La géométrographie ou l'art des constructions géométriques

Séance du 3 mai 1907

LA GÉOMÉTROGRAPHIE

OU L'ART DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR L. ISELY, PROFESSEUR

La *Géométrographie* est de création récente. C'est, en effet, en 1888 que M. Emile Lemoine réalisa, sans même s'en douter, une idée émise autrefois par Jacques Steiner et passée longtemps inaperçue, de trouver un moyen méthodique de comparaison entre les diverses constructions qui se font avec la règle et le compas. Ayant remarqué que toute construction, si compliquée soit-elle, est constamment réductible à un certain nombre d'opérations élémentaires, toujours de même nature, M. Lemoine imagina deux nombres, appelés par lui *coefficient de simplicité* et *coefficient d'exactitude*, par le moyen desquels il parvint à analyser, à disséquer pour ainsi dire, les constructions donnant la solution de la plupart des problèmes de la Géométrie élémentaire. Dans leur *Géométrie plane* (1898), MM. Niewenglowski et Gérard font un usage constant et judicieux des notations géométrographiques « pour évaluer, disent-ils, la simplicité *réelle* des constructions, qu'il ne faut pas confondre avec la simplicité théorique ». Nous leur empruntons les termes et les symboles techniques qui suivent :

Op. (R_1) sert à désigner l'opération qui consiste à faire passer le bord de la règle par un point ; donc, spéculativement :

Op. ($2R_1$), c'est faire passer le bord de la règle par deux points.

Op. ($2R'_1$), c'est faire passer le bord de l'équerre par deux points, ou bien le mettre en coïncidence avec une ligne déjà tracée.

Op. (E), c'est faire glisser l'équerre le long de la règle jusqu'à ce qu'elle passe par un point donné.

Op. (C_1), c'est mettre une pointe du compas en un point *donné ;* donc, spéculativement :

Op. ($2C_1$), c'est prendre une longueur donnée entre les pointes du compas.

Op. (C_2), c'est mettre une pointe du compas en un point *indéterminé* d'une ligne.

Op. (R_2), c'est tracer une droite.

Op. (C_3), c'est tracer un cercle.

Ainsi, une construction géométrique quelconque sera représentée par le symbole total :

$$\text{Op. } (aR_1 + bR'_1 + cE + dC_1 + eC_2 + fR_2 + gC_3),$$

où a, b, c, d, e, f, g sont des nombres entiers.

La *simplicité* d'une construction est *en raison inverse* du nombre total $a + b + c + d + e + f + g$ des opérations *élémentaires ;* c'est pourquoi nous prendrons ce nombre pour *coefficient de simplicité*, par analogie au coefficient d'élasticité, en Mécanique. Au contraire, l'*exactitude* ne dépend que du nombre $a + b + c + d + e$ des opérations *de préparation*, appelé pour cette raison *coefficient d'exactitude.*

Les exemples suivants feront mieux comprendre l'emploi et l'utilité des notations géométrographiques[1].

Problème Ier. — *Mener une perpendiculaire au milieu d'une droite AB,* et, par suite, *partager cette droite en deux parties égales.*

L'opération qui consiste à placer la pointe sèche du compas au point A, puis à décrire autour de cette extrémité du segment une circonférence de rayon arbitraire, mais plus grand que la moitié de AB, est caractérisée par le symbole

$$\text{Op. } (C_1 + C_3).$$

La même opération, répétée au point B, donne de nouveau le symbole

$$\text{Op. } (C_1 + C_3).$$

Ces deux circonférences se coupent mutuellement en des points C et D, symétriquement situés par rapport à la ligne AB. Faisons alors passer le bord de la règle par ces points, et traçons la droite CD. Symbole :

$$\text{Op. } (2R_1 + R_2).$$

On obtient donc, par addition, le symbole total :

$$\text{Op. } (2R_1 + 2C_1 + R_2 + 2C_3).$$

Coefficient de simplicité : 7.- Coefficient d'exactitude : 4.

1 droite, 2 cercles.

Problème II. — *Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée* (postulatum d'Euclide).

[1] Le lecteur est prié de faire les figures.

La construction, indiquée par la plupart des traités élémentaires, et qui exige l'emploi de la règle et du compas, a pour symbole:

$$\text{Op. } (2R_1 + 5C_1 + R_2 + 3C_3).$$

Simplicité: 11. — Exactitude: 7.

1 droite, 3 cercles.

La suivante, un peu plus simple, est préférable.

Par le point donné A, faisons passer une circonférence qui coupe la droite donnée aux points B et C; puis, de C comme centre avec une ouverture de compas égale à AB, décrivons un second cercle qui rencontre le premier en D. La parallèle demandée, obtenue en joignant A et D, forme avec la ligne BC un système de sécantes qui interceptent des arcs égaux.

