

Une application du principe de relativité

Autor(en): **Pasquier, L.-Gustave du**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **45 (1919-1920)**

PDF erstellt am: **05.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-88617>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Une application du principe de relativité

PAR

L.-GUSTAVE DU PASQUIER, professeur à l'Université

— 316 —

Comme les circonstances ne permettent pas de publier in extenso les deux conférences que j'ai faites à la Société neuchâteloise des sciences naturelles sur

*Le principe de relativité
et ses rapports avec la géométrie non-euclidienne,*

j'en donne ici un extrait : la partie qui se rapporte à la vraie forme des orbites planétaires telle qu'elle résulte de la nouvelle mécanique céleste que le principe de relativité substitue à la mécanique classique.

Dans l'évolution historique de la théorie de la relativité, on distingue nettement deux phases :

1. *La théorie de la relativité spéciale, ou restreinte.* Elle postule, ou admet que, dans le vide, la lumière se propage toujours en ligne droite et avec une vitesse constante, la même dans toutes les directions.

J'ajoute d'emblée qu'au point de vue physique ce principe spécial de relativité ne touche pas à la théorie de la gravitation ; par contre, il renverse la cinématique et la mécanique classiques établies par GALILÉE et NEWTON. Au point de vue mathématique, il permet de maintenir la géométrie euclidienne dans toute sa rigueur et sa belle simplicité.

2. *La théorie de la relativité générale.* Elle n'admet plus la constance de la vitesse de propagation de la lumière dans toutes les directions et en ligne droite. Au contraire, d'après cette théorie générale, la lumière, bien entendu *dans le vide*, peut se propager en ligne courbe et même le fait quand elle passe dans le voisinage de corps matériels qui ont une masse suffisante. J'ajoute dès maintenant qu'au point de vue physique le principe général de relativité modifie très profondément la doctrine classique de la gravitation. Il oblige d'abandonner non

seulement la mécanique galiléo-newtonienne comme non rigoureuse, mais même la géométrie euclidienne. Si l'on admet le principe général de relativité, il en découle comme conséquence logique et nécessaire l'impossibilité de la géométrie ordinaire, du moins dans un espace soumis à des forces de gravitation. C'est la géométrie non-euclidienne qui est imposée. Mécanique et géométrie classiques ne sont plus que des approximations, d'ailleurs très bonnes, de la réalité.

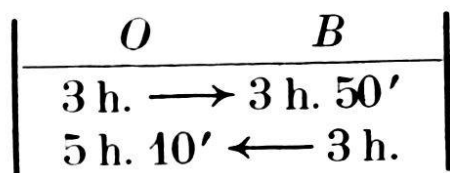
.

Dans l'étude des phénomènes, toute description qui ne donne aucune indication relative au temps est par là même partielle. Ce n'est qu'en introduisant *le temps* qu'on arrive à la notion de vitesse si essentielle dans les sciences exactes. Vous allez voir que le problème de la mesure du temps est un peu moins simple que celui de la mesure de l'espace.

Un observateur N muni d'un chronomètre et qui se trouve en un endroit donné, disons à Neuchâtel, peut déterminer à quels instants précis ont lieu les événements dans son voisinage immédiat, mais il n'en est pas de même des événements qui se passent dans des régions *très lointaines*, p. ex. sur l'étoile Véga éloignée de nous d'environ 204·000 000·000 000 de km , distance que la lumière emploie plus de 21 ans 8 mois à parcourir. Si l'observateur N note l'instant auquel lui parvient le rayon lumineux qui lui apporte la nouvelle d'un événement E ayant eu lieu en un point B très éloigné, cet instant est postérieur à l'instant t où l'événement E s'est passé réellement, puisque le rayon lumineux a mis un certain temps pour arriver de B à l'œil de l'observateur N . Comment déterminer l'instant t ? Notre savant N pourrait le calculer grâce à ses observations chronométriques, s'il connaissait la vitesse de propagation de la lumière dans la direction BN . Or, mesurer cette vitesse n'est possible que si l'on sait déterminer: 1) la distance BN , 2) l'instant du départ de B et 3) l'instant d'arrivée en N du rayon lumineux. Cela suppose donc que l'observateur N a déjà résolu le problème de la détermination de l'heure au point B . Vous voyez qu'on tombe dans un cercle vicieux. Pour en sortir, il faut faire des hypothèses. La suivante est très plausible: *dans le vide, un rayon lumineux met le même temps pour aller de B en N que pour se propager de N en B* . Cette hypothèse (car malgré sa simplicité, c'est une hypothèse) permet effectivement de régler, même sans connaître la vitesse de propagation de la lumière, des chronomètres très éloignés l'un de l'autre. Voici comment:

