

# Démonstration élémentaire d'un principe de la méthode des moindres carrés

Autor(en): **Le Grand Roy, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **27 (1898-1899)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-88422>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

d'un principe de la méthode des moindres carrés

PAR E. LE GRAND ROY, PROF.

On sait que, pour tirer de  $m$  équations linéaires à  $i$  inconnues, dans le cas de  $m > i$ , les valeurs les plus probables de ces inconnues, on emploie la méthode dite « des moindres carrés », dont il est nécessaire de rappeler brièvement le principe.

$$\text{Soient } \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz \dots = n \\ a'x + b'y + c'z \dots = n' \\ a''x + b''y + c''z \dots = n'' \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (1)$$

les  $m$  équations à résoudre dans lesquelles  $n, n', n'' \dots$  sont des nombres obtenus par observation. On les remplace par  $i$  équations nouvelles, qui s'obtiennent en multipliant chaque équation par le coefficient d'une même inconnue pris dans cette équation, et additionnant les résultats obtenus. La première s'obtiendra donc en multipliant chaque équation par le coefficient de  $x$  qu'elle renferme; la seconde, en multipliant chaque équation par le coefficient de  $y$ , et ainsi de suite. Si donc on pose, pour abrégé :

$$(2) \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots = (aa) & ba + b'a' + b''a'' + \dots = (ba) = (ab) \\ ab + a'b' + a''b'' + \dots = (ab) & b^2 + b'^2 + b''^2 + \dots = (bb) \\ ac + a'c' + a''c'' + \dots = (ac) & bc + b'c' + b''c'' + \dots = (bc) \\ \dots & \dots \\ an + a'n' + a''n'' + \dots = (an) & bn + b'n' + b''n'' + \dots = (bn) \end{cases}$$

et ainsi de suite, on obtient comme équations finales, en nombre égal à celui des inconnues :

$$(3) \begin{cases} (aa)x + (ab)y + (ac)z + \dots = (an) \\ (ba)x + (bb)y + (bc)z + \dots = (bn) \\ (ca)x + (cb)y + (cc)z + \dots = (cn) \\ \dots \end{cases}$$

Les valeurs tirées de ces équations ne vérifient pas rigoureusement les équations (1) : tandis qu'on devrait avoir, si les valeurs observées et les valeurs des inconnues étaient rigoureusement exactes :

$$\begin{cases} ax + by + cz \dots - n = 0 \\ a'x + b'y + c'z \dots - n' = 0 \\ a''x + b''y + c''z \dots - n'' = 0 \\ \dots \end{cases}$$

la substitution dans les équations (1), ainsi modifiées, des valeurs des inconnues tirées des équations (3) donne :

$$(4) \begin{cases} ax + by + cz \dots - n = E \\ a'x + b'y + c'z \dots - n' = E' \\ a''x + b''y + c''z \dots - n'' = E'' \\ \dots \end{cases}$$

les *résidus* E, E', E''... étant d'autant plus petits que les observations sont plus exactes. On prend pour mesure de leur exactitude leur *erreur moyenne*, qui se calcule par la formule

$$E_1 = \pm \sqrt{\frac{E^2 + E'^2 + E''^2 + \dots}{m - i}}$$

ou, en posant

$$E^2 + E'^2 + E''^2 + \dots = (EE) \quad (5) \quad E_1 = \pm \sqrt{\frac{(EE)}{m - i}}$$

Pour le calcul de l'erreur moyenne de chaque inconnue, on applique la règle suivante : dans les équations (3), on accentue les lettres  $x, y, z \dots$ , et on remplace les seconds membres par 1 dans l'une des équations, par 0 dans toutes les autres. On obtient ainsi les systèmes d'équations :

$$(6) \quad \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' \dots = 1 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' \dots = 0 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(6 \text{ bis}) \quad \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' \dots = 0 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' \dots = 1 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' \dots = 0 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(6 \text{ ter}) \quad \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' \dots = 0 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' \dots = 0 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' \dots = 1 \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

en nombre égal à celui des inconnues.

Si alors on tire de (6) la valeur de  $x'$ , de (6 bis) celle de  $y'$ , de (6 ter) celle de  $z' \dots$ , et qu'on appelle  $E_x, E_y, E_z \dots$  les erreurs moyennes des inconnues, on les obtient par les formules

$$(7) \quad E_x = \pm E_1 \sqrt{x'} \quad E_y = \pm E_1 \sqrt{y'} \quad E_z = \pm E_1 \sqrt{z'}$$

C'est de ces formules que nous avons cherché une démonstration nouvelle, celles que donnent les différents ouvrages qui traitent de cette question nous ayant paru manquer, soit de clarté, soit de généralité.

