Sur les diamètres des coniques

Séance du 23 avril 1903

SUR LES DIAMÈTRES DES CONIQUES

PAR E. LE GRAND ROY, PROF.

Le but de la présente note est un essai d'exposition des propriétés des diamètres des coniques, et particulièrement des diamètres conjugués, par des considérations tout à fait élémentaires, ces propriétés étant d'ailleurs déduites directement de l'équation générale. Rappelons d'abord les formules connues.

1. Soient $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ l'équation d'une conique, et $y = mx + n$ l'équation d'une sécante quelconque. Les points d'intersection auront pour abscisses les racines de l'équation

$$Ax^2 + 2Bx(mx + n) + C(mx + n)^2 + 2Dx \\ + 2E(mx + n) + F = 0$$

ou

$$(A + 2Bm + Cm^2)x^2 + 2(Bn + Cmn + D + Em)x \\ + Cn^2 + 2En + F = 0$$

L'abscisse du milieu de la corde est par conséquent

$$x = -\frac{Bn + Cmn + D + Em}{A + 2Bm + Cm^2}:$$

on aura donc l'équation du diamètre, c'est-à-dire du lieu des milieux des cordes ayant m pour coefficient angulaire, en éliminant n entre cette équation et celle de la corde; on obtient ainsi

$$x = -\frac{B(y - mx) + Cm(y - mx) + D + Em}{A + 2Bm + Cm^2},$$

ou, en réduisant,

$$(1) \qquad (A + Bm)x + (B + Cm)y + D + Em = 0$$

Ce diamètre a pour coefficient angulaire

$$m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm}$$

Cette égalité peut s'écrire aussi

$$(2) \qquad A + B(m + m') + Cmm' = 0$$

et de ce qu'elle est symétrique par rapport à m et m', on conclut à l'existence de deux diamètres ayant respectivement pour coefficients angulaires m et m' et dont chacun est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre; c'est ce qu'on nomme, comme on sait, des *diamètres conjugués*.

2. On sait que les coordonnées du centre s'obtiennent en résolvant le système (3)

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + E = 0 \end{cases}$$

qui se forme en annulant séparément les dérivées partielles par rapport à x et à y du premier membre de l'équation de la conique. Ces équations sont évidemment celles de deux diamètres et doivent par conséquent se déduire de l'équation (1) par un choix convenable du coefficient m. La première s'obtient immédiatement en faisant $m = 0$: mais il n'en est pas de même de la seconde. Pour trouver comment cette dernière dérive de l'équation (1), appelons ω l'angle des axes, et θ l'angle que le diamètre représenté par cette équation forme avec l'axe des x; on sait alors que

$$m = \frac{\sin \theta}{\sin(\omega - \theta)}.$$

Par l'introduction de cette valeur, l'équation (1) devient

$$[A \sin(\omega - \theta) + B \sin \theta] x + [B \sin(\omega - \theta) + C \sin \theta] y \\ + D \sin(\omega - \theta) + E \sin \theta = 0$$

On voit alors immédiatement que cette équation donne la première des équations (3) pour $\theta = 0$, et la seconde pour $\theta = \omega$: autrement dit les équations (3) sont celles des diamètres correspondant aux cordes parallèles aux axes. La première se déduit de l'équation (1) pour $m = 0$, la seconde pour $m = \infty$, valeur que prend en effet m pour $\theta = \omega$.

3. Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation de la conique prend la forme

$$A x^2 + 2 Bxy + Cy^2 + P = 0,$$

et celle des diamètres devient

$$(A + Bm) x + (B + Cm) y = 0.$$

Si l'on veut prendre pour nouveaux axes deux diamètres correspondant à des cordes formant avec l'axe des x les angles θ et θ', on sait que les formules de transformation sont

$$\begin{cases} x = x' \sin(\omega - \theta) + y' \sin(\omega - \theta') \\ y = x' \sin \theta \qquad\qquad + y' \sin \theta' \end{cases}.$$

Mais, par suite des relations

$$m = \frac{\sin \theta}{\sin(\omega - \theta)}, \quad m' = \frac{\sin \theta'}{\sin(\omega - \theta')},$$

ces formules peuvent s'écrire aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{x' \sin \theta}{m} + \dfrac{y' \sin \theta'}{m'} \\ y = x' \sin \theta + y' \sin \theta' \end{array} \right.$$

L'équation de la conique devient

$$A \left(\frac{x' \sin \theta}{m} + \frac{y' \sin \theta'}{m'} \right)^2 + 2B \left(\frac{x' \sin \theta}{m} + \frac{y' \sin \theta'}{m'} \right)$$
$$(x' \sin \theta + y' \sin \theta') + C(x' \sin \theta + y' \sin \theta)^2 + P = 0$$

ou en ordonnant

$$(A + 2Bm + Cm^2) m'^2 x'^2 \sin^2 \theta + 2[A + B(m + m') + Cmm']$$
$$mm' x' y' \sin \theta \sin \theta' + (A + 2Bm' + Cm'^2) m^2 y'^2 \sin^2 \theta'$$
$$+ Pm^2 m'^2 = 0$$

Si les diamètres sont conjugués, le terme en x' y' s'annule en vertu de l'équation (2), et l'équation de la courbe devient

$$(A + 2Bm + Cm^2) m'^2 x'^2 \sin^2 \theta + (A + 2Bm' + Cm'^2)$$
$$m^2 y'^2 \sin^2 \theta' + Pm^2 m'^2 = 0.$$

4. Les distances de l'origine aux points où les axes rencontrent la courbe s'obtiennent en faisant successivement $y' = 0$ et $x' = 0$ dans l'équation précédente. Si on les appelle X et Y, on a ainsi

$$(4)\quad \begin{cases} X^2 = \dfrac{-Pm^2}{(A+2Bm+Cm^2)\sin^2\theta}, \\[2ex] Y^2 = \dfrac{-Pm'^2}{(A+2Bm'+Cm'^2)\sin^2\theta'}. \end{cases}$$

