	928
63	9538	641	2113	870	03	6031	686	6172	929
64	1.026 0179	642	1243	872	04	6717	687	5243	931
65	0821	643	0371	874	05	7404	689	4312	933
66	1464	644	0.963 9497	875	06	8093	689	3379	934
67	2108	645	8622	876	07	8782	691	2445	935
68	2753	646	7746	878	08	9473	692	1510	937
69	3399	647	6868	878	09	1.029 0165	694	0573	939
0.570	4046	649	5990	880	0.610	0859	695	0.959 9634	941
71	4695	649	5110	882	11	1554	696	8693	942
72	5344	651	4228	883	12	2250	697	7751	944
73	5995	651	3345	885	13	2947	699	6807	946
74	6646	652	2460	886	14	3646	700	5861	947
75	7298	654	1574	887	15	4346	701	4914	949
76	7952	655	0687	889	16	5047	702	3965	950
77	8607	656	0.962 9798	890	17	5749	704	3015	952
78	9263	657	8908	892	18	6453	705	2063	954
79	9920	658	8016	893	19	7158	706	1109	955
0.580	1.027 0578	659	7123	894	0.620	7864	707	0154	958
81	1237	661	6229	896	21	8571	709	0.958 9196	959
82	1898	662	5333	898	22	9280	710	8237	961
83	2560	662	4435	899	23	9990	712	7276	962
84	3222	663	3536	900	24	1.030 0702	713	6314	964
85	3885	665	2636	902	25	1415	714	5350	966
86	4550	667	1734	903	26	2129	715	4384	967
87	5217	667	0831	905	27	2844	717	3417	969
88	5884	668	0.961 9926	906	28	3561	718	2448	971
89	6552	669	9020	908	29	4279	720	1477	973
0.590	7221	671	8112	909	0.630	4999	722	0504	974
91	7892	672	7203	910	31	5721	722	0.957 9530	976
92	8564	673	6293	913	32	6443	723	8554	978
93	9237	674	5380	914	33	7166	725	7576	980
94	9911	675	4466	915	34	7891	727	6596	982
95	1.028 0586	676	3551	917	35	8618	728	5614	984
96	1262	678	2634	918	36	9346	729	4630	985
97	1940	679	1716	920	37	1.031 0075	731	3645	987
98	2619	680	0796	922	38	0806	732	2658	989
99	3299	681	0.960 9874	923	39	1538	733	1669	991
0.600	3980		8951		0.640	2271		0678	

x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.	x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.
		+		—			+		—
0.640	1.031 2271	735	0.957 0678	993	0.680	1.034 2855	798	0.952 9438	1074
41	3006	737	0.956 9685	994	81	3653	799	8364	1076
42	3743	738	8691	996	82	4452	801	7288	1079
43	4481	739	7695	998	83	5253	803	6209	1080
44	5220	741	6697	1000	84	6056	805	5129	1083
45	5961	742	5697	1002	85	6861	807	4046	1086
46	6703	743	4695	1004	86	7668	808	2960	1088
47	7446	745	3691	1006	87	8476	810	1872	1090
48	8191	747	2685	1008	88	9286	812	0782	1092
49	8938	748	1677	1010	89	1.035 0098	814	0.951 9690	1094
0.650	8686	750	0667	1012	0.690	0912	816	8596	1097
51	1.031 0436	751	0.955 9655	1013	91	1728	817	7499	1099
52	1187	752	8642	1016	92	2545	819	6400	1102
53	1939	754	7626	1017	93	3364	821	5298	1104
54	2693	756	6609	1019	94	4185	823	4194	1106
55	3449	757	5590	1022	95	5008	824	3088	1108
56	4206	759	4568	1023	96	5832	826	1980	1111
57	4965	760	3545	1025	97	6658	829	0869	1114
58	5725	762	2520	1028	98	7487	831	0.950 9755	1116
59	6487	763	1492	1029	99	8318	832	8639	1119
0.660	7250	765	0463	1031	0.700	9150	834	7520	1121
61	8015	766	0.954 9432	1034	01	9984	837	6399	1123
62	8781	768	8398	1035	02	1.036 0821	838	5276	1126
