**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
**Herausgeber:** Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
**Band:** 33 (1904-1905)

**Artikel:** Sur les formules fondamentales de la trigonométrie
**Autor:** Legrandroy, E.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-88522

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# SUR
# LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRIGONOMÉTRIE

PAR E. LEGRANDROY, PROFESSEUR

Une démonstration de ces formules doit réunir, si possible, la clarté, la généralité et la simplicité. A ce triple point de vue, aucune ne surpasse celle que Chasles a donné dans sa « Géométrie supérieure » : mais elle suppose déjà connue la notion du rapport anharmonique, qu'à tort ou à raison on n'a pas coutume d'introduire dans l'enseignement élémentaire. La démonstration par la méthode des projections, très générale aussi, n'est pas aisément accessible aux jeunes élèves, pour lesquels elle ne parle pas assez aux yeux. A mon avis, basé sur de multiples expériences, la démonstration la mieux appropriée à l'enseignement élémentaire est celle qui s'appuie sur le théorème de Ptolémée, parce qu'elle est extrêmement simple et se prête sans difficulté à la généralisation. Le principe en est connu depuis longtemps pour le calcul de $\sin(a+b)$; mais, à ma connaissance, sa généralisation et son application aux autres formules analogues n'ont jamais été publiées. C'est cette lacune que je me propose de combler dans la présente note.

La démonstration repose sur les principes suivants :

1° Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales équivaut à la somme des produits des côtés opposés.

2° Dans un cercle du rayon 1, le sinus d'un arc a pour mesure la demi-corde de l'arc double.

3° Quelque soit l'arc $x$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = - \cos x$,

$\sin(x - \pi) = - \sin x, \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \cos(-x) = \cos x.$

I. *Calcul de* $\sin(a + b)$. Portons sur une circonférence de rayon 1 $\overset{\frown}{CD} = 2a$, $\overset{\frown}{CE} = 2b$; menons le diamètre CF et construisons le quadrilatère. La figure 1 donne

$$\overset{\frown}{DF} = 2a - \pi, \overset{\frown}{DE} = 2a + 2b - 2\pi, \overset{\frown}{EF} = 2b - \pi,$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{lll} CD = 2\sin a & DF = 2\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos a & CF = 2 \\ CE = 2\sin b & DE = 2\sin(a + b - \pi) = -2\sin(a+b) & \\ & EF = 2\sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos b. & \end{array}\right.$$

L'égalité $CF \times DE = CE \times DF + DC \times EF$

devient ainsi

$$-2.2\sin(a + b) = 2\sin b\,(-2\cos a) + 2\sin a\,(-2\cos b),$$

ou, en simplifiant,

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

On voit aisément que la démonstration est applicable telle quelle à tout cas, pourvu qu'on tienne compte des signes. Elle n'a été faite jusqu'ici, que je sache, que pour

$$2a < \pi \text{ et } 2b < \pi.$$

II. *Calcul de* $\sin(a-b)$. On porte de nouveau, sur une circonférence de rayon 1, $\widehat{CD}=2a$, $\widehat{CE}=2b$, mais cette fois les deux arcs dans le même sens. On a alors $\widehat{DF}=2a-\pi$ $\widehat{DE}=2a-2b$ $\widehat{EF}=\pi-2b$; puis dans le quadrilatère,

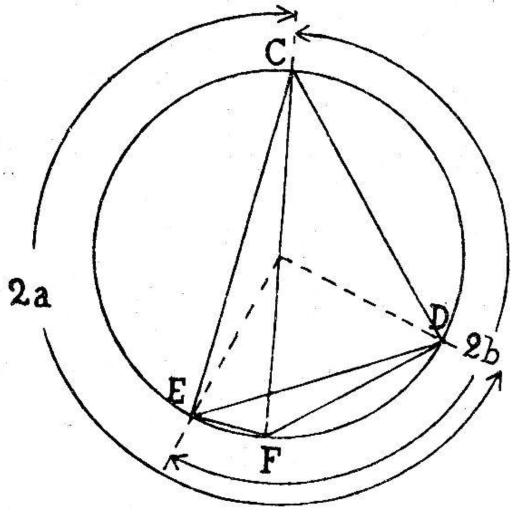


Fig. 1.

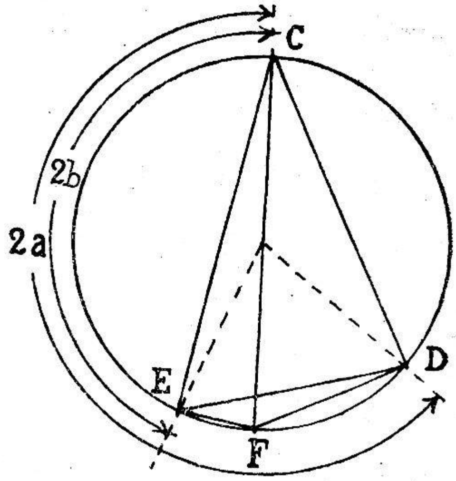


Fig. 2.

$$\begin{cases} CD=2\sin a \quad DF=2\sin\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos a \quad ED=2\sin(a-b) \\ CE=2\sin b \quad EF=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-b\right)=2\cos b \quad CF=2; \end{cases}$$

et la même égalité, déjà employée, devient

$$2.2\sin(a-b)=2\sin b(-2\cos a)+2\sin a\,.\,2\cos b,$$

ou, en simplifiant,

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.$$

III. *Calcul de* $\cos(a+b)$.

$$\cos(a+b)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=-\sin\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right):$$

Il suffira donc de prendre, dans la fig. 1, $\widehat{CD}=2a, \widehat{CE}=2b-\pi$: alors $\widehat{DF}=2a-\pi, \widehat{EF}=2b-2\pi,$ $\widehat{DE}=2a+2b-\pi-2\pi$; puis

$$\mathrm{CD} = 2\sin a \qquad \mathrm{DF} = 2\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos a$$

$$\mathrm{CE} = 2\sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos b \quad \mathrm{EF} = 2\sin(b-\pi) = -2\sin b$$

$$\mathrm{CF} = 2$$

$$\mathrm{DE} = 2\sin\left(a + b - \frac{\pi}{2} - \pi\right) = -2\sin\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(a+b)$$

et enfin

$$2.2\cos(a+b) = (-2\cos b)(-2\cos a) + 2\sin a(-2\sin b),$$

ou $$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b.$$

IV. *Calcul de* $\cos(a-b)$.

$$\cos(a-b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \sin\left(b + \frac{\pi}{2} - a\right).$$

Il suffira donc de prendre, dans la figure 2,

$\widehat{\mathrm{CD}} = 2b + \pi$, $\widehat{\mathrm{CE}} = 2a$; on a alors $\widehat{\mathrm{DF}} = 2b$, $\widehat{\mathrm{EF}} = \pi - 2a$,

$$\widehat{\mathrm{DE}} = 2b + \pi - 2a = 2b - 2a + \pi.$$

$$\left\{\begin{array}{lll}\mathrm{CD} = 2\sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos b, & \mathrm{DF} = 2\sin b, & \mathrm{DE} = 2\sin\left(b - a + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(a- \\ \mathrm{CE} = 2\sin a & \mathrm{EF} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\cos a & \mathrm{CF} = 2\end{array}\right.$$

et l'égalité déjà employée trois fois devient

$$2.2\cos(a-b) = 2\sin a\, 2\sin b + 2\cos b\, 2\cos a,$$

ou $$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$