Résolvons par rapport à  $x$  les équations (3), où nous introduisons une 4<sup>me</sup> inconnue  $u$ . On a ainsi les équations

$$(3 \text{ bis}) \begin{cases} (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)u \dots = (an) \\ (ba)x + (bb)y + (bc)z + (bd)u \dots = (bn) \\ (ca)x + (cb)y + (cc)z + (cd)u \dots = (cn) \\ (da)x + (db)y + (dc)z + (dd)u \dots = (dn) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(8) \ x = \frac{\begin{vmatrix} (an) & (ab) & (ac) & (ad) \\ (bn) & (bb) & (bc) & (bd) \\ (cn) & (cb) & (cc) & (cd) \\ (dn) & (db) & (dc) & (dd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (aa) & (ab) & (ac) & (ad) \\ (ba) & (bb) & (bc) & (bd) \\ (ca) & (cb) & (cc) & (cd) \\ (da) & (db) & (dc) & (dd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} (an) & (ab) & (ac) & (ad) \\ (bn) & (bb) & (bc) & (bd) \\ (cn) & (cb) & (cc) & (cd) \\ (dn) & (db) & (dc) & (dd) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{D}$$

D désignant le déterminant du système (3 bis).

Désignons par  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \dots$  les déterminants mineurs relatifs aux termes de la 1<sup>re</sup> colonne. On a alors, en développant :

$$Dx = (an)\Delta_1 - (bn)\Delta_2 + (cn)\Delta_3 - (dn)\Delta_4 + \dots$$

ou, en vertu des formules (2) :

$$\begin{aligned} Dx &= (an + a'n' + a''n'' + \dots) \Delta_1 - (bn + b'n' + b''n'' \dots) \Delta_2 \\ &+ \dots = (a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 - d\Delta_4 \dots) n + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 + c'\Delta_3 \dots) n' \\ &+ (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 \dots) n'' + \dots \end{aligned}$$

Différentions les deux membres et remplaçons les différentielles de  $x, n, n', \dots$  par les erreurs  $E_x, E, E', \dots$ . On obtient :

$$\begin{aligned} DE_x &= (a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 - d\Delta_4 \dots) E + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 + c'\Delta_3 \\ &- d'\Delta_4 \dots) E' + (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 - d''\Delta_4 \dots) E'' + \dots \end{aligned}$$

Elevons les deux membres au carré, et remarquons que, les erreurs accidentelles étant indifféremment positives ou négatives, à chaque double produit tel que  $E E'$  en correspondra un autre égal et de signe contraire. On peut donc négliger les termes qui renferment ces doubles produits, qui se détruisent sensiblement 2 à 2, et on obtient :

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 &= (a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 - d\Delta_4 \dots)^2 E^2 + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 \\ &+ c'\Delta_3 - d'\Delta_4 \dots)^2 E'^2 + (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 - d''\Delta_4 \dots)^2 E''^2 + \dots \end{aligned}$$

Remplaçons chacune des erreurs  $E, E', E'', \dots$  par l'erreur moyenne  $E_1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 &= E_1^2 [(a\Delta_1 - b\Delta_2 + c\Delta_3 \dots)^2 + (a'\Delta_1 - b'\Delta_2 + c'\Delta_3 \dots)^2 \\ &+ (a''\Delta_1 - b''\Delta_2 + c''\Delta_3 \dots)^2 + \dots] \end{aligned}$$

ou, en développant :

$$\begin{aligned} D^2 E_x^2 &= E_1^2 [(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots) \Delta_1^2 - 2(ab + a'b' + a''b'' + \dots) \Delta_1 \Delta_2 \\ &+ b^2 + b'^2 + b''^2 \dots) \Delta_2^2 + 2(ac + a'c' + a''c'' \dots) \Delta_1 \Delta_3 - 2(bc \\ &+ b'c' + b''c'' \dots) \Delta_2 \Delta_3 + (c^2 + c'^2 + c''^2 + \dots) \Delta_3^2 - 2(ad + \\ &a'd' + a''d'' \dots) \Delta_1 \Delta_4 + 2(bd + b'd' + b''d'' \dots) \Delta_2 \Delta_4 - 2(cd + c'd' \\ &+ c''d'' \dots) \Delta_3 \Delta_4 + (d^2 + d'^2 + d''^2 \dots) \Delta_4^2 \dots] \end{aligned}$$