63	9549	770	7363	1038	03	1659	840	4150	1128
64	1.032 0319	771	6325	1040	04	2499	842	3022	1131
65	1090	773	5285	1041	05	3341	843	1891	1134
66	1863	774	4244	1043	06	4184	846	0757	1136
67	2637	776	3201	1046	07	5030	848	0.949 9621	1139
68	3413	778	2155	1048	08	5878	850	8482	1141
69	4191	779	1107	1050	09	6728	852	7341	1144
0.670	4970	781	0057	1053	0.710	7580	854	6197	1146
71	5751	783	0.953 9004	1054	11	8434	856	5051	1149
72	6534	784	7950	1057	12	9290	858	3902	1152
73	7318	786	6893	1058	13	1.037 0148	860	2750	1154
74	8104	788	5835	1061	14	1008	862	1596	1157
75	8892	789	4774	1063	15	1870	864	0439	1159
76	9681	791	3711	1065	16	2734	866	0.948 9280	1162
77	1.033 0472	793	2646	1067	17	3600	868	8118	1166
78	1265	794	1579	1070	18	4468	870	6952	1168
79	2059	796	0509	1071	19	5338	873	5784	1170
0.680	2855		0.952 9438		0.720	6211		4614	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.720	1.037 6211	875	0.948 4614	1173
21	7086	877	3441	1176
22	7963	879	2265	1179
23	8842	881	1086	1181
24	9723	883	0.947 9905	1185
25	1.038 0606	886	8720	1187
26	1492	888	7533	1190
27	2380	890	6343	1193
28	3270	892	5150	1196
29	4162	894	3954	1198
0.730	5056	897	2756	1201
31	5953	899	1555	1205
32	6852	901	0350	1208
33	7753	904	0.946 9142	1210
34	8657	906	7932	1213
35	9563	908	6719	1217
36	1.039 0471	910	5502	1220
37	1381	913	4282	1222
38	2294	915	3060	1225
39	3209	918	1835	1229
0.740	4127	920	0606	1232
41	5047	923	0.945 9374	1235
42	5970	925	8139	1238
43	6895	927	6901	1241
44	7822	930	5660	1244
45	8752	932	4416	1248
46	9684	935	3168	1251
17	1.040 0619	937	1917	1254
48	1556	940	0663	1257
49	2496	943	0.944 9406	1260
0.750	3439	945	8146	1263
51	4384	947	6883	1267
52	5331	950	5616	1271
53	6281	953	4345	1274
54	7234	955	3071	1277
55	8189	958	1794	1280
56	9147	961	0514	1284
57	1.041 0108	963	0.943 9230	1288
58	1071	966	7942	1291
59	2037	969	6651	1294
0.760	3006		5357	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.760	1.041 3006	971	0.943 5357	1298
61	3977	974	4059	1301
62	4951	977	2758	1305
63	5928	980	1453	1308
64	6908	983	0145	1312
65	7891	985	0.942 8833	1316
66	8876	988	7517	1320
67	9864	991	6197	1323
68	1.042 0855	994	4874	1327
69	1849	997	3547	1330
0.770	2846	999	2217	1334
71	3845	1003	0883	1338
72	4848	1006	0.941 9545	1342
73	5854	1008	8203	1345
74	6862	1011	6858	1349
75	7873	1015	5509	1354
76	8888	1018	4155	1358
77	9906	1021	2797	1361
78	1.043 0927	1023	1436	1365
79	1950	1027	0071	1369
0.780	2977	1030	0.947 8702	1373
81	4007	1033	7329	1377
82	5040	1037	5952	1381
83	6077	1040	4571	1386
84	7117	1042	3185	1390
85	8159	1046	1795	1394
86	9205	1049	0401	1398
87	1.044 0254	1053	0.939 9003	1402
88	1307	1056	7601	1406
89	2363	1059	6195	1411
0.790	3422	1063	4784	1415
91	4485	1066	3369	1420
92	5551	1069	1949	1424
93	6620	1073	0525	1428
94	7693	1077	0.938 9097	1433
95	8770	1080	7664	1437
96	9850	1083	6227	1442
97	1.045 0933	1087	4785	1447
98	2020	1091	3338	1451
99	3111	1094	1887	1455