Cette construction est caractérisée par le symbole

$$\text{Op. } (2R_1 + 4C_1 + R_2 + 2C_3).$$

Simplicité: 9. — Exactitude: 6.

1 droite, 2 cercles.

Mais l'emploi de l'équerre permet de réaliser une plus grande simplicité encore. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la construction, bien connus de tous les dessinateurs, et exprimés par le symbole

$$\text{Op. } (2R'_1 + E + R_2).$$

Simplicité: 4. — Exactitude: 3.

1 droite à tracer.

Nous remarquerons seulement que ce procédé, quoique rapide, est suffisamment précis; il ne suppose pas que l'équerre soit *juste,* mais simplement que ses côtés soient bien rectilignes.

Ce dernier exemple montre le parti qu'on peut tirer de l'analyse géométrographique d'un problème. Elle permet de discerner, presque à coup sûr, parmi les diverses solutions qu'il comporte, celle qui conduit le plus simplement et le plus rapidement au but. A ce propos, M. Lemoine a cherché à établir, dans la livraison de novembre 1892 des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* une comparaison entre un certain nombre de méthodes données pour résoudre le fameux *problème des contacts* d'Apollonius avec la règle et le compas. On sait que ce problème, qui consiste à tracer un cercle tangent à trois cercles donnés, ne comporte pas moins de dix énoncés différents[1]. M. Lemoine examine les quatre solutions proposées par Viète, Bobillier et Gergonne, Fouché et Mannheim, respectivement. Il trouve ainsi les symboles ci-après :

Méthode de Viète.

Op. $(52 R_1 + 98 C_1 + C_2 + 26 R_2 + 58 C_3)$.
Simplicité : 235. — Exactitude : 151.
26 droites, 58 cercles.

Méthode de Bobillier et Gergonne.

Op. $(120 R_1 + 104 C_1 + 60 R_2 + 72 C_3)$.
Simplicité : 356. — Exactitude : 224.
60 droites, 72 cercles.

Méthode de Fouché.

Op. $(112 R_1 + 53 C_1 + 56 R_2 + 26 C_3)$.
Simplicité : 247. — Exactitude : 165.
56 droites, 26 cercles.

[1] Voir A. Hochheim. *Problèmes de Géométrie analytique à deux dimensions,* traduction L. Isely, fascicule I, exercices 514, 534, 657-664.

Méthode de Mannheim.

Op. $(108 R_1 + 20 C_1 + 54 R_2 + 10 C_3)$.
Simplicité : 192. — Exactitude : 128.
54 droites, 10 cercles.

La moins bonne de ces méthodes, au point de vue strict de la construction, est donc celle de Bobillier et Gergonne, si élégante pourtant. Elle exige, en effet, 356 opérations *élémentaires*. M. Lemoine s'en montre fort surpris.

Les deux solutions de Viète et de Fouché s'équivalent à peu près, avec une légère supériorité cependant du côté de la première (235 contre 247).

La méthode du colonel Mannheim est de beaucoup la meilleure, puisque le nombre des opérations élémentaires se réduit à 192. Mais, comme M. Lemoine le fait remarquer, bonne pour le cas général, elle ne s'applique malheureusement pas à *tous* les cas particuliers, où l'on a affaire à des variétés des cercles donnés : *points* (cercles infiniment petits) ou *droites* (cercles de rayon infiniment grand). Cette infériorité *théorique* est, du reste, de faible importance, ces cas particuliers ne comportant que des constructions relativement simples. Telles sont, entre autres, celles qui fournissent les cercles tangents *(inscrit* et *exinscrits)* aux côtés d'un trilatère.

Il est, croyons-nous, superflu d'insister davantage sur la réelle utilité des méthodes géométrographiques. Non seulement elles enlèvent aux constructions géométriques, même les plus élémentaires, leur caractère machinal et aride parfois, mais encore elles développent chez ceux qui s'en servent l'esprit de recherche et la réflexion. Elles les accoutument à établir un parallèle entre les divers procédés qui s'offrent à eux dans la solution d'un problème et à en trouver de nouveaux, souvent bien préférables à ceux que donnent les classiques traités de Géométrie. Pour les élèves de l'enseignement secondaire, l'emploi de ces méthodes serait un véritable stimulant : à celui qui trouvera la solution la plus courte ! « Pour les personnes qui attachent un grand prix à l'émulation, dit M. Laisant dans sa *Mathématique*, ne serait-il pas intéressant, dans des classes nombreuses, de voir ouvrir des *concours de simplicité* sur un résultat géométrique à obtenir avec la règle et le compas ? » Nous souscrivons de tout cœur à ce vœu d'un des penseurs les plus profonds des temps modernes.