Discriminants et solutions singulières

Autor(en): **Isely, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **34 (1905-1907)**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88527

Séance du 5 janvier 1906

DISCRIMINANTS ET SOLUTIONS SINGULIÈRES

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

Dans la séance du 21 novembre 1878 de la Société neuchâteloise des sciences naturelles, Jean-Pierre Isely faisait une communication du plus haut intérêt sur les *solutions singulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables*. Cette communication parut *in extenso* dans le tome XI du *Bulletin*. Après avoir rappelé la nature de ce genre d'intégrales, dont Taylor, le premier, constata l'existence[1], J.-P. Isely montre comment on peut les déduire directement de l'équation proposée elle-même, sans passer par la solution générale. Ce procédé, vraiment ingénieux, consiste à exprimer que cette équation, assimilée à une équation algébrique par rapport à la dérivée, admet une racine double. Les anciens traités de Calcul infinitésimal, celui de Sturm entre autres, n'en faisaient nullement mention. Par contre, les auteurs plus récents, Hoüel, MM. Goursat et Humbert, etc., parlent de cette méthode abréviative avec plus ou moins de détails. Nous y revenons aujourd'hui, en la simplifiant par l'emploi des discriminants et en l'étendant aux équations aux dérivées partielles.

Soit, tout d'abord, l'équation différentielle ordinaire du premier ordre et d'un degré quelconque

$$f(x, y, p) = 0,$$

[1] *Methodus incrementorum directa et inversa* (Lond. 1715).

x étant la variable indépendante, y une fonction de cette variable et p la dérivée $\frac{dy}{dx}$.

L'intégrale *générale* de cette équation est une expression de la forme

$$F(x, y, C) = 0,$$

C désignant une constante arbitraire.

Au point de vue géométrique, cette intégrale représente les lignes planes, en nombre infini, de *paramètre* C, dites *courbes intégrales*, chacune d'elles correspondant à une valeur particulière attribuée à C.

Ainsi, l'équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

admet la solution générale

$$2\,Cy + C^2 + a^2 - x^2 = 0,$$

qui représente une *famille* de paraboles.

Mais à côté de l'intégrale générale et des solutions *particulières* qu'on en déduit en donnant à la constante des valeurs particulières, une équation différentielle du premier ordre peut avoir une autre intégrale, dite *solution singulière*[1], qu'il serait impossible d'obtenir en particularisant la constante arbitraire qui figure dans l'intégrale générale.

Par exemple, l'équation précitée est vérifiée par la solution

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

qui représente une circonférence de rayon a, ayant son centre placé à l'origine des coordonnées. Cette

[1] « *Quœ est singularis quœdam solutio Problematis.* » *Methodus incrementorum*, page 27.

circonférence est l'*enveloppe* des paraboles définies par l'intégrale générale.

Du reste, il est facile de prouver que la solution générale et la solution singulière sont les seules solutions d'une équation différentielle de cette espèce.

On peut obtenir la solution singulière d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre en suivant deux voies essentiellement différentes : ou bien, on la déduit de l'intégrale générale ; ou bien, on la tire de l'équation différentielle proposée sans intégrer préalablement celle-ci. Nous allons exposer ces deux méthodes.

La première consiste à éliminer la constante C entre l'intégrale générale et sa dérivée par rapport à cette constante, égalée à zéro, ou bien entre cette même intégrale et sa dérivée par rapport à y, égalée à l'infini. Le résultat de cette élimination, qui ne contient pas de constante arbitraire, est précisément la solution singulière de l'équation différentielle proposée.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, l'intégrale générale était

$$2\,\mathrm{C}y + \mathrm{C}^2 + a^2 - x^2 = 0.$$

L'application des règles précédentes donne immédiatement

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}} = 2y + 2\mathrm{C} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = 2\mathrm{C} = \infty.$$

« Cette dernière équation ne conduirait qu'à la valeur illusoire $y = \infty$. La première donne $\mathrm{C} = -y$, et, par suite,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

qui est la solution singulière[1]. »

[1] Ch. Sturm, *Cours d'Analyse*, 6$^{\text{me}}$ éd., t. II, p. 75.

La solution singulière, résultant de l'élimination de C entre l'intégrale générale $F(x, y, C) = 0$ et l'équation dérivée $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$, représente toujours l'enveloppe des courbes intégrales. Cette remarque va nous conduire à un autre procédé d'obtenir la solution singulière, procédé qui n'exige pas la connaissance préalable de l'intégrale générale.

