Les origines de la théorie des fractions continues

Séance du 13 novembre 1903

LES ORIGINES DE LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

PAR L. ISELY, PROF.

Les exemples ne sont pas rares dans les annales des mathématiques de découvertes attribuées des années, voire des siècles durant, à ceux qui n'en étaient pas réellement les auteurs. Ainsi en a-t-il été des fractions continues. Dans la presque totalité des traités actuels sur cette matière, on affirme couramment que cette élégante théorie est due à lord Brouncker, chancelier d'Angleterre sous Charles II, qui, incité par son ami John Wallis, s'en servit, vers 1665, pour donner à la constante π une forme plus pratique. Tel n'est pourtant point le cas. On en trouve les germes dans deux ouvrages publiés au commencement du XVII^me^ siècle par Cataldi, en Italie, et Schwenter, en Allemagne. On en rencontre même des traces dans les œuvres de certains arithmologues des antiquités grecque et indienne: Pythagore, Euclide, Archimède, Héron d'Alexandrie, Théon de Smyrne, Âpastamba, Baudhâyana, Kâtyâyana, les trois principaux collaborateurs, malheureusement trop peu connus, des Çulvasûtras hindous.

Pythagore et ses disciples avaient, par une démonstration demeurée célèbre, établi définitivement l'incommensurabilité du rapport de la diagonale d'un carré à son côté, et donné, ce faisant, une première figuration graphique du développement de $\sqrt{2}$. Les géomètres de l'Inde imaginèrent, pour l'extraction des racines carrées en général, un procédé aussi simple qu'ingénieux. Rappelons-le succinctement. Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'évaluer approximativement $\sqrt{2}$. A cet effet, on considère 2 comme le produit des nombres 1 et 2, dont la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique sont respectivement $\frac{3}{2}$ et $\frac{4}{3}$, de produit égal à 2. En répétant sur ces deux nombres les mêmes opérations, on obtient $\frac{17}{12}$ et $\frac{24}{17}$, puis $\frac{577}{408}$ et $\frac{816}{577}$, et ainsi de suite. On forme ainsi deux suites infinies de nombres : les moyennes arithmétiques et les moyennes harmoniques. On démontre alors facilement par le calcul ou par une figure géométrique que les premières vont en décroissant, tout en surpassant $\sqrt{2}$; que les secondes vont en croissant sans dépasser $\sqrt{2}$, et que la différence des deux moyennes du même rang décroît avec une très grande rapidité (Lucas).

En réalité, ce procédé revient à calculer les réduites d'ordre pair de la fraction continue périodique (1, 2, 2, 2, ...), dont les indices vont en progression géométrique, à savoir : $r_2 = \frac{3}{2} = 1,5$; $r_4 = \frac{17}{12} = 1,41666...$; $r_8 = \frac{577}{408} = 1,\,414215\underline{7}$. Comme on le sait, la valeur approchée de $\sqrt{2}$ est, avec sept décimales, 1,414213$\underline{6}$.

C'est aussi en cherchant un moyen expéditif d'extraire la racine carrée d'un nombre, que Pietro Antonio Cataldi parvint à développer celle de 18 en fraction continue, dans son *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*, imprimé en 1613. Les notations qu'il y emploie sont, à peu de chose près, celles dont nous faisons encore usage de nos jours, en ligne oblique ou horizontale. Ainsi il écrit tout d'abord :

$$\sqrt{18} = 4 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cfrac{2}{8 \,\&\, \cdots}}}$$

Mais, trouvant sans doute cette disposition en diagonale peu commode pour l'impression, il la remplace tòt après par celle-ci, plus concise et partant plus avantageuse,

$$\sqrt{18} = 4 \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \cdots\cdots,$$

le point, placé à droite de chaque dénominateur 8, marquant que la fraction suivante fait partie de ce dénominateur même. Cette disposition a été adoptée par les mathématiciens anglais, qui écrivent

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\,\frac{2}{8+}\cdots\cdots.$$

Cataldi fait voir, en outre, mais sans démonstration, que deux valeurs consécutives d'une pareille suite comprennent entre elles la racine cherchée. C'est, comme on le sait, une des propriétés essentielles des réduites.

