Théorie des groupes de transformations à un paramètre

Autor(en): **Krebs, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **38 (1910-1911)**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88568

THÉORIE

DES

GROUPES DE TRANSFORMATIONS A UN PARAMÈTRE

PAR H. KREBS, PRIVAT-DOCENT

Soient

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, a),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, a), \ldots,\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)$$

n fonctions uniformes des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et dans lesquelles entre le paramètre arbitraire a. Nous supposons de plus que ces fonctions $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)$ sont analytiques, donc dérivables et continues, par rapport aux variables x et au paramètre a, et en outre que le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

n'est pas identiquement nul, condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions soient indépendantes. En égalant ces fonctions respectivement à n nouvelles variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ on obtient une transformation définie par les formules

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

et que nous représenterons par le symbole S.

La transformation la plus simple est évidemment celle qui conserve les variables. Elle est dite transformation identique ou unité et se représente par l'unité : 1.

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par $f_i(x)$, puis $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)$ par $f_i(x, a)$ et enfin $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ par $\dfrac{D(f_i)}{D(x)}$.

A chaque valeur du paramètre a correspond une transformation déterminée; en faisant varier ce paramètre, nous obtiendrons une infinité de transformations différentes. Supposons que l'on effectue successivement deux transformations S et T de l'ensemble, correspondant aux valeurs a et b du paramètre. La première transformation S conduit du système de valeurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ au système de valeurs $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ définies par les formules (1); la seconde transformation T conduit du deuxième système $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ au troisième système $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ défini par les formules

$$x''_i = f_i(x', b) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Remplaçons dans ces formules les x' par leurs valeurs (1); nous aurons

$$x''_i = \mathrm{F}_i(x, a, b) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Ces formules définissent encore une transformation dépendant des deux paramètres a et b; elle est dite le *produit* des transformations S et T et s'indique par le symbole ST.

2. Groupes de transformations.

Nous dirons que l'ensemble des ∞^1 transformations (1) forme un *groupe* de transformations à un paramètre si le produit de deux transformations quelconques de l'ensemble est encore une transformation du même ensemble.

Pour cela il faut et il suffit que les formules (3) soient de la forme

$$x''_i = f_i(x, c) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

c étant une valeur du paramètre ne dépendant que de a et b.

$$c = \varphi(a, b).$$

Un tel groupe est dit *continu* pour exprimer que nous supposons les f_i analytiques, et par suite continues, par rapport aux *x et au paramètre a.*

Exemple. — Considérons dans le plan les rotations autour d'un point. Ce point étant pris pour origine d'un système de coordonnées cartésiennes, ces transformations sont données par les formules

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} x' &= x\cos a - y\sin a \\ y' &= x\sin a + y\cos a. \end{aligned}\right.$$

Effectuons successivement deux telles transformations correspondant aux valeurs a et b du paramètre. La première conduit du point (x, y) au point (x', y') défini par les formules précédentes. La seconde conduit du point (x', y') au point (x'', y'') donné par

$$(\beta)\left\{\begin{aligned} x'' &= x' \cos b - y' \sin b \\ y'' &= x' \sin b + y' \cos b. \end{aligned}\right.$$

D'où en éliminant x', y' entre (α) et (β),

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= x \cos(a+b) - y \sin(a+b) \\ y'' &= x \sin(a+b) + y \cos(a+b). \end{aligned}\right.$$

En posant

$$c = a + b,$$

on obtient bien une transformation appartenant à l'ensemble des transformations (α). Les rotations autour d'un point du plan forment donc un groupe, ce que l'on pouvait du reste prévoir.

On verrait de même que les transformations

$$\begin{array}{lll} x' = x + a, & y' = y; & \\ x' = a x, & y' = y; & \\ x' = x + a, & y' = y + 2a, & z' = z + 3a; \\ x' = a x, & y' = a^2 y, & z' = a^3 z \end{array}$$

donnent des groupes à un paramètre.

Par contre la famille de transformations

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + 2a^2 \\ z' &= z + 3a^3 \end{aligned}\right.$$

ne forme pas un groupe, car le produit de deux de ces transformations,

$$\left\{\begin{aligned} x'' &= x + a + b \\ y'' &= y + 2(a^2 + b^2) \\ z'' &= z + 3(a^3 + b^3), \end{aligned}\right.$$

ne fait pas partie de la famille. En effet, pour avoir un groupe on devrait avoir, en prenant $c = a + b$,

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + b^3. \end{aligned}$$

3. Equations différentielles auxquelles donne lieu un groupe de transformations à un paramètre.

Considérons les équations de condition

$$f_i(x', b) = f_i(x, c) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

résultant des équations (3) et (4).