0.800	4205		0432	

x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —	x	F_ω	Diff. +	F_η	Diff. —
0.800	1.045 4205	1098	0.938 0432	1460	0.840	1.050 1305	1272	0.931 7929	1683
01	5303	1101	0.937 8972	1465	41	2577	1277	6246	1680
02	6404	1105	7507	1470	42	3854	1282	4556	1697
03	7509	1109	6037	1475	43	5136	1287	2859	1704
04	8618	1113	4562	1480	44	6423	1293	1155	1711
05	9731	1116	3082	1484	45	7716	1299	0.930 9444	1717
06	1.046 0847	1120	1598	1488	46	9015	1304	7727	1724
07	1967	1124	0110	1494	47	1.051 0319	1309	6003	1731
08	3091	1128	0.936 8616	1499	48	1628	1315	4272	1739
09	4219	1132	7117	1504	49	2943	1320	2533	1746
0.810	5351	1136	5613	1509	0.850	4263	1326	0787	1753
11	6487	1140	4104	1514	51	5589	1333	0.929 9034	1761
12	7627	1144	2590	1519	52	6922	1338	7273	1768
13	8771	1147	1071	1524	53	8260	1344	5505	1776
14	9918	1152	0.935 9547	1530	54	9604	1350	3729	1783
15	1.047 1070	1156	8017	1535	55	1.052 0954	1356	1946	1791
16	2226	1160	6482	1540	56	2310	1362	0155	1799
17	3386	1165	4942	1546	57	3672	1368	0.928 8356	1807
18	4551	1168	3396	1551	58	5040	1375	6549	1815
19	5719	1173	1845	1557	59	6415	1381	4734	1823
0.820	6892	1177	0288	1562	0.860	7796	1387	2911	1831
21	8069	1182	0.934 8726	1567	61	9183	1394	1080	1839
22	9251	1186	7159	1574	62	1.053 0577	1400	0.927 9241	1848
23	1.048 0437	1190	5585	1579	63	1977	1407	7393	1856
24	1627	1195	4006	1585	64	3384	1414	5537	1864
25	2822	1199	2421	1591	65	4798	1420	3673	1873
26	4021	1204	0830	1596	66	6218	1427	1800	1882
27	5225	1208	0.933 9234	1602	67	7645	1435	0.926 9918	1891
28	6433	1213	7632	1608	68	9080	1441	8027	1899
29	7646	1218	6024	1614	69	1.054 0521	1447	6128	1909
0.830	8864	1222	4410	1621	0.870	1968	1455	4219	1918
31	1.049 0086	1227	2789	1626	71	3423	1462	2301	1927
32	1313	1232	1163	1632	72	4885	1469	0374	1937
33	2545	1236	0.932 9531	1638	73	6354	1477	0.925 8437	1946
34	3781	1242	7893	1645	74	7831	1484	6491	1956
35	5022	1247	6248	1651	75	9315	1492	4535	1965
36	6269	1252	4597	1657	76	1.055 0807	1499	2570	1975
37	7521	1256	2940	1664	77	2306	1507	0595	1985
38	8777	1261	1276	1670	75	3813	1515	0.924 8610	1995
39	1.050 0038	1267	0.931 9606	1677	79	5328	1523	6615	2005
0.840	1305		7929		0.880	6851		4610	

x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —	x	F_ω	*Diff.* +	F_η	*Diff.* —
0.880	1.055 6851	1532	0.924 4610	2016	0.920	1.062 5859	1976	0.915 4095	2584
81	8383	1540	2594	2026	21	7835	1992	1511	2602
82	9923	1548	0568	2037	22	9827	2009	0.914 8909	2623
83	1.056 1471	1556	0.923 8531	2047	23	1.063 1836	2025	6286	2644
84	3027	1565	6484	2059	24	3861	2041	3642	2666
85	4592	1574	4425	2069	25	5902	2057	0976	2687
86	6166	1583	2356	2080	26	7959	2075	0.913 8289	2709
87	7749	1591	0276	2092	27	1.064 0034	2092	5580	2730
88	9340	1601	0.922 8184	2104	28	2126	2110	2850	2752
89	1.057 0941	1609	6080	2115	29	4236	2128	0098	2774
0.890	2550	1619	3965	2127	0.930	6364	2147	0.912 7324	2799
91	4169	1628	1838	2139	31	8511	2166	4525	2824