L'équation différentielle proposée

$$f(x, y, p) = 0$$

donne, pour chaque point (x, y) du plan, les coefficients angulaires p des tangentes aux courbes intégrales qui passent par ce point. Si ce dernier est dans le voisinage immédiat de l'enveloppe, les deux courbes intégrales qui y passent sont très voisines et les coefficients angulaires des tangentes à ces deux courbes sont eux-mêmes très peu différents. Mais si (x, y) est sur l'enveloppe, les deux courbes intégrales se confondent, et, par suite, l'équation proposée, traitée algébriquement, a, en p, une racine double. La solution singulière s'obtiendra donc par l'élimination de p entre les deux équations

$$f(x, y, p) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Nous nommerons, pour abréger, la relation ainsi formée,

$$D = 0,$$

l'*équation discriminante* de l'équation proposée. Son premier membre D est le discriminant de la fonction $f(x, y, p)$. L'algèbre nous le fournit immédiatement, quel que soit le degré de cette fonction par rapport à p.

Reprenons, par exemple, l'équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Elle peut aussi s'écrire

$$(x + py)^2 = p^2(x^2 + y^2 - a^2),$$

ou bien

$$(x^2 - a^2)p^2 - 2xyp - x^2 = 0,$$

d'où l'équation discriminante

$$x^2(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Le second facteur, égalé à zéro, donne la solution singulière

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

trouvée précédemment.

L'équation discriminante $D = 0$ convient aussi aux points de rebroussement des courbes intégrales, car en chacun de ceux-ci l'équation $f(x, y, p) = 0$ a évidemment deux racines p égales. C'est même le cas *normal*, les cas où une solution singulière se présente devant être considérés comme *exceptionnels*[1]. En d'autres termes, les courbes intégrales n'ont en général pas d'enveloppe. La relation $D = 0$ pourrait, au reste, convenir au lieu des points de contact de deux courbes intégrales, non infiniment voisines entre elles.

Soit, par exemple, l'équation différentielle.

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9(y - x) = 0.$$

[1] Ed. Goursat. *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 515.

Formons l'équation algébrique en p

$$4p^3 - 6p^2 + 9(y - x) = 0.$$

Le premier membre est une fonction rationnelle entière de p du troisième degré. Or, on sait que toute fonction de la forme

$$f(x) = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3$$

a pour discriminant

$$D = 3a_1^2 a_2^2 + 6a_0 a_1 a_2 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 - a_0^2 a_3^2,$$

polynôme homogène et isobarique relativement aux coefficients, de degré 4 et de poids 6.

Dans notre cas,

$$a_0 = 4,\ a_1 = -2,\ a_2 = 0,\ a_3 = 9(y - x).$$

L'équation discriminante sera donc

$$144(y - x)(2 - 9y + 9x) = 0,$$

d'où les deux solutions

$$y = x \text{ et } y = x + \frac{2}{9}.$$

Il est facile de constater que la première ne convient pas à l'équation proposée. C'est une solution *étrangère*. La bissectrice des axes, définie par la relation $y = x$ est alors le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales.

En effet, l'équation différentielle en question est du type de Lagrange. Son intégrale générale

$$2(x - C)^3 + 3(y - C)^2 = 0$$

représente une famille de courbes du troisième ordre, dont les points de rebroussement ont pour coordonnées $x = y = C$. Le lieu de ceux-ci est donc bien la droite $y = x$.

L'autre solution, au contraire, vérifie l'équation proposée. L'enveloppe des courbes intégrales est donc la droite $y = x + \frac{2}{9}$, parallèle à la bissectrice $y = x$[1].

Appliquons encore cette méthode à l'exemple suivant, emprunté au *Recueil d'exercices* de Frenet (5me éd., question 579) :

$$(1 + p^2)(y - xp)^2 - a^2 p^2 = 0.$$

Cette équation est du quatrième degré par rapport à la dérivée. Développée et ordonnée selon les puissances décroissantes de p, elle devient

$$x^2 p^4 - 2xy p^3 + (x^2 + y^2 - a^2) p^2 - 2xy p + y^2 = 0.$$

Or, le discriminant de la fonction biquadratique

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

est donné par la relation

$$27 D = 4 A^3 - B^2,$$

A et B étant le premier et le deuxième *invariants* de $f(x)$, à savoir :

$$A = a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_0 a_4,$$
$$B = 27 a_1^2 a_4 + 27 a_0 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_0 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3.$$

Le discriminant ainsi obtenu est du sixième degré relativement aux coefficients de la fonction et de poids 12.

