Surface de Riemann, de la fonction ? = arc sin z

SURFACE DE RIEMANN, DE LA FONCTION $\zeta = \arcsin z$

Par Louis GABEREL, Prof.

On sait que la surface de Riemann de la fonction $\zeta = \arcsin z$ doit être composée d'une infinité de couples de feuillets, ce qui résulte de la double infinité de déterminations correspondant à la formule

$$\zeta = \frac{1}{i} \log \left(zi \pm \sqrt{1 - z^2} \right)$$

Je représenterai le système de déterminations relatif au signe $+$ par ζ_+ et le système relatif au signe $-$ par ζ_-. En sorte que si l'on met en évidence le module de périodicité $2\pi i$ du logarithme, on aura pour définir les deux systèmes :

$$\zeta_+ = \frac{1}{i} \log \left(zi + \sqrt{1 - z^2} \right) + 2n\pi$$

$$\zeta_- = \frac{1}{i} \log \left(zi - \sqrt{1 - z^2} \right) + 2n\pi,$$

n désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif.

On sait d'ailleurs que si ζ_+' représente une valeur particulière quelconque du premier système, on peut toujours trouver une détermination ζ_-' du deuxième telle qu'on ait

$$\zeta_-' = \pi - \zeta_+'.$$

Les deux systèmes pourront donc être rapportés à une détermination particulière du premier système comme suit :

$$\zeta_+ = \zeta_+' + 2n\pi \qquad \zeta_- = (2n+1)\pi - \zeta_+'.$$

Pour simplifier la notation, j'appellerai ζ_0 une détermination du premier système que je ferai correspondre à $n=0$, ce qui revient simplement à poser $\zeta_+' = \zeta_0$. Les déterminations des deux systèmes pourront dès lors être mises en correspondance de la manière suivante :

Système ζ_+		Système ζ_-
ζ_0	. . . .	$\pi - \zeta_0$
$\zeta_0 + 2\pi$	. . . . . .	$3\pi - \zeta_0$
$\zeta_0 + 4\pi$	. . . . . .	$5\pi - \zeta_0$
. . . . .	. . . . .	. . . .

et

$\zeta_0 - 2\pi$	. . . . . .	$-\pi - \zeta_0$
$\zeta_0 - 4\pi$	. . . . . .	$-3\pi - \zeta_0$
$\zeta_0 - 6\pi$	. . . . . .	$-5\pi - \zeta_0$
. . . . .	. . . . .	. . . . .

La surface de Riemann doit être composée d'une infinité de feuillets superposés qu'on peut imaginer numérotés positivement et négativement à partir de l'un quelconque d'entre eux pris pour feuillet origine ou *zéro*.

La fonction $\zeta = \arcsin z$ a deux points de ramification, savoir -1 et $+1$, autour desquels se permutent deux à deux les déterminations du premier système avec celles du second.

De plus, $\zeta = \arcsin z$ a deux points critiques à l'∞. Ces points peuvent être censés situés respectivement dans chacun des deux feuillets de la surface représentative de la fonction

$$\zeta' = zi \pm \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Autour de ces points ∞, c'est-à-dire lorsque z décrit une courbe fermée autour de $+1$ et -1 dans l'un ou l'autre de ces deux feuillets, les déterminations d'un même système passent l'une dans la suivante.

L'infinité de feuillets de la surface de Riemann pourra être considérée comme une infinité de doubles feuillets identiques à ceux de la surface de

$$\zeta' = zi \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

On coupera l'infinité de doubles feuillets d'abord de -1 à $+1$. On coupera ensuite cette même infinité de doubles feuillets entre les points infinis, et comme, à cet effet, il faudra passer d'un feuillet dans le suivant, on effectuera cette coupure transversalement à la ligne de passage -1 à $+1$. Le plus simple sera de faire la deuxième section tout le long de l'axe imaginaire, une première partie étant faite dans l'un des feuillets au-dessus de la ligne -1 à $+1$ jusqu'à celle-ci, l'autre partie étant faite à partir de cette ligne et au-dessous dans l'autre feuillet.

Il n'y a nul inconvénient à placer les dessins des coupes de quelques feuillets précisément sur les lignes de passage correspondantes. Figurons sur le feuillet origine le point de la surface de Riemann auquel on fait correspondre la valeur ζ_0 et écrivons ζ_0 à côté de ce point et les autres déterminations à côté des autres points superposés. On aura une figure qui sera en même temps un plan et une coupe et dans laquelle on n'a pas encore établi la connexion des feuillets à travers les lignes de passage.

Il s'agit d'établir cette connexion. A cet effet, il faudra tenir compte des propriétés suivantes :

1° Un lacet autour de $+1$ fait passer

$$\begin{array}{llll} \zeta_0 & \text{en } \pi - \zeta_0 & \text{et } \pi - \zeta_0 & \text{en } \zeta_0 \\ \zeta_0 + 2\pi & \text{en } 3\pi - \zeta_0 & \text{et } 3\pi - \zeta_0 & \text{en } \zeta_0 + 2\pi, \text{ etc.}; \end{array}$$

2° Un lacet autour de -1 fait passer

$$\begin{array}{llll} \zeta_0 & \text{en } -\pi - \zeta_0 & \text{et } -\pi - \zeta_0 & \text{en } \zeta_0 \\ \zeta_0 + 2\pi & \text{en } \pi - \zeta_0 & \text{et } \pi - \zeta_0 & \text{en } \zeta_0 + 2\pi \\ \zeta_0 - 2\pi & \text{en } -3\pi - \zeta_0 & \text{et } -3\pi - \zeta_0 & \text{en } \zeta_0 - 2\pi, \text{ etc.} \end{array}$$

3° Une courbe apparemment fermée autour de $+1$ puis de -1 fait passer

$$\begin{array}{llll} \zeta_0 & \text{en } \zeta_0 + 2\pi & \text{et } \zeta_0 + 2\pi & \text{en } \zeta_0 + 4\pi \\ \zeta_0 + 4\pi & \text{en } \zeta_0 + 6\pi, \text{ etc.} & & \end{array}$$

et

$$\pi - \zeta_0 \text{ en } -\pi - \zeta_0 \text{ et } -\pi - \zeta_0 \text{ en } -3\pi - \zeta_0, \text{ etc.}$$

Pour que ces conditions soient réalisées, on établira la connexion comme suit :

1° *A travers la ligne de passage* de -1 à $+1$: on reliera les feuillets 0 et 1 en croisant, de même pour les couples 2 et 3, 3 et 4... -1 et -2, -3 et -4, etc.

2° *A travers la coupure le long de l'axe imaginaire :* on reliera *au-dessus de l'axe réel* et en franchissant la coupure dans le sens des x négatifs, les feuillets pairs 0 et -2, -2 et -4, -4 et -6... 2 et 0, 4 et 2, etc. ; *au-dessous de l'axe réel,* on reliera les feuillets impairs dans le même sens des x négatifs 1 à — 1, — 1 à — 3, etc. Les feuillets non reliés à d'autres se continuent par eux-mêmes à travers la coupure.

Voici quel sera l'aspect du plan-coupe de la surface de Riemann avec l'indication des sept feuillets — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3 :