Deux observateurs munis chacun d'un chronomètre, l'un se trouvant à l'origine des coordonnées O , l'autre en B , ont convenu de s'envoyer mutuellement un bref signal lumineux à l'instant précis où leurs chronomètres marquent 3 heures, de noter l'heure de réception du signal envoyé par l'autre, puis de se communiquer leurs observations. La distance OB qui les sépare est supposée rester constante.

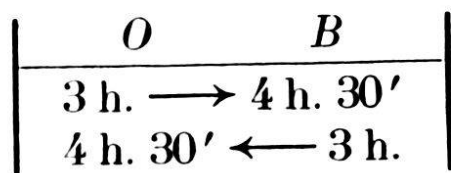
Premier exemple. Supposons la distance OB de 1 milliard 620 millions de km (Terre-Saturne). 1) le signal envoyé par B (à l'instant où le chronomètre B marque 3 h. précises, comme convenu) parvient à l'observateur O quand le chronomètre de celui-ci marque par exemple 5 h. 10' ; — 2) le signal envoyé par O (à l'instant où le chronomètre O marque 3 h. précises) parvient à l'observateur B au moment où le chronomètre de celui-ci marque 3 h. 50'. Je représente ces suppositions par le schéma que voici :



Cet exemple donne lieu au calcul suivant :

$$5 \text{ h. } 10' - 3 \text{ h. } 50' = 1 \text{ h. } 20' = 80', \text{ dont la moitié est } 40 \text{ minutes.}$$

L'observateur O télégraphie à B de faire avancer de 40 minutes les aiguilles de son chronomètre, puis de recommencer l'expérience. On se convaint que, ce changement étant fait, l'expérience donnera lieu au schéma



En effet, à l'arrivée du rayon lumineux en B , le chronomètre y marquera $3 \text{ h. } 50' + 40' = 4 \text{ h. } 30'$, puisque les aiguilles y ont été avancées de 40' ; pour cette même raison, le signal lumineux qui part de B à 3 h., part en réalité 40' plus tôt que la première fois, donc arrive aussi 40' plus tôt en O , soit à $5 \text{ h. } 10' - 40' = 4 \text{ h. } 30'$.

Les chronomètres sont maintenant *réglés l'un sur l'autre*, en vertu de l'hypothèse faite tout à l'heure sur la propagation de la lumière entre O et B . On voit que le procédé ne suppose pas connue la distance OB .

Deuxième exemple. Soit $OB = 180$ millions de *km.* (Terre-Vénus). Supposons que l'expérience fournisse le schéma

$$\left| \begin{array}{cc} O & B \\ \hline 3 \text{ h.} \longrightarrow 4 \text{ h. } 10' \\ 2 \text{ h. } 10' \longleftarrow 3 \text{ h.} \end{array} \right|$$

(voir le premier exemple). Calcul : $2 \text{ h. } 10' - 4 \text{ h. } 10' = -2 \text{ h.}$ dont la moitié est -1 h. *O* télégraphiera donc à *B* de *retarder* son chronomètre de 60 minutes. L'expérience étant alors recommencée, donnera le schéma

$$\left| \begin{array}{cc} O & B \\ \hline 3 \text{ h.} \longrightarrow 3 \text{ h. } 10' \\ 3 \text{ h. } 10' \longleftarrow 3 \text{ h.} \end{array} \right|$$

qui prouve que maintenant les chronomètres sont réglés l'un sur l'autre.

Cette hypothèse et le procédé qui en découle et que je viens d'illustrer par des exemples permettent de « *chronométriser l'espace* par la voie optique », c'est-à-dire de régler l'un sur l'autre des chronomètres placés à des distances quelconques, et cela *sans connaître ni la vitesse de propagation de la lumière ni la distance des chronomètres.* Pour des distances moins grandes, on supposera les horloges munies d'aiguilles indiquant les secondes, les dixièmes et les centièmes de secondes ; pour des distances très grandes, d'aiguilles marquant les jours, les mois, les années.