[1] G. Humbert. *Cours d'Analyse,* t. II, pp. 269 et 285.

Dans notre cas

$a_0 = x^2,\ a_1 = a_3 = -2xy,\ a_2 = x^2 + y^2 - a^2,\ a_4 = y^2,$

et, par suite,

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + y^2 - a^2)^2, \\ B &= 2(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 108\, a^2 x^2 y^2. \end{aligned}$$

On conclut de là que

$$D = -16\, a^2 x^2 y^2 \left[(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\, a^2 x^2 y^2\right],$$

d'où l'équation discriminante :

$$x^2 y^2 \left[(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\, a^2 x^2 y^2\right] = 0.$$

Le facteur entre crochets donne la solution singulière

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\, a^2 x^2 y^2 = 0,$$

ou

$$(a^2 - x^2 - y^2)^3 = 27\, a^2 x^2 y^2,$$

ou, plus simplement encore,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe est l'hypocycloïde à quatre rebroussements, engendrée par une circonférence de rayon $\frac{a}{4}$ roulant sans glissement à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon a. Quelques auteurs lui donnent aussi le nom d'*astroïde*.

En mettant l'équation proposée sous la forme

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

on est conduit à intégrer une expression du type de Clairaut. On trouve ainsi pour l'intégrale générale

$$y = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}},$$

qui définit une famille de droites, dont l'hypocycloïde précédente est l'enveloppe. La portion de chacune de ces droites comprise entre les axes, supposés rectangulaires, a une longueur constante a. Cette courbe est donc l'enveloppe d'une droite de longueur constante, qui se meut en s'appuyant sur deux droites fixes rectangulaires.

Les équations aux dérivées partielles se prêtent à des considérations analogues. Soit, par exemple, l'équation du premier ordre à deux variables indépendantes

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Cette équation est susceptible de trois sortes de solutions, savoir :

1° Une solution renfermant deux constantes arbitraires. C'est l'*intégrale complète.*

2° Une solution dépendant d'une fonction arbitraire. C'est l'*intégrale générale.*

3° Une solution qui ne contient rien d'arbitraire. C'est l'*intégrale* ou *solution singulière.*

Comme M. Goursat l'explique fort clairement, il n'y a pas de distinction *essentielle* entre l'intégrale générale et l'intégrale complète. Au contraire, la solution singulière ne dépend pas du choix de l'intégrale complète[1].

Lagrange a montré[2] comment on peut déduire de l'intégrale complète toutes les autres solutions de l'équation proposée, à l'aide de simples différentiations et éliminations. Rappelons succinctement la marche suivie par l'illustre analyste.

Soit

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

l'intégrale complète. La solution singulière, si elle existe, s'obtiendra en éliminant les constantes a et b entre les trois équations

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Quant à l'intégrale générale, elle provient de l'élimination théorique des mêmes constantes entre les relations

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \varphi'(a) = 0, \quad b = \varphi(a),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Un exemple classique nous est fourni par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = R^2,$$

qui définit une double infinité de sphères de rayon donné R, ayant leurs centres dans le plan des xy. Elle peut être considérée comme l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles non linéaire

$$(p^2 + q^2 + 1) z^2 = R^2,$$

[1] *Cours d'Analyse mathématique,* t. II, p. 556.
[2] *Mémoires de l'Académie de Berlin,* 1774, p. 266.

obtenue par l'élimination de a et de b entre l'équation proposée et ses dérivées par rapport à x et à y, et qui exprime que dans toutes ces sphères la longueur de la normale est constamment égale à R.

Pour obtenir l'intégrale générale, remplaçons b par $\varphi(a)$; ce qui donne

$$(x-a)^2+[y-\varphi(a)]^2+z^2=\mathrm{R}^2,$$

équation qui convient à celles d'entre ces sphères dont le centre parcourt la courbe $b=\varphi(a)$ du plan des xy. Il suffira ensuite d'éliminer a en cette relation et la suivante

$$x-a+[y-\varphi(a)]\,\varphi'(a)=0.$$

La surface, représentée par la solution générale ainsi obtenue, a reçu le nom de *surface-canal*, dû à sa forme. Elle sert d'enveloppe aux sphères en question, chacune de celles-ci la touchant le long d'un grand cercle.