Des deux systèmes de variables x et x' nous pouvons choisir soit les unes soit les autres comme variables indépendantes; des trois paramètres a, b, c nous pouvons en regarder deux comme indépendants. Nous envisagerons $x_1, x_2 \ldots, x_n, a, c$ comme des variables indépendantes et b comme une fonction de a et c définie par la relation $c = \varphi(a, b)$. Les x' sont des fonctions des x et de a définies par les formules (1).

En dérivant les relations (5) par rapport à a, nous aurons

$$\frac{\partial f_i}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial a} + \frac{\partial f_i}{\partial x'_2}\frac{\partial x'_2}{\partial a} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x'_n}\frac{\partial x'_n}{\partial a} + \frac{\partial f_i}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0 \tag{6}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'autre part, on tire de même de $c = \varphi(a, b)$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

On voit donc par là que $\dfrac{\partial b}{\partial a}$ ne dépend que de a et b et peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \psi(a, b).$$

Les équations (6) sont résolubles par rapport aux $\dfrac{\partial x'_i}{\partial a}$, car le déterminant de leurs coefficients est

$$\frac{\mathrm{D}[f_i(x', b)]}{\mathrm{D}[x']},$$

qui, par hypothèse, n'est pas identiquement nul; ces quantités seront exprimées par des fonctions linéaires et homogènes des derniers termes figurant aux premiers membres des équations (6) et $\frac{\partial b}{\partial a}$ sera facteur commun.

Par conséquent on obtient des expressions de la forme

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a} = \psi(a, b)\,\xi_i(x', b) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Or les x' ne dépendant pas de b, il doit en être de même des ξ_i et de ψ; de sorte que les équations (7) sont de la forme suivante :

$$\frac{dx'_i}{da} = \psi(a)\,\xi_i(x') \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Nous pouvons donc énoncer le *théorème fondamental* suivant :

Si les équations

$$x'_i = f_i(x, a) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent un groupe à un paramètre, les x', considérés comme fonctions des x et de a, satisfont à un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx'_i}{da} = \psi(a)\,\xi_i(x') \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

4. — Supposons que le groupe considéré contienne la transformation identique, c'est-à-dire que pour $a = a_0$ les formules (1) se réduisent à

$$x'_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela étant, nous allons maintenant démontrer la réciproque du théorème que nous venons d'énoncer :

Si l'on a un ensemble de ∞^1 transformations définies par les formules (1), qui satisfont à un système d'équations différentielles tel que celui défini par les relations (8), l'ensemble contenant la transformation identique, le système de transformations donné forme un groupe continu à un paramètre.

Etablissons d'abord le lemme suivant :

Soit un système de n équations différentielles ordinaires à une seule variable indépendante x et à n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On peut mettre, d'une manière et d'une seule, son intégrale générale

$$y_i = h_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{I}$$

sous une forme telle que pour une certaine valeur x_0 *de* x*, les* y_i *se réduisent à des fonctions données de n constantes arbitraires* $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$y_i = g_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Observons d'abord que le jacobien $\dfrac{D(h)}{D(C)}$ ne saurait être identiquement nul, parce que, dans le cas contraire, les constantes arbitraires qui figurent dans le système (I) pourraient se réduire à moins de n. Il s'ensuit que les équations

$$h_i(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = g_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

peuvent se résoudre par rapport aux C

$$C_i = \eta_i(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que le système (I) devient

$$y_i = h_i[y, \eta_1(x_0, c_1, \ldots, c_n), \ldots, \eta_n(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_n)] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ou simplement

$$y_i = H_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les H étant des fonctions parfaitement déterminées. Notre lemme est démontré.

Ceci posé, considérons le système (8). C'est un système d'équations différentielles ordinaires dont les équations (1) forment un système intégral, les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des constantes arbitraires. Mais il est clair que les équations différentielles (8) ne définissent pas un groupe unique de transformations, comme par exemple celui défini par les formules (1), car les x' ne sont pas déterminées comme fonctions des x par les équations (8). D'après le lemme précédent, pour que les équations (8) définissent un groupe unique, il suffit qu'on se soit donné une transformation déterminée du groupe, ou, d'une manière plus précise, que, pour $a = a_0$, les x' se réduisent à des fonctions données des x

$$x'_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Cherchons la forme des intégrales (8). Pour simplifier, nous introduirons un nouveau paramètre t en posant