Ce procédé résout le problème de la détermination de l'heure par la physique expérimentale. Pour connaître l'instant précis t d'un événement quelconque E , il faut : 1) supposer une horloge à l'endroit B où se passe l'événement E , ou dans le voisinage immédiat de B ; 2) supposer qu'elle ait été réglée par la voie optique sur le chronomètre-étalon qui se trouve à l'origine O du système de coordonnées. L'indication de l'horloge B sera l'instant cherché t .

Vous pourriez me demander : « Qu'y a-t-il là de particulier ? Tout cela est si naturel et évident ! » Pourtant, en y regardant de près, on voit que la définition de l'heure à laquelle nous sommes arrivés, n'a pas un caractère absolu ; cette définition du temps se rapporte au contraire à un système d'horloges réparties dans l'espace, bien réglées sur un même chronomètre-étalon et, chose capitale, supposées *toutes immobiles les unes*

par rapport aux autres, liées invariablement au chronomètre-étalon O avec lequel elles forment un système rigide. On voit sans peine que deux horloges réglées sur le même chronomètre sont aussi réglées l'une sur l'autre. C'est pourquoi l'on appelle le temps ainsi défini le *temps propre*, ou *temps local* du système en question. De même, l'heure indiquée par une horloge en un point B lié invariablement à ce système est dite l'*heure locale*. Elle est aussi relative, parce qu'elle présuppose que le système de coordonnées auquel on a rapporté B , a été chronométré par la voie optique sur une horloge-étalon placée à l'origine des coordonnées.

Imaginez un grand laboratoire magnifiquement outillé où de nombreux savants étudient les lois de la nature. Ce laboratoire numéro I sera porteur d'un système de coordonnées cartésiennes lié invariablement à lui. Comme les axes du trièdre de référence devront s'étendre jusque dans les espaces interplanétaires, nous pouvons d'emblée lui attribuer des dimensions colossales. Dans ce vaste laboratoire S_1 sont répartis des observateurs munis chacun des appareils les plus perfectionnés, entre autres d'un chronomètre réglé sur l'horloge-étalon qui est en O_1 , origine des coordonnées. Cet ensemble d'horloges et de chronomètres définit le temps dans S_1 et sert à le mesurer, en donnant l'heure locale en chaque point. C'est ce double ensemble : système de coordonnées cartésiennes et système de chronomètres bien réglés que nous entendrons en parlant du *Système S_1* ou *Laboratoire S_1* . Les savants qui travaillent dans S_1 peuvent décrire complètement les phénomènes cinématiques, mécaniques, physiques, chimiques, etc., puisqu'ils ont les moyens d'indiquer pour tout événement E : 1) l'endroit précis B où il se passe, en mesurant les trois coordonnées x_1, y_1, z_1 du point B ; 2) l'instant précis où il a lieu, en notant l'indication t_1 de l'horloge placée dans le voisinage immédiat de B . Tout événement E , par exemple toute coïncidence de points, est ainsi caractérisé par quatre nombres x_1, y_1, z_1, t_1 , relatifs au système S_1 , nombres déterminables expérimentalement et dont chacun a un sens physique bien défini. J'appelle ces quatre nombres « les coordonnées topochroniques de l'événement E dans le système S_1 », en particulier : x_1, y_1, z_1 les coordonnées spatiales et t_1 la coordonnée temporelle de E .

.....

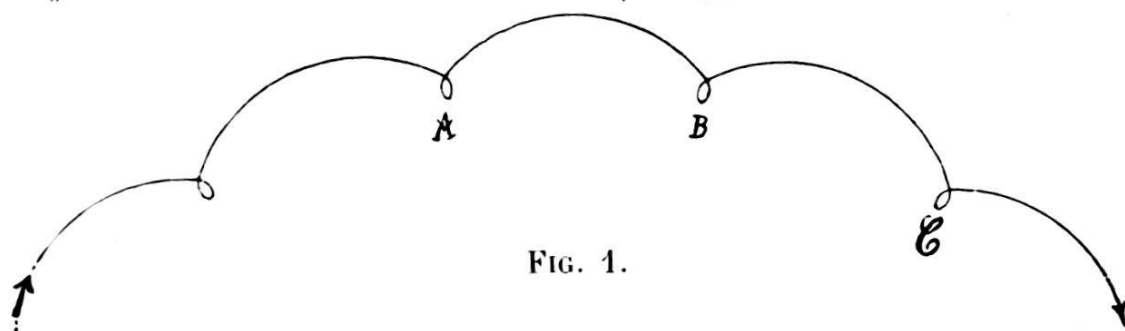
Il y a une vingtaine d'années à peu près que, voyageant en Allemagne, je me trouvais dans un petit chemin de fer. Le