Les dérivées partielles de l'intégrale complète par rapport aux constantes qu'elle renferme sont

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}=-2(x-a),$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}=-2(y-b).$$

Elles s'annulent pour $a=x$ et $b=y$. Ces valeurs, portées dans l'intégrale complète réduisent celle-ci à

$$z^2=\mathrm{R}^2,$$

ou $$z=\pm\mathrm{R},$$

solution singulière. Cette dernière consiste donc dans l'ensemble de deux plans parallèles à celui des xy, et tangents à la série doublement infinie des sphères comprises dans l'intégrale complète.

Par cette méthode, c'est là son défaut capital, il faut, pour former la solution singulière, déterminer préalablement l'intégrale complète de l'équation proposée. Elle n'est donc réellement avantageuse que dans les cas, fort peu nombreux, où cette détermination se fait simplement; par exemple, dans celui de l'*équation de Clairaut généralisée*

$$z = px + qy + \varphi(p, q),$$

dont l'intégrale complète est

$$z = ax + by + \varphi(a, b),$$

comme on le vérifie aisément. Cette intégrale représente une famille de plans dépendant de deux paramètres arbitraires a et b. L'enveloppe de ces plans s'obtient par l'élimination de a et b entre

$$z = ax + by + \varphi(a, b), \quad x + \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \quad y + \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0.$$

Cette enveloppe, qui est une surface non développable, est la solution singulière de l'équation proposée.

Pour avoir l'intégrale générale correspondante, nous établirons entre a et b une relation arbitraire, $b = \psi(a)$, et chercherons l'enveloppe des plans

$$z = ax + y\psi(a) + \varphi[a, \psi(a)].$$

Cette enveloppe est une surface développable tangente à la solution singulière tout le long d'une certaine courbe, dont la nature dépend de la fonction arbitraire $\psi(a)$.

Mais, en général, la recherche de l'intégrale complète, même dans les cas de possibilité, présente de grandes difficultés. Aussi est-il préférable, dans les problèmes qui n'exigent que la connaissance de la solution singulière, de déduire celle-ci directement de l'équation différentielle elle-même. On peut alors opérer comme il suit.

L'intégrale complète de l'équation du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

renferme deux constantes arbitraires a et b. En faisant varier ces *paramètres*, on obtient une *double infinité* de surfaces, dites les *surfaces intégrales* de l'équation proposée.

Soit

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

cette intégrale complète. On en déduit l'intégrale générale en établissant entre a et b une relation quelconque, $b = \varphi(a)$, puis en éliminant a entre les deux équations

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\varphi'(a) = 0.$$

Le premier membre de la dernière étant la dérivée de la fonction

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)],$$

à un seul paramètre, par rapport à a, le résultat de l'élimination sera l'enveloppe de la série *simplement infinie* des surfaces intégrales remplissant la condition

$b = \varphi(a)$. Du reste, chacune des enveloppées touche leur enveloppe commune tout le long d'une ligne, appelée *caractéristique.*

La solution singulière, s'obtenant par l'élimination de a et b entre

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0,$$

est l'enveloppe du système doublement infini des surfaces intégrales, chacune de celles-ci la touchant en un nombre limité de points (*points caractéristiques*). De plus, il est facile d'établir que la solution singulière est aussi l'enveloppe de toutes les surfaces données par l'intégrale générale.

Les exemples cités précédemment à l'appui de la méthode de Lagrange confirment, jusque dans leurs moindres détails, ces faits géométriques.

Considérons maintenant une surface intégrale passant par le point donné (x, y, z) de l'espace. L'équation du plan tangent à la surface en ce point est de la forme

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

les coefficients angulaires de ce plan étant liés par la relation

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

On en conclut qu'en chacun des points où l'une ou l'autre enveloppe (solution générale ou singulière) touche une des surfaces intégrales (solution complète), les valeurs communes de x, y, z, p et q doivent vérifier l'équation différentielle proposée.