Quelques années plus tard, en 1617, selon les uns, en 1625, selon les autres, Daniel Schwenter, dans sa *Geometria practica nova et aucta*, indiqua un moyen d'exprimer en nombres plus petits les termes de certains rapports. A cet effet, il considère les deux nombres premiers entre eux 177 et 233, et cherche à remplacer leur quotient par des fractions plus simples. Par un procédé qui rappelle étonnamment notre loi de formation des réduites, il obtient les résultats suivants : $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{79}{104}$. Schwenter mourut en 1636. Cette année même, ses enfants publièrent un recueil de problèmes, sous le titre de *Deliciæ physico-mathematicæ oder Mathematische und philosophische Erquickstunden,* qui est, en langue allemande, le pendant de l'ouvrage classique de Bachet de Méziriac : *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres*, dont la première édition date de 1612. La 87me question de la partie I des *Erquickstunden* s'occupe du même rapport $\frac{177}{233}$; mais, parlant de la suite $\frac{79}{104}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{1}$, Schwenter ajoute cette remarque importante : « Je weiter man von dem untersten hinaufsteiget, je mehr es fehlet. Zum Exempel, $\frac{79}{104}$ seynd näher bey $\frac{177}{233}$ als $\frac{19}{25}$, und $\frac{19}{25}$ als $\frac{3}{4}$, und so fortan. » Aujourd'hui nous dirions : De deux réduites consécutives, la plus avancée est celle qui approche le plus de la valeur de la fraction continue. Cette propriété a valu aux réduites le qualificatif de fractions convergentes.

Aux noms de Cataldi et de Schwenter, il convient d'associer celui d'Albert Girard. Né, sur la fin du XVIe siècle, à Saint-Mihiel, en Lorraine, cet esprit original dut, ensuite de persécutions religieuses, se réfugier en Hollande, où il fit la connaissance du docte ingénieur Simon Stevin de Bruges, le maître et l'ami de Maurice de Nassau. En 1629, Girard publia, à Amsterdam, un ouvrage remarquable : *Invention nouvelle en l'Algèbre*, qui renferme, entre autres, les relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique. Ce fut le début de l'élégante théorie des fonctions symétriques. Fervent admirateur des œuvres de Stevin, écrites en flamand, il consacra la seconde moitié de sa vie à les collectionner et à les traduire en français. L'édition, qu'en dépit de la misère, il préparait avec une sollicitude désintéressée, ne put paraître qu'une année environ après sa mort, en 1634, à Leyde, chez Bonaventure et Abraham Elsevier, imprimeurs-ordinaires de l'Université.

Parmi les nombreuses notes d'Albert Girard, juxtaposées au texte de Stevin, celle qui accompagne les six livres d'Algèbre de Diophante, vol. I, mérite une mention toute spéciale. M. Georges Maupin, qui l'a scrutée et analysée jusque dans ses moindres détails, arrive à la conviction que son auteur connaissait les fractions continues et les utilisait à l'occasion. Voici comment il appuie son argumentation:

Le dernier passage de cette note est conçu en ces termes: « Puis que suis entré en la matiere des nombres rationaux, j'adjousteray encor deux ou trois particularitez non encor par cy devant practiquées, comme d'explicquer les radicaux extremement pres, par certains nombres à ce plus aptes et idoines que les autres, tellement que si l'on entreprenoit les mesmes choses par des autres nombres ce ne seroit sans grandement augmenter le nombre des characteres; et pour exemple soit proposé d'explicquer par des rationaux la raison des segmens de la ligne coupée en la moyenne et extreme raison, soit faicte une telle progression 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc. dont chasque nombre soit égal aux deux precedens, alors deux nombres pris immediatement denotteront la mesme raison, comme 5 à 8 ou 8 à 13, etc. et tant plus grands, tant plus pres....., tellement que 13, 13, 21 constituent assez precisement un triangle Isosceles ayant l'angle du pentagone; Item pour l'extraction de la racine quarrée des nombres non quarrez, comme la racine de 2 c'est $\frac{577}{408}$, voulez vous plus pres $\frac{1393}{985}$; et ainsi en l'infini comme on pourroit prendre des si grands nombres qu'on voudroit; la racine de 10 est $3\frac{53353}{328776}$, bien pres, car son quarré est $\frac{1}{108093658176}$ trop, qui est une chose de nulle estime, comme d'autre costé en la disme le quarré de 163574218751 ⑦ est tres-pres de 2675652504 ⑭, mais combien s'en faut-il? seulement 1 ⑭, en somme la maniere de remettre en petits nombres une raison explicquée par grands nombres, et ayans tres-pres la mesme vigueur, et sous un mesme genre, comme le 7 à 22 d'Archimedes, et pour ne point passer les limites nous mettrons icy la fin, advertissant le lecteur qu'il ne se mescontente s'il n'a trouvé des fleurs de Retorique en un Jardin là où le champ du discours n'a nullement esté labouré, laissant les mesmes là où on les doibt cercher. »