ou, en introduisant les notations abrégées des formules (2),

$$D^2 E_x^2 = E_1^2 [(aa)\Delta_1^2 - 2(ab)\Delta_1\Delta_2 + (bb)\Delta_2^2 + 2(ac)\Delta_1\Delta_3 - 2(bc)\Delta_2\Delta_3 + (cc)\Delta_3^2 - 2(ad)\Delta_1\Delta_4 + 2(bd)\Delta_2\Delta_4 - 2(cd)\Delta_3\Delta_4 + (dd)\Delta_4^2 + \dots]$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$D^2 E_x^2 = E_1^2 [(aa)\Delta_1^2 - (ab)\Delta_1\Delta_2 - (ab)\Delta_1\Delta_2 + (bb)\Delta_2^2 + (ac)\Delta_1\Delta_3 + (ac)\Delta_1\Delta_3 - (bc)\Delta_2\Delta_3 - (bc)\Delta_2\Delta_3 + (cc)\Delta_3^2 - (ad)\Delta_1\Delta_4 - (ad)\Delta_1\Delta_4 + (bd)\Delta_2\Delta_4 + (bd)\Delta_2\Delta_4 - (cd)\Delta_3\Delta_4 - (cd)\Delta_3\Delta_4 + (dd)\Delta_4^2 \dots]$$

ou encore

$$D^2 E_x^2 = E_1^2 \left\{ [(aa)\Delta_1 - (ab)\Delta_2 + (ac)\Delta_3 - (ad)\Delta_4 + \dots] \Delta_1 - [(ab)\Delta_1 - (bb)\Delta_2 + (bc)\Delta_3 - (bd)\Delta_4 + \dots] \Delta_2 + [(ac)\Delta_1 - (bc)\Delta_2 + (cc)\Delta_3 - (cd)\Delta_4 \dots] \Delta_3 - [(ad)\Delta_1 - (bd)\Delta_2 + (cd)\Delta_3 - (dd)\Delta_4 \dots] \Delta_4 + \dots \right\}$$

En se reportant à la formule (8), on voit que

$$D = \begin{vmatrix} (aa)(ab)(ac)(ad) \cdot \\ (ba)(bb)(bc)(bd) \cdot \\ (ca)(cb)(cc)(cd) \cdot \\ (da)(db)(dc)(dd) \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} = (aa)\Delta_1 - (ba)\Delta_2 + (ca)\Delta_3 - (da)\Delta_4 \dots$$

Dans le second membre de l'équation précédente, le coefficient de  $\Delta_1$  est donc égal à D. Ceux des quantités  $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 \dots$  sont les sommes algébriques des produits des termes d'une des colonnes de D par les déterminants mineurs relatifs aux termes d'une autre

colonne, et la théorie des déterminants montre que ces sommes sont nulles.

Cette équation se réduit donc à

$$D^2 E_x^2 = E_1^2 \cdot D \Delta_1$$

d'où

$$E_x = \pm E_1 \sqrt{\frac{\Delta_1}{D}} \quad (9)$$

Reprenons maintenant la formule (8), et développons le numérateur suivant les termes de la première colonne.

On obtient :

$$x = \frac{(an) \Delta_1 - (bn) \Delta_2 + (cn) \Delta_3 - (dn) \Delta_4 + \dots}{D}$$

$(an)$ ,  $(bn)$ ,  $(cn)$  ... étant les 2<sup>ds</sup> membres des équations (3 bis). Mais, d'après les formules (7), on doit avoir :

$$E_x = \pm E_1 \sqrt{x'}$$

$x'$  étant tiré du système

$$(10) \begin{cases} (aa)x' + (ab)y' + (ac)z' + (ad)u' \dots = 1 \\ (ba)x' + (bb)y' + (bc)z' + (bd)u' \dots = 0 \\ (ca)x' + (cb)y' + (cc)z' + (cd)u' \dots = 0 \\ (da)x' + (db)y' + (dc)z' + (dd)u' \dots = 0 \end{cases}$$

Il faut donc, si la règle est juste, que  $x' = \frac{\Delta_1}{D}$ .

Pour le vérifier, remarquons que ces équations ne diffèrent des équations (3 bis) que par leurs 2<sup>ds</sup> membres.



Si donc nous reprenons la formule

$$x = \frac{(an) \Delta_1 - (bn) \Delta_2 + (cn) \Delta_3 - (dn) \Delta_4 + \dots}{D}$$

il suffit, pour qu'elle donne la valeur de  $x'$ , d'y remplacer  $(an)$ ,  $(bn)$ ,  $(cn)$ ..., qui sont les 2<sup>ds</sup> membres des équations (3 bis), par 1, 0, 0... qui sont les 2<sup>ds</sup> membres des équations (10), et on obtient alors

$$x' = \frac{\Delta_1}{D}$$

On peut donc, dans la formule (9), remplacer  $\frac{\Delta_1}{D}$  par  $x'$ , ce qui donne  $E_x = \pm E_1 \sqrt{x'}$ , c'est-à-dire précisément la 1<sup>re</sup> des formules (7). Les autres se justifieraient de la même manière.

—\*—