Sur les formules fondamentales de la trigonométrie

Autor(en): **Legrandroy, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **33 (1904-1905)**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88522

Séance du 2 décembre 1904

SUR

LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRIGONOMÉTRIE

PAR E. LEGRANDROY, PROFESSEUR

Une démonstration de ces formules doit réunir, si possible, la clarté, la généralité et la simplicité. A ce triple point de vue, aucune ne surpasse celle que Chasles a donné dans sa « Géométrie supérieure » : mais elle suppose déjà connue la notion du rapport anharmonique, qu'à tort ou à raison on n'a pas coutume d'introduire dans l'enseignement élémentaire. La démonstration par la méthode des projections, très générale aussi, n'est pas aisément accessible aux jeunes élèves, pour lesquels elle ne parle pas assez aux yeux. A mon avis, basé sur de multiples expériences, la démonstration la mieux appropriée à l'enseignement élémentaire est celle qui s'appuie sur le théorème de Ptolémée, parce qu'elle est extrêmement simple et se prête sans difficulté à la généralisation. Le principe en est connu depuis longtemps pour le calcul de $\sin(a+b)$; mais, à ma connaissance, sa généralisation et son application aux autres formules analogues n'ont jamais été publiées. C'est cette lacune que je me propose de combler dans la présente note.

La démonstration repose sur les principes suivants :

1° Dans tout quadrilatère inscrit, le produit des diagonales équivaut à la somme des produits des côtés opposés.

2° Dans un cercle du rayon 1, le sinus d'un arc a pour mesure la demi-corde de l'arc double.

3° Quelque soit l'arc x, $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$,

$\sin(x-\pi)=-\sin x, \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x, \cos(-x)=\cos x.$

I. *Calcul de* $\sin(a+b)$. Portons sur une circonférence de rayon 1 $\overparen{CD}=2a$, $\overparen{CE}=2b$; menons le diamètre CF et construisons le quadrilatère. La figure 1 donne

$$\overparen{DF}=2a-\pi, \overparen{DE}=2a+2b-2\pi, \overparen{EF}=2b-\pi,$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{lll} CD=2\sin a & DF=2\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)= \quad -2\cos a & CF=2 \\ CE=2\sin b & DE=2\sin(a+b-\pi)=-2\sin(a+b) & \\ & \qquad EF=2\sin\left(b-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos b. & \end{array}\right.$$

L'égalité $CF\times DE=CE\times DF+DC\times EF$

devient ainsi

$$-2.2\sin(a+b)=2\sin b(-2\cos a)+2\sin a(-2\cos b),$$

ou, en simplifiant,

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b.$$

On voit aisément que la démonstration est applicable telle quelle à tout cas, pourvu qu'on tienne compte des signes. Elle n'a été faite jusqu'ici, que je sache, que pour

$$2a<\pi \text{ et } 2b<\pi.$$

II. *Calcul de* $\sin(a-b)$. On porte de nouveau, sur une circonférence de rayon 1, $\overset{\frown}{CD}=2a$, $\overset{\frown}{CE}=2b$, mais cette fois les deux arcs dans le même sens. On a alors $\overset{\frown}{DF}=2a-\pi$ $\overset{\frown}{DE}=2a-2b$ $\overset{\frown}{EF}=\pi-2b$; puis dans le quadrilatère,

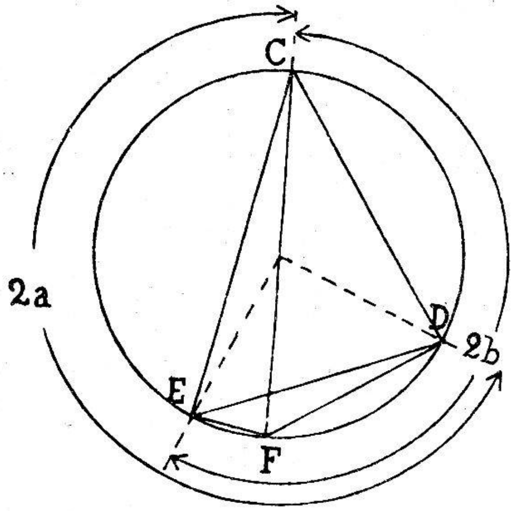

Fig. 1.

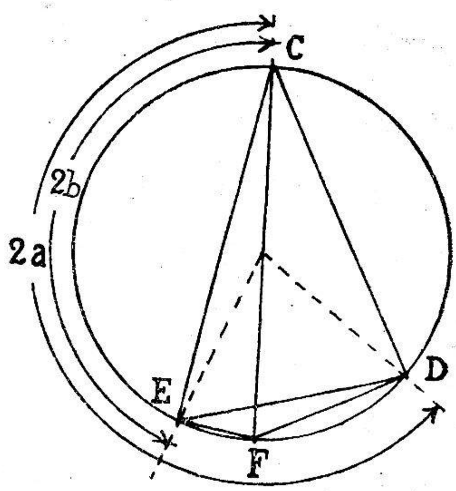

Fig. 2.

$$\left\{\begin{array}{llll} CD=2\sin a & DF=2\sin\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos a & ED=2\sin(a-b) \\ CE=2\sin b & EF=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-b\right)=2\cos b & CF=2; \end{array}\right.$$

et la même égalité, déjà employée, devient

$$2.2\sin(a-b)=2\sin b(-2\cos a)+2\sin a\,.\,2\cos b,$$

ou, en simplifiant,

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b.$$

III. *Calcul de* $\cos(a+b)$.

$$\cos(a+b)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)=-\sin\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right):$$

Il suffira donc de prendre, dans la fig. 1, $\overset{\frown}{CD}=2a, \overset{\frown}{CE}=2b-\pi$: alors $\overset{\frown}{DF}=2a-\pi, \overset{\frown}{EF}=2b-2\pi$, $\overset{\frown}{DE}=2a+2b-\pi-2\pi$; puis

$$\mathrm{CD} = 2\sin a \qquad \mathrm{DF} = 2\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos a$$

$$\mathrm{CE} = 2\sin\left(b - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos b \quad \mathrm{EF} = 2\sin(b-\pi) = -2\sin b$$

$$\mathrm{CF} = 2$$

$$\mathrm{DE} = 2\sin\left(a + b - \frac{\pi}{2} - \pi\right) = -2\sin\left(a + b - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(a+b)$$

et enfin

$$2.2\cos(a+b) = (-2\cos b)(-2\cos a) + 2\sin a(-2\sin b),$$

ou $\qquad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b.$

IV. *Calcul de* $\cos(a-b)$.

$$\cos(a-b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \sin\left(b + \frac{\pi}{2} - a\right).$$

Il suffira donc de prendre, dans la figure 2,

$\widehat{\mathrm{CD}} = 2b + \pi$, $\widehat{\mathrm{CE}} = 2a$; on a alors $\widehat{\mathrm{DF}} = 2b$, $\widehat{\mathrm{EF}} = \pi - 2a$,
$\widehat{\mathrm{DE}} = 2b + \pi - 2a = 2b - 2a + \pi$.

$$\begin{cases} \mathrm{CD} = 2\sin\left(b + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos b, \ \mathrm{DF} = 2\sin b, \ \mathrm{DE} = 2\sin\left(b - a + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(a - \\ \mathrm{CE} = 2\sin a \qquad \mathrm{EF} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = 2\cos a \qquad \mathrm{CF} = 2 \end{cases}$$

et l'égalité déjà employée trois fois devient

$$2.2\cos(a-b) = 2\sin a\, 2\sin b + 2\cos b\, 2\cos a,$$

ou $\qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$