Ce passage n'offre, en effet, rien de littéraire, ni de bien attrayant. Par contre, comme le fait très justement remarquer M. Maupin, il abonde en renseignements précieux sur les fractions continues. En premier, Girard fait usage, pour diviser une droite de longueur donnée en moyenne et extrême raison, de la fameuse suite de Fibonacci (Léonard de Pise), dont il indique la loi de formation des termes, définie par la relation générale $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Cette série récurrente l'amène à remplacer le rapport irrationnel du côté du décagone régulier convexe au rayon du cercle circonscrit par des fractions plus simples qui s'en approchent de plus en plus. Or, ces fractions: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots\ldots$, obtenues en formant le rapport de deux termes consécutifs de la suite, sont précisément les réduites successives de la fraction continue :

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

En botanique, ces mêmes réduites représentent la position la plus commune des feuilles alternes sur la tige.

Comme Cataldi, Girard applique ensuite les fractions continues à l'extraction des racines carrées incommensurables. A celle de 2, dont il a déjà été question, il substitue la huitième réduite $\frac{577}{408}$, puis, désirant avoir une approximation plus grande, la neuvième $\frac{1893}{985}$. Il se montre plus explicite encore en ce qui concerne $\sqrt{10}$. On a :

$$\sqrt{10}=3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cdots}}}$$

La huitième réduite est

$$\frac{1039\,681}{328\,776}=3\,\frac{53\,353}{328\,776}.$$

Etant d'ordre pair, elle est supérieure à $\sqrt{10}$; de plus, l'erreur commise en la prenant comme valeur de cette racine est inférieure à

$$\frac{1}{(328\,776)^2} = \frac{1}{108\,093\,658\,176}.$$

Ces deux assertions, on le voit, sont conformes au texte de la note précitée. Girard connaissait-il le traité de Cataldi, publié quelque vingt ans auparavant? Rien dans ses écrits ne le prouve. Quoi qu'il en soit, si la méthode semble la même, il est parvenu à un degré de précision inconnu de son devancier.

Après avoir, probablement par la voie ordinaire, formé le carré de la fraction $\frac{163574218751}{10^7}$, et être arrivé au résultat juste

$$\frac{26\,756\,525\,040\,000\,000\,000\,001}{10^{14}} = \frac{2675\,652\,504}{10} + \frac{1}{10^{14}},$$

Albert Girard, à l'instar de Schwenter, insiste sur la manière « de remettre en petits nombres une raison expliquée par grands nombres, et ayant très près la même vigueur », et prend pour exemple la fraction $\frac{22}{7}$, donnée par Archimède comme limite supérieure du rapport de la circonférence à son diamètre. Or cette valeur est précisément celle de la seconde réduite du développement de π en fraction continue. Il est regrettable que, dans sa hâte d'achever, notre auteur ait omis de citer la valeur plus approchée de beaucoup $\frac{355}{113}$, trouvée au commencement du même siècle par le géomètre hollandais Adrien Anthoniszoon dit Métius.

OUVRAGES CONSULTÉS

M. CANTOR. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

J. BOYER. *Histoire des Mathématiques.*

FAVARO. *Notizie storiche sulle frazioni continue* dans le *Bulletino Boncompagni*, VII.

GÜNTHER. *Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche.*

LIBRI. *Histoire des Sciences mathématiques en Italie.*

ED. LUCAS. *Théorie des nombres.*

MAX. MARIE. *Histoire des sciences mathématiques et physiques.*

G. MAUPIN. *Opinions et Curiosités touchant la Mathématique*, 2me série.

R. WOLF. *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur.*