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da. \tag{10}$$

Ces équations (8) prennent la forme réduite

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x') \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

et, dans ce système, la variable indépendante ne figure plus explicitement. Ecrivons ce système

$$\frac{dx'_1}{\xi_1(x')} = \frac{dx'_2}{\xi_2(x')} = \ldots \frac{dx'_n}{\xi_n(x')} = dt.$$

Si on prend les n premiers rapports, on a un système de $(n-1)$ équations différentielles à n variables dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$\Omega_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = c_i \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

les c_i étant des constantes arbitraires. Ceci suppose que les $(n-1)$ fonctions Ω sont indépendantes, c'est-à-dire qu'un au moins des déterminants fonctionnels par rapport aux variables x' ne soit pas identiquement nul. Admettons donc pour fixer les idées que ce soit celui relatif aux $(n-1)$ premières variables x',

$$\frac{D(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1})}{D(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1})} \neq 0.$$

Nous pouvons alors résoudre le système précédent par rapport à $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$, ce qui nous donne

$$x'_i = \pi_i(x'_n, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Pour obtenir la $n^{ième}$ intégrale du système proposé, nous considérerons l'équation différentielle

$$\frac{dx'_n}{\xi_n(x')} = dt$$

où nous remplacerons les $(n-1)$ variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$ par les valeurs obtenues. Elle devient

$$\frac{dx'_n}{\xi_n[\pi_1(x'_n, c_1, c_2, \ldots, c_n), \pi_2(x'_n, c_1, \ldots, c_n), \ldots, \pi_{n-1}(x'_n, c_1, \ldots, c_n), x'_n]} = dt.$$

Les variables étant séparées, l'intégration est immédiate et donne

$$\Omega(x'_n, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) = t + c_n.$$

Remplaçons dans cette relation les c_i par les Ω_i. Nous obtenons pour Ω une fonction des seules variables x' et que nous désignerons par Ω_n. Il suit de là que l'intégrale générale du système différentiel (11) sera représentée par les n équations

$$\begin{aligned} &\Omega_1(x') = c_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\Omega_{n-1}(x') = c_{n-1} \\ &\Omega_n(x') = t + c_n. \end{aligned}$$

Pour obtenir un groupe unique nous devons particulariser ce système de transformation en nous donnant une transformation du groupe. Choisissons la transformation unité, en supposant qu'elle fasse partie du groupe (ce qui n'est pas toujours le cas). Dans ce cas les équations (9) sont

$$x'_i = x_i \, (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et la valeur correspondante de t, en vertu de (10), est $t = 0$.

Pour $t = 0$, nous avons

$$\Omega_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Omega_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_i \; [i = 1, 2, \ldots, (n-1), n].$$

Le groupe est ainsi parfaitement déterminé et les équations qui le définissent sont

$$\left\{\begin{array}{l}\Omega_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Omega_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Omega_{n-1}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Omega_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \Omega_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \Omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + t.\end{array}\right. \tag{12}$$

Ces formules (12) définissent bien un groupe, car si l'on fait le produit des transformations S, définie par la valeur t_1 du paramètre, et T, définie par la valeur t_2 de t, on obtient la transformation ST, définie par la valeur $t_1 + t_2$ du paramètre.

De plus, il est évident que le produit TS représente la même transformation que le produit ST : on exprime cela en disant que les deux transformations S et T sont *permutables*.

Enfin, deux transformations étant dites *inverses* quand leur produit est l'unité, on reconnaît immédiatement que les transformations définies par les valeurs $\overline{t}$ et $-\overline{t}$ du paramètre jouissent de cette propriété.

5. Interprétation géométrique.

Il est facile d'interpréter géométriquement ces groupes de transformations à un paramètre dont fait partie la transformation unité.

Dans l'espace à n dimensions, les $(n-1)$ premières équations (12) représentent chacune une surface, et leur ensemble définit une ligne. Pendant la transformation, chaque point de l'espace reste situé sur la ligne qui lui correspond.

Faisons un changement de variables. Posons

$$y_1 = \Omega_1(x), \ldots, y_n = \Omega_n(x).$$

Nous transformons l'espace Σ à n dimensions, de coordonnées x, en un espace Σ' à n dimensions, de coordonnées y. Les équations (12) prennent la forme

$$y'_1 = y_1, y'_2 = y_2, \ldots, y'_n = y_n + t,$$

qui est dite la *forme normale* du groupe. Ces équations expriment qu'à toute transformation de l'espace Σ correspond dans l'espace Σ' une *translation* parallèle au $n^{ième}$ axe de coordonnées.