train avait à sa gauche une grande forêt vert sombre dont il longeait la lisière, tandis qu'à sa droite s'étendaient des prairies entrecoupées de champs. La voie ferrée s'allongeait en ligne droite à perte de vue, si bien que les rails semblaient concourir en un point, comme les parallèles à l'infini dans la géométrie euclidienne. Le train roulait à une allure très modérée, parce qu'on réparait la voie non loin de cet endroit ; à quelques kilomètres de distance, on pouvait discerner des équipes d'ouvriers occupés aux travaux de réfection. En regardant par la fenêtre, j'aperçus par hasard, peinte sur la paroi extérieure du wagon, une mince ligne droite verticale.

J'eus l'idée de faire une expérience de physique et de vérifier si les corps tombent toujours en ligne droite. J'avais encore en poche un caillou dont la forme cylindrique et les couleurs particulières avaient attiré mon attention et qu'à cause de son poids spécifique, qui m'avait paru considérable, j'avais ramassé en cours de route. Je sortis donc mon caillou, puis, le tenant entre le pouce et l'index, aussi près que possible de la paroi du wagon, je l'abandonnai à l'action de la pesanteur et observai attentivement sa chute, oubliant tous les règlements de la police des chemins de fer. Je constatai qu'il suivit exactement la mince ligne droite verticale peinte sur la paroi du wagon. Il n'y avait pas le fort courant d'air que le voyageur ressent habituellement quand il regarde par une fenêtre de wagon : le train, j'en ai dit la raison, marchait à une allure très modérée et par hasard dans la direction même du vent. Mon petit caillou étant relativement très pesant, tout concourait à la réussite de l'expérience. Pour bien observer, je tins fermé mon œil gauche, de façon à avoir la vision monoculaire de la trajectoire. Je constatai donc, de mon œil droit, que la trajectoire était bien une ligne droite, jusqu'au moment où mon caillou disparut dans une touffe d'herbe près du talus.

Ce méfait eut un témoin : un homme était apparu à côté d'un bosquet d'arbres, non loin de la voie ferrée et observait le phénomène, les yeux grands ouverts. Ce témoin me reconnut. C'était un jeune fonctionnaire allemand, mais c'était aussi un ancien camarade d'école, heureusement pour moi. Quelque temps après, il m'avait retrouvé et me parlait des conséquences qu'entraîne l'inobservation des règlements de la police des chemins de fer en Allemagne. Je lui racontai l'expérience de physique que j'avais faite, ajoutant que je n'avais enfreint aucun règlement, puisque je n'avais rien « lancé » par la fenêtre du wagon, que j'avais abandonné le caillou à l'action de la pesanteur sans lui communiquer de vitesse initiale. Pendant

qu'il réfléchissait encore sur le *distinguo* inattendu que je venais de faire et pour détourner la conversation du brûlant terrain juridique, je lui posai la question : « Quelle est la vraie trajectoire de mon caillou ? » Je me rappelai très à propos que