Deux surfaces intégrales quelconques se rencontrent en général suivant une certaine ligne en chacun des points de laquelle les plans tangents à ces surfaces sont ordinairement différents. Mais si ces dernières sont infiniment voisines, leur intersection est une caractéristique, courbe de contact de l'intégrale complète avec son enveloppe (solution générale). Les plans tangents se confondront donc à la limite, et il en sera de même aux points caractéristiques, points de contact de l'intégrale complète avec la solution singulière. Les paramètres directeurs de ces plans étant alors respectivement égaux, l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

admettra deux racines doubles en p et en q simultanément.

De là découle la règle suivante :

Pour avoir la solution singulière de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

on assimile celle-ci à une équation algébrique en p *et* q ; *puis, on exprime en posant*

$$D_p = 0,$$

où D_p *est le discriminant de la fonction* f *relativement à* p, *que deux valeurs de* p *sont égales entre elles. Cette condition fournit alors les valeurs correspondantes de* q *en fonction de* x, y, z ; *et, comme deux de ces dernières doivent être égales, on obtiendra la solution singulière cherchée au moyen de la relation*

$$D_{p,q} = 0,$$

dont le premier membre est le discriminant de D_p *par rapport à* q.

Soit, par exemple, l'équation non linéaire

$$y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=z+y\frac{\partial z}{\partial y}.$$ [1]

Rendons-la algébrique en posant

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

ce qui donne

$$y^2(px+qy)p=z+qy,$$

ou, en ordonnant selon les puissances décroissantes de p,

$$xy^2p^2+qy^3p-z-qy=0.$$

On a alors successivement

$$D_p=y^2(y^4q^2+4xyq+4xz);$$
$$y^4q^2+4xyq+4xz=0;$$
$$D_{p,q}=4xy^2(x-zy^2).$$

Ce discriminant, égalé à zéro, donne la solution singulière

$$x-zy^2=0,$$

ou $\quad z=\dfrac{x}{y^2}.$

Il est facile de voir, en effet, que cette relation, qui ne renferme rien d'arbitraire vérifie bien l'équation proposée.

Pour rendre plus manifeste la grande simplicité de la règle ci-dessus énoncée, appliquons-la à un certain nombre d'exemples empruntés au hasard aux ouvrages d'analystes contemporains [2].

[1] FRENET. *Exercices*, question 619.

[2] FRENET. *Recueil d'exercices*, 2^{me} partie. — BRAHY. *Exercices méthodiques de calcul intégral.* — HOÜEL. *Cours de calcul infinitésimal*, t. III. — HUMBERT. *Cours d'analyse*, t. II. — GOURSAT. *Cours d'analyse mathématique*, t. II.

Reprenons tout d'abord l'équation déjà traitée à propos de la méthode de Lagrange, dont le point de départ est l'intégrale complète. Cette équation non linéaire était la suivante :

$$(p^2+q^2+1)z^2=R^2.$$

Ici $\qquad D_p=0 \qquad$ conduit à la relation

$$(q^2+1)z^2-R^2=0,$$

d'où $\qquad D_{p,q}=z^2(R^2-z^2)=0.$

Le second facteur, égalé à zéro, donne

$$z=\pm R,$$

solution singulière.

La solution étrangère $z=0$ représente le plan des xy, lieu des points de contact des surfaces intégrales (sphères) comprises dans l'intégrale complète. En effet, au point où deux de ces surfaces non infiniment voisines se touchent, les plans tangents se confondent aussi, sans que ce point appartienne à l'enveloppe.

Soit, en second lieu, l'équation de Clairaut généralisée

$$z=px+qy+p^2+q^2,$$

ou $\qquad p^2+px+q^2+qy-z=0.$

Le discriminant du premier membre relativement à p est

$$D_p=x^2-4(q^2+qy-z),$$

d'où l'équation algébrique en q

$$4q^2+4qy-x^2-4z=0.$$

On en déduit

$$D_{p,q}=4(x^2+y^2+4z)=0.$$

La solution singulière est donc la quadrique

$$x^2+y^2+4z=0,$$

enveloppe des plans

$$z=ax+by+a^2+b^2,$$

intégrale complète.