Problème I. — Soit à ramener à la forme normale le groupe des rotations autour d'un point du plan

$$\begin{cases} x' = x\cos t - y\sin t \\ y' = x\sin t + y\cos t. \end{cases}$$

On déduit de ces formules

$$\frac{dx'}{dt} = -y',$$
$$\frac{dy'}{dt} = x'.$$

D'où

$$\frac{dx'}{-y'} = \frac{dy'}{x'} = dt.$$

En prenant les deux premiers rapports on obtient

$$x'^2 + y'^2 = c^2.$$

Puis, l'équation

$$\frac{dy'}{x'} = dt$$

nous donne,

$$\frac{dy'}{\sqrt{c^2 - y'^2}} = dt.$$

Nous en tirons

$$\arcsin\frac{y'}{c} = t + c'.$$

Les équations du groupe peuvent donc s'écrire

$$\begin{cases} \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arcsin\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + t. \end{cases}$$

$\sqrt{x^2 + y^2}$ et $\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sont les variables canoniques.

En posant

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$$

$$\operatorname{arc\,sin}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\omega,$$

nous obtenons la forme normale du groupe

$$\begin{cases}\rho'=\rho\\ \omega'=\omega+t.\end{cases}$$

Problème II. — Ramener le groupe

$$\begin{cases}x'=a\,x\\ y'=a^2\,y\\ z'=a^3\,z\end{cases}$$

à la forme normale.

Les équations du groupe donnent

$$\frac{dx'}{x'}=\frac{dy'}{2y'}=\frac{dz'}{3z'}=\frac{da}{a};$$

d'où

$$\frac{y'}{x'^2}=\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{z'}{x'^3}=\frac{z}{x^3}$$

$$\operatorname{Log}x'=\operatorname{Log}x+t,\ \text{avec}\ t=\operatorname{Log}a.$$

On le ramènerait à la forme normale en prenant les variables canoniques $\frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^3}$ et $\operatorname{Log} x$ pour nouvelles variables.

Application aux équations différentielles ordinaires.

6. — Soit l'équation différentielle ordinaire d'ordre n

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)=0. \qquad (1)$$

Supposons que cette équation soit identique à l'équation obtenue en effectuant sur les variables x et y le changement de variables défini par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x' = f(x, y, a) \\ y' = g(x, y, a) \end{array}\right. \tag{2}$$

d'un groupe *connu* de transformations, *quelle que soit la valeur du paramètre a*. Nous dirons, pour abréger, que l'équation (1) *admet* le groupe (2). La connaissance d'un tel groupe permet de simplifier l'intégration de l'équation (1). Ramenons par un changement de variables le groupe (2) à la forme normale

$$\left\{\begin{array}{l} u' = u \\ v' = v + t. \end{array}\right.$$

Le même changement de variables, appliqué à l'équation différentielle (1), la transforme en une nouvelle équation du même ordre

$$F_1\left(u, v, \frac{dv}{du}, \ldots, \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0,$$

qui doit admettre le groupe $u' = u, v' = v + t$, c'est-à-dire ne doit pas changer quand on remplace v par $v + t$, quelle que soit la valeur du paramètre t. Or ceci ne peut évidemment avoir lieu que si F_1 ne contient pas v explicitement. Par suite l'équation transformée sera de la forme

$$F_1\left(u, \frac{dv}{du}, \ldots, \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0.$$

Si $u > 1$ on abaissera l'ordre de l'équation d'une unité en prenant pour nouvelle fonction inconnue $\frac{dv}{du}$.

Si $n = 1$ on obtiendra l'intégrale de l'équation par une quadrature.

Exemple I. — Soit une équation différentielle ordinaire d'ordre n homogène par rapport à $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^n y$. Elle ne change pas quand on remplace x par cx, y par cy et, par conséquent, admet le groupe de transformations défini par les formules

$$(\alpha) \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x} \\ \operatorname{Log} x' = \operatorname{Log} x + t, \end{array}\right.$$

où $t = \operatorname{Log} c$.

En posant

$$(\beta)\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = \operatorname{Log} x, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(\gamma)\begin{cases} x = e^v \\ y = u\,e^v, \end{cases}$$

on sera conduit à une nouvelle équation dont on pourra abaisser l'ordre d'une unité.

Si, en particulier, $n=1$, nous serons ramenés à une équation qui s'intégrera par une quadrature.

Ainsi, considérons l'équation différentielle

$$(\delta)\ y^3\frac{dy}{dx} + 3xy^2 + 2x^3 = 0,$$

homogène par rapport à x, y, dx, dy. Elle admet le groupe (α); par suite, le changement de variables défini par les formules (γ) nous ramène à une équation dont les variables se séparent :

$$dv = -\frac{u^3\,du}{u^4 + 3u^2 + 2},$$

et qui s'intègre par une quadrature.