mon ancien camarade d'école s'était toujours beaucoup intéressé à la philosophie et aux mathématiques. « Pour moi », ajoutai-je, « qui ai observé le phénomène attentivement de mon œil droit, avec toute l'exactitude possible, j'ai constaté que la trajectoire en question était *une ligne droite*. » — « Erreur », répondit-il, « tu oublies décidément que tu étais en chemin de fer : Moi qui ai observé le phénomène de mes deux yeux, même grands ouverts, j'ai vu que ton caillou n'a pas suivi la ligne droite marquée par le poteau télégraphique devant lequel tu passais justement ; j'ai constaté que la trajectoire était un arc de parabole ; je la vois encore quand je le veux, se projetant sur le fond vert sombre de la forêt. D'ailleurs, ton caillou cylindrique a fini sa trajectoire depuis qu'il s'est échoué près des rails. » — « Erreur », répliquai-je à mon tour, « tu oublies que la Terre tourne. La vraie trajectoire, si elle n'était pas un segment de droite comme je l'ai constaté *de visu*, n'était en tout cas pas un arc de parabole. D'ailleurs, mon caillou ne s'est pas brisé en tombant près des rails ; il est donc loin d'avoir fini sa trajectoire. Même s'il était tombé au pôle nord, il décrirait encore une ellipse dont le Soleil occuperait l'un des foyers ; mais comme nous ne sommes pas au pôle nord, sa vraie trajectoire est plus compliquée. Elle résulte des deux mouvements que notre globe exécute simultanément dans l'espace : 1) rotation diurne sur son axe ; 2) révolution annuelle autour du Soleil. » — Et nous voilà lancés dans une longue discussion sur la forme de la vraie trajectoire de mon caillou cylindrique.

Si la Terre exécutait une révolution annuelle en 365 jours exactement, la trajectoire en question serait une courbe fermée composée de 365 boucles.

La *fig. 1* en représente une partie ; mais en réalité —

comme on le voit immédiatement pour des points situés près du pôle nord ou dans le voisinage du pôle sud — la trajectoire ne présente pas de boucles ; ce serait une épicycloïde elliptique raccourcie, courbe qui serpente entre deux ellipses concen-

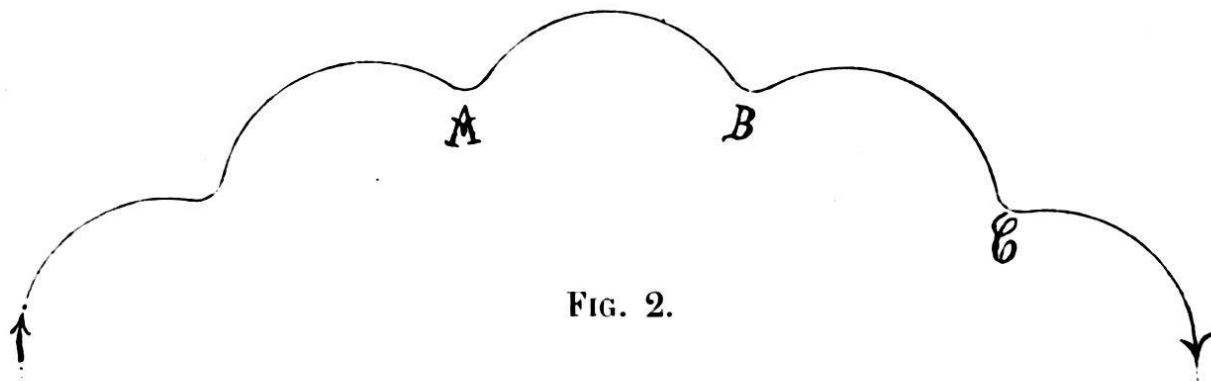


FIG. 2.

triques, sans points doubles et dont la *fig. 2* représente une partie. Cependant, dans la *fig. 3* et pour les déductions du texte s'y rapportant, j'ai laissé subsister les boucles et les points doubles, vu que cela facilite l'exposé et qu'il ne s'agit pas d'une description de la trajectoire rigoureusement exacte, mais uniquement d'un schéma destiné à en donner une idée générale.

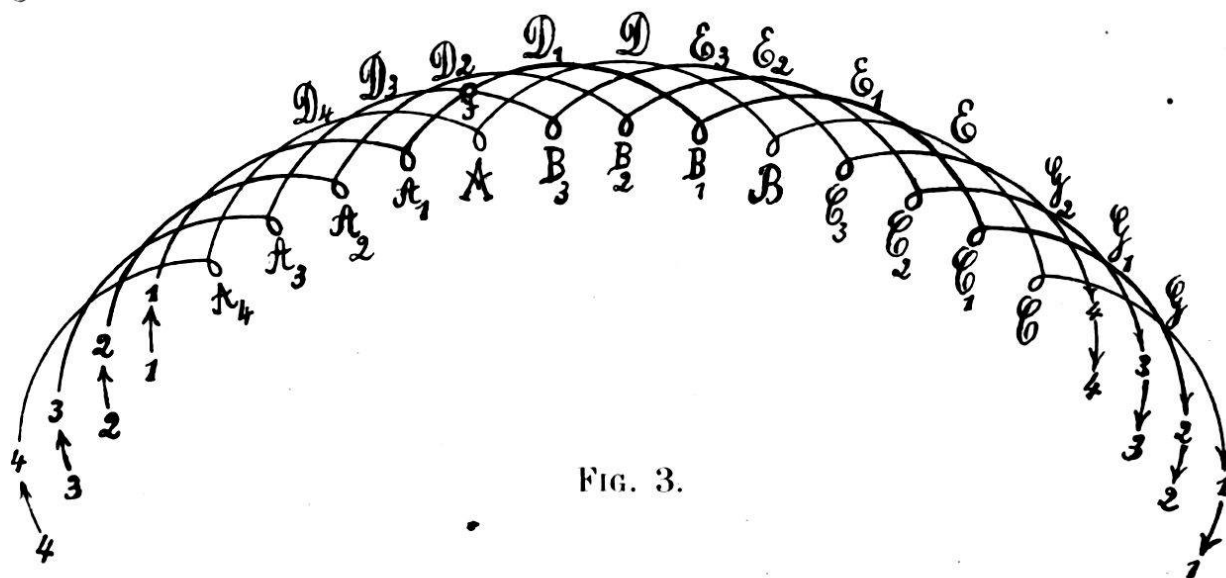


FIG. 3.

Or, une révolution de la Terre autour du Soleil dure à peu près 365 jours et six heures. Représentons par le point *A* (*fig. 3*) le point de l'espace planétaire où vint choir mon caillou cylindrique près des rails. Sa trajectoire passera par *A D B E C G...*, chaque boucle correspondant à l'espace parcouru en 24 heures. Au bout de 365 jours précis, ayant exécuté 365 boucles semblables, le caillou se trouvera non en *A*, mais en *A₁* ; au bout de la première année exactement, le centre de la

Terre occupant de nouveau la même position, le caillou sera dans le voisinage de A , disons en J , puis, continuant sa trajectoire, passera par $D_1 B_1 E_1 C_1 G_1 \dots$. Au bout de 365 nouvelles circonvolutions, il se trouvera en A_2 pour continuer par $D_2 B_2 E_2 C_2 G_2 \dots$. Ayant exécuté pour la troisième fois 365 circonvolutions en 365 jours, il se trouvera en A_3 et continuera par $D_3 B_3 E_3 C_3 G_3$; enfin, après avoir fait pour la quatrième fois 365 boucles en 365 jours, il se trouvera en A_4 ; continuant alors par D_4 , il viendra en A emboîter exactement la trajectoire commencée quatre ans auparavant. — Voilà quelle serait la trajectoire, si l'année comptait exactement 365 jours six heures.

Or, on sait que l'année sidérale comprend 365,25636 jours, soit 365 jours 6 heures 9 minutes et 9,504 secondes, et l'année tropique 365,2422166 jours = 365 jours 5 heures 48 minutes 48 secondes. Vous voyez dans quelle discussion astronomique autant que mathématico-philosophique cette question nous lança. Nous finîmes pourtant, en nous disant adieu deux jours plus tard, par tomber d'accord : en supposant rigoureusement exactes les données qui servaient de base à nos déductions et faisant abstraction des *perturbations* astronomiques, la vraie trajectoire de mon caillou cylindrique serait une courbe fermée très compliquée et que le centre de gravité du dit caillou mettrait 250 siècles à parcourir une fois. Tous les 25 000 ans, il recommencerait à coïncider périodiquement avec les mêmes points de l'espace planétaire. Tel fut le résultat de nos calculs et de notre longue discussion.

Erreur ! puis-je dire aujourd'hui. Ignorants que nous étions, nous supposions que le Soleil reste en place, immobile au centre de l'univers. On sait aujourd'hui qu'au contraire, le Soleil est lancé dans les espaces cosmiques, dans la direction de la constellation d'Hercule, avec une vitesse qui dépasse 80 000 *km* à l'heure, entraînant avec lui tout notre système planétaire. Dans ces circonstances, la vraie trajectoire de mon caillou ne saurait être une courbe fermée du genre de celles que je viens de décrire, puisqu'en une année, le Soleil se déplace d'environ 800 millions de *km*, que par conséquent le caillou, parti de A , ne se retrouvera au bout de l'année sûrement pas dans le voisinage de A . Si le Soleil file en ligne droite, la trajectoire du caillou n'est pas une ligne fermée. Mais le Soleil, et tout notre monde planétaire avec lui, ne gravite-t-il pas plutôt autour d'un astre de la constellation d'Hercule, mettant peut-être des millions d'années à parfaire une révolution ? Mystère ! Tout ce que nous savons aujourd'hui, c'est que la distance du Soleil

à la constellation d'Hercule diminue à raison de plus de 80 000 *km* par heure. Qui nous dit que la constellation d'Hercule reste immobile? Et si ce n'est pas le cas, est-ce cette constellation qui fuit devant le Soleil, pour être un beau jour rattrapée par lui, après des millions ou des milliards de siècles? Ou est-ce notre Soleil qui fuit devant elle, comme s'il cherchait à échapper? Encore une fois : mystère ! Je pense que ni l'un ni l'autre n'est le cas. Le Soleil et les astres de la constellation d'Hercule décrivent chacun son orbite, et ces orbites, très probablement, se croisent dans l'espace et ne se coupent pas. Il n'y aura donc très probablement jamais cette catastrophe de tamponnement stellaire.

Mais alors, quelle est donc la vraie trajectoire de mon caillou cylindrique? Mesdames et Messieurs, je vous pose la question. Quelle est sa trajectoire réelle, sa trajectoire absolue, indépendante de la Terre et du Soleil et de la constellation d'Hercule et de tous les astres de l'univers? Quelle en est *la trajectoire en soi*?

Après réflexion, vous arriverez au résultat que, posée en ces termes, *la question n'a pas de sens précis*. En effet, l'idée d'une « trajectoire *en soi* décrite par un point » n'a aucun sens mathématique ni physique. — Je laisse ouverte la question du sens métaphysique, me bornant à rappeler la définition que donnait VOLTAIRE de la métaphysique : Deux interlocuteurs *A* et *B* discutent ; si *A* ne comprend pas ce que dit *B*, mais comprend ce qu'il dit lui-même et que, réciproquement, *B* ne comprenne pas ce que dit *A*, mais comprenne ce qu'il dit lui-même, alors c'est de la philosophie ; si au contraire, *A* ne comprend ni ce que dit *B* ni ce qu'il dit lui-même, et que, réciproquement, *B* ne comprenne ni ce que dit *A*, ni ce qu'il dit lui-même, alors c'est de la métaphysique.

Pour donner à la question posée un sens physique et mathématique, il faut et il suffit qu'on mentionne *un système de coordonnées*, ou qu'on le sous-entende ; en langage populaire : il faut placer l'observateur dans un laboratoire déterminé. — Envisageons d'abord la trajectoire parcourue par mon caillou depuis l'instant où ma main le lâcha jusqu'au moment où il atteignit le talus. On pourra répondre en disant : « dans un système de coordonnées lié invariablement au train, la trajectoire en question est un segment de droite » ; ou bien en disant : « dans un système de coordonnées lié invariablement à la surface terrestre, la trajectoire en question est un arc de parabole. » Les deux propositions sont justes. Elles ont chacune un sens mathématique nettement défini ; toute apparence de

contradiction a disparu ; elles ont aussi un sens physique : si nous disons « laboratoire » au lieu de « système de coordonnées », un physicien muni des appareils nécessaires et placé dans ce laboratoire pourra, par des manipulations appropriées, vérifier l'exactitude de la proposition dans les deux cas.

Envisageons maintenant la trajectoire du caillou à partir de l'instant où il resta enfoncé dans le talus. On peut répondre à la question posée en disant : 1/ « Dans un système de coordonnées lié invariablement à la surface du globe, la trajectoire en question se réduit à un point. » En effet, dans un tel laboratoire, le caillou reste immobile. Ou bien : 2/ « Dans un système de coordonnées lié invariablement au Soleil, la trajectoire envisagée est une courbe fermée assez compliquée, semblable à celle décrite précédemment. » Ou bien : 3/ « Dans un système de coordonnées lié invariablement à la constellation d'Hercule, la trajectoire envisagée est une courbe très compliquée et sans doute non fermée. » Ou bien : 4