92	5797	1638	0.921 9699	2151	32	1.065 0677	2185	1701	2849
93	7435	1647	7548	2164	33	2862	2206	0.911 8852	2875
94	9082	1657	5384	2176	34	5068	2225	5977	2900
95	1.058 0739	1668	3208	2189	35	7293	2247	3077	2926
96	2407	1677	1019	2202	36	9540	2268	0151	2954
97	4084	1688	0.920 8817	2215	37	1.066 1808	2289	0.910 7197	2981
98	5772	1698	6602	2228	38	4097	2313	4216	3011
99	7470	1708	4374	2241	39	6410	2335	1205	3040
0.900	9178	1720	2133	2255	0.940	8745	2359	0.909 8165	3070
01	1.059 0898	1730	0.919 9878	2270	41	1.067 1104	2383	5095	3101
02	2628	1741	7608	2284	42	3487	2408	1994	3132
03	4369	1753	5324	2298	43	5895	2434	0.908 8862	3165
04	6122	1764	3026	2313	44	8329	2460	5697	3199
05	7886	1776	0713	2327	45	1.068 0789	2487	2498	3232
06	9662	1788	0.918 8386	2342	46	3276	2514	0.907 9266	3268
07	1.060 1450	1799	6044	2358	47	5790	2544	5998	3304
08	3249	1812	3686	2374	48	8334	2572	2694	3341
09	5061	1824	1312	2389	49	1.069 0906	2603	0.906 9353	3380
0.910	6885	1837	0.917 8923	2405	0.950	3509	2634	5973	3420
11	8722	1849	6518	2422	51	6143	2667	2553	3461
12	1.061 0571	1863	4096	2439	52	8810	2699	0.905 9092	3504
13	2434	1876	1657	2455	53	1.070 1509	2734	5588	3547
14	4310	1889	0.916 9202	2472	54	4243	2770	2041	3592
15	6199	1903	6730	2491	55	7013	2807	0.904 8449	3638
16	8102	1917	4239	2509	56	9820	2844	4811	3686
17	1.062 0019	1932	1730	2526	57	1.071 2664	2884	1125	3736
18	1951	1946	0.915 9204	2545	58	5548	2924	0.903 7389	3788
19	3897	1962	6659	2564	59	8472	2967	3601	3842
0.020	5859		4095		0.960	1.072 1439		0.902 9759	

x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.	x	F_ω	Diff.	F_η	Diff.
		+		—			+		—
0.960	1.072 1439	3010	0.902 9759	3898	0.980	1.079 3332	4520	0.893 6990	5812
61	4449	3056	5861	3955	81	7852	4657	1178	5984
62	7505	3104	1906	4016	82	1.080 2509	4806	0.892 5194	6171
63	1.073 0609	3154	0.901 7890	4080	83	7315	4967	0.891 9023	6375
64	3763	3205	3810	4144	84	1.081 2282	5143	2648	6601
65	6968	3260	0.900 9666	4213	85	7425	5338	0.890 6047	6847
66	1.074 0228	3315	5453	4285	86	1.082 2763	5553	0.889 9200	7120
67	3543	3374	1168	4359	87	8316	5796	2080	7426
68	6917	3436	0.899 6809	4436	88	1.083 4112	6070	0.888 4654	7773
69	1.075 0353	3500	2373	4520	89	1.084 0182	6380	0.887 6881	8167
0.970	3853	3569	0.898 7853	4605	0.990	1.084 6562	6741	0.886 8714	8622
71	7422	3641	3248	4697	91	1.085 3303	7164	0092	9158
72	1.076 1063	3716	0.897 8551	4792	92	1.086 0467	7668	0.885 0934	9796
73	4779	3796	3759	4894	93	1.086 8135	8288	0.884 1138	10579
74	8575	3881	0.896 8865	5002	94	1.087 6423	9069	0.883 0559	11568
75	1.077 2456	3971	3863	5116	95	1.088 5492	10103	0.881 8991	12873
76	6427	4066	0.895 8747	5236	96	1.089 5595	11559	0.880 6118	14712
77	1.078 0493	4168	3511	5365	97	1.090 7154	13836	0.879 1406	17595
78	4661	4277	0.894 8146	5504	98	1.092 0990	18244	0.877 3811	23165
79	8938	4394	2642	5652	99	1.093 9234	45073	0.875 0646	57065
0.980	1.079 3332		0.893 6990		1.000	1.098 4307		0.869 3581	