5. Les formules précédentes donnent, par multiplication,

$$X^2 Y^2 = \frac{P^2 m^2 m'^2}{(A+2Bm+Cm^2)(A+2Bm'+Cm'^2)\sin^2\theta\sin^2\theta'},$$

d'où, pour l'aire du parallélogramme construit sur les demi-diamètres,

$$XY\sin(\theta'-\theta) = \frac{\pm Pmm'\sin(\theta'-\theta)}{\sin\theta\sin\theta'\sqrt{(A+2Bm+Cm^2)(A+2Bm'+Cm'^2)}}$$

Il faut prouver que cette expression est constante, c'est-à-dire indépendante de m, m', θ et θ'.

Le $\sqrt{\ }$ se réduit aisément à $(m'-m)\sqrt{AC-B^2}$: il suffit pour cela, après avoir développé, de soustraire du résultat le développement de

$$[A+B(m+m')+Cmm']^2 = 0.$$

D'autre part, de

$$m = \frac{\sin\theta}{\sin(\omega-\theta)} \quad \text{et} \quad m' = \frac{\sin\theta'}{\sin(\omega-\theta')}$$

on tire

$$\begin{cases} ty\,\theta = \dfrac{m\sin\omega}{1+m\cos\omega} \\[2ex] ty\,\theta' = \dfrac{m'\sin\omega}{1+m'\cos\omega} \end{cases}$$

puis

$$\left\{\begin{array}{ll} \sin\theta = \dfrac{m\sin\omega}{\sqrt{1+2m\cos\omega+m^2}} & \cos\theta = \dfrac{1+m\cos\omega}{\sqrt{1+2m\cos\omega+m^2}} \\ \sin\theta' = \dfrac{m'\sin\omega}{\sqrt{1+2m'\cos\omega+m'^2}} & \cos\theta' = \dfrac{1+m'\cos\omega}{\sqrt{1+2m'\cos\omega+m'^2}} \end{array}\right.$$

Par suite,

$$\sin(\theta'-\theta) = \frac{(m'-m)\sin\omega}{\sqrt{(1+2m\cos\omega+m^2)(1+2m'\cos\omega+m'^2)}};$$

$$\sin\theta\sin\theta' = \frac{mm'\sin^2\omega}{\sqrt{(1+2m\cos\omega+m^2)(1+2m'\cos\omega+m'^2)}}.$$

La substitution de ces diverses expressions donne pour l'aire du parallélogramme

$$\frac{P}{\sin\omega\sqrt{AC-B^2}},$$

expression indépendante de la position des diamètres.

6. L'addition membre à membre des équations (4) donne

$$X^2+Y^2 = \frac{-P[(A+2Bm'+Cm'^2)m^2\sin^2\theta' + (A+2Bm+Cm^2)m'^2\sin^2\theta]}{(A+2Bm+Cm^2)(A+2Bm'+Cm'^2)\sin^2\theta\sin^2\theta'},$$

ou, en remplaçant $\sin^2\theta$ et $\sin^2\theta'$ par leurs expressions, ainsi que le produit qui figure au dénominateur,

$$X^2+Y^2 = \frac{-P[(A+2Bm'+Cm'^2)(1+2m\cos\omega+m^2)}{(m'-m)^2(AC-B^2)\sin^2\omega} \frac{+(A+2Bm+Cm^2)(1+2m'\cos\omega+m'^2)]}{(m'-m)^2(AC-B^2)\sin^2\omega}.$$

Il peut paraître difficile de rendre cette expression indépendante de m et de m'; on y arrive cependant assez aisément à l'aide de la relation (2). En effet, le multiplicateur de $-P$ peut s'écrire

$$2A + 2B(m+m') + C(m^2+m'^2) + 2\cos\omega\,[A(m+m') + 4Bmm' + Cmm'(m+m')] + A(m^2+m'^2) + 2Bmm'(m+m') + 2Cm^2m'^2$$

Mais, d'après (2),

$$A + B(m+m') = -Cmm'; \quad A + Cmm' = -B(m+m'); \quad B(m+m') + Cmm' = -A,$$

et l'expression précédente devient

$$C(m'-m)^2 - 2B\cos\omega\,(m'-m)^2 + A(m'-m)^2 = (A - 2B\cos\omega + C)(m'-m)^2.$$

On a donc finalement

$$X^2 + Y^2 = \frac{-P(A - 2B\cos\omega + C)}{(AC - B^2)\sin^2\omega}.$$

La somme des carrés des demi-diamètres conjugués est donc constante.

7. La tangente en un point (x', y') de la courbe a, comme on sait, pour équation

$$Axx' + B(xy' + yx') + Cyy' + D(x+x') + E(y+y') + F = 0$$

qui peut s'écrire aussi

$$(Ax' + By' + D)x + (Bx' + Cy' + E)y + Dx' + Ey' + F = 0.$$

Son coefficient angulaire est donc

$$-\frac{Ax' + By' + D}{Bx' + Cy' + E}.$$

D'après l'équation (1), le coefficient angulaire du diamètre conjugué au diamètre passant par le point de contact est donné par l'équation

$$(A + Bm)x' + (B + Cm)y' + D + Em = 0,$$

d'où l'on tire

$$m = -\frac{Ax' + By' + D}{Bx' + Cy' + E},$$

valeur égale à la précédente; la tangente est donc parallèle au conjugué du diamètre passant par le point de contact.

Les calculs relatifs à l'hyperbole et à la parabole seraient à peu près pareils : nous nous dispensons de les faire, pour abréger.