L'intégrale de l'équation (δ) peut se mettre sous la forme

$$2x^2 + y^2 = c\sqrt{x^2 + y^2},$$

c étant une constante arbitraire.

Exemple II. — Supposons qu'une équation différentielle ordinaire ne change pas quand on remplace x par kx et y par $k^n y$. Elle admettra donc le groupe

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = k^n y \end{cases}$$

qu'on peut écrire :

$$(\alpha)\begin{cases} \dfrac{y'}{x'^n} = \dfrac{y}{x^n} \\ \operatorname{Log} x' = \operatorname{Log} x + t. \end{cases}$$

Les variables canoniques seront $\dfrac{y}{x^n}$ et $\operatorname{Log} x$ et nous poserons

$$(\beta)\begin{cases} \dfrac{y}{x^n} = u \\ \operatorname{Log} x = v. \end{cases}$$

Nous en tirons inversément

$$(\gamma)\begin{cases} x = e^{v} \\ y = u e^{nv}. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons vu, par ce changement de variables, nous pourrons abaisser l'ordre de l'équation d'une unité.

Prenons, par exemple, l'équation différentielle du second ordre

$$(\delta)\ x^4 y'' - x(x^2 + 2y)y' + 4y^2 = 0.$$

Comme on le vérifie immédiatement, elle ne change pas quand on remplace x par kx et y par $k^2 y$. Dans ce cas $n = 2$, et nous ferons le changement de variables

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} = u \\ \operatorname{Log} x = v, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = e^{v} \\ y = u e^{2v}. \end{cases}$$

L'équation (δ) devient

$$-\frac{v''}{v'^2} + 2(1 - u) = 0,$$

où v a disparu, et dont l'intégration est immédiate. Nous obtenons

$$\frac{1}{v'} + 2u - u^2 = \mathrm{C}.$$

Le calcul s'achève aisément.

Exemple III. — Soit encore l'équation linéaire

$$(\alpha)\ \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y + \mathrm{Q} = 0.$$

Considérons d'abord l'équation

$$(\beta)\ \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = 0,$$

homogène par rapport à y et $\frac{dy}{dx}$. Elle admet le groupe

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = cy, \end{cases}$$

que l'on peut écrire

$$\begin{cases} x' = x \\ \operatorname{Log} y' = \operatorname{Log} y + t, \end{cases}$$

où $t = \operatorname{Log} c$.

D'après ce que nous avons vu, cette équation s'intégrera par une quadrature en prenant pour fonction inconnue $\operatorname{Log} y$, et en conservant x pour variable indépendante. Soit y une intégrale particulière de (β). L'équation (α) admet, comme on le vérifie, le groupe

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + cy_1. \end{cases}$$

Nous pouvons mettre ces formules sous la forme

$$\begin{cases} x' = x \\ \dfrac{y'}{y_1} = \dfrac{y}{y_1} + c. \end{cases}$$

Par suite nous prendrons comme nouvelles variables x et $\frac{y}{y_1}$ et nous serons conduits à une équation intégrable par une quadrature.

7. — La théorie des groupes continus de transformations à un paramètre de Lie permet donc de rattacher à un seul point de vue ces procédés d'intégration des équations différentielles ordinaires du premier ordre et les cas d'abaissement des équations d'ordre supérieur. Ces méthodes particulières qui nous paraissaient des artifices de calcul sans lien entre eux ne sont au fond que des cas particuliers de la méthode précédente.

8. — Jusqu'ici nous avons supposé que nous connaissions le groupe de transformations. Nous sommes donc amenés à résoudre le problème très important suivant:

Reconnaître si une équation différentielle donnée admet un ou plusieurs groupes continus de transformations à un paramètre et déterminer ces groupes.

Pour résoudre ce problème, il nous faudrait étudier les transformations infinitésimales, ce que je ne ferai pas ici. Je me contenterai de faire remarquer que l'on peut parfois prévoir qu'une équation admet un groupe déterminé. Par exemple, on reconnaît immédiatement que l'équation différentielle des projections sur le plan des xy des lignes de courbure ou des lignes asymptotiques, d'une surface de révolution d'axe OZ admet le groupe des rotations autour de l'origine. En effet, il est évident que si une courbe C du plan des xy répond à la question, il en est de même des courbes obtenues en faisant tourner C d'un angle quelconque autour de l'origine; leur équation différentielle devra donc être de la forme $F\left(\rho, \frac{d\omega}{d\rho}\right)=0$ et s'intégrera par une quadrature.