Dans certains cas, un simple artifice de calcul rendra possible l'emploi de cette méthode purement algébrique. Considérons, par exemple, l'équation

$$z^3+\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)z^2+a\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

qui devient, en posant

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q$$

et en ordonnant par rapport à p,

$$(xz^2+aq)\,p+z^2(z+qy)=0.$$

Multipliant de part et d'autre par la différence conjuguée du premier membre, il vient

$$(xz^2+aq)^2p^2-z^4(z+qy)^2=0,$$

d'où $$\mathrm{D}_p=z^4(z+qy)^2(xz^2+aq)^2.$$

On a donc, pour déterminer q, l'équation

$$(z+qy)(xz^2+aq)=0,$$

ou $$ayq^2+z(a+xyz)\,q+xz^3=0.$$

On en déduit

$$\mathrm{D}_{p,q}=z^2(a-xyz)^2.$$

Le second facteur, égalé à zéro, donne la solution singulière

$$xyz = a.$$

Une équation aux dérivées partielles du premier ordre, donnée *à priori*, n'admet pas d'une *façon normale* d'intégrale singulière. En d'autres termes, les surfaces intégrales n'ont qu'exceptionnellement une enveloppe commune. Dans les cas où cette solution n'existe pas, les équations qui servent à la déterminer sont incompatibles. Il en est ainsi de l'équation

$$q = f(p),$$

dont l'intégrale complète est

$$z = ax + f(a)\,y + b.$$

L'équation $\dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ se réduit alors à $1 = 0$.

L'emploi des discriminants conduirait à la même conclusion.

La méthode algébrique que nous venons d'exposer s'étend facilement, au point de vue théorique, au cas plus général d'une équation du premier ordre à n variables indépendantes. On arrive alors à des résultats intéressant la géométrie des hyperespaces.

Soit une équation de la forme

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

où z est une fonction des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et où l'on a $p_h = \dfrac{\partial z}{\partial x_h}$, h recevant toutes les valeurs entières de 1 à n.

L'intégrale complète de cette équation est une relation entre z et les x_h, qui renferme n constantes arbitraires. C'est donc une expression de la forme

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

On peut en déduire toutes les autres solutions de l'équation proposée, en particulier l'intégrale singulière *lorsqu'elle existe*. Il suffit, pour obtenir celle-ci, d'éliminer les constantes arbitraires entre l'équation $F = 0$ et les équations dérivées

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0.$$

Proposons-nous, par exemple, d'intégrer l'équation[1]

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

qui peut être considérée comme la généralisation de celle de Clairaut. On a une intégrale complète en prenant

$$z = a_1 x_2 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des constantes arbitraires ; car cette relation donne

$$p_1 = a_1, \; p_2 = a_2, \ldots, \; p_n = a_n,$$

et ces valeurs de $z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ vérifient bien la proposée. La solution singulière s'obtiendra en éliminant les n constantes entre cette intégrale complète et ses dérivées relatives à, $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Supposons, pour fixer les idées, la fonction homogène

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2,$$

[1] Frenet. *Exercices*, 5me éd., question 714.

dans le cas de trois variables indépendantes. L'équation proposée deviendra

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Elle admet l'intégrale complète

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Eliminons maintenant les trois constantes a_1, a_2, a_3 entre cette relation et les suivantes :

$$x_1 + 2a_1 = 0,$$
$$x_2 + 2a_2 = 0,$$
$$x_3 + 2a_3 = 0.$$

Nous obtiendrons ainsi la solution singulière

$$4z + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

qui, dans un espace à *quatre dimensions*, serait l'enveloppe des surfaces (*hyperplans*) définies par l'intégrale complète.

Pour appliquer la méthode des discriminants, nous considérerons l'équation proposée

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - z = 0$$

comme algébrique en p_1, et nous exprimerons que p_1 est une racine double en posant

$$x_1^2 - 4(p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_2^2 + p_3^2 - z) = 0,$$

ou $$4p_2^2 + 4p_2 x_2 + 4p_3^2 + 4p_3 x_3 - x_1^2 - 4z = 0.$$

Exprimons maintenant que p_2 est une racine double de cette nouvelle équation, ce qui donne

$$4p_3^2 + 4p_3 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - 4z = 0.$$

Enfin, la condition pour que p_3 soit une racine double de cette dernière équation est

$$4z + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

solution singulière. Le grand avantage de cette méthode sur la précédente (celle de Lagrange) s'aperçoit de nouveau aisément. On y procède à la détermination de la solution singulière sans connaître préalablement l'intégrale complète.

Nous reviendrons prochainement sur l'utilité des discriminants dans la recherche des solutions singulières des équations différentielles d'ordre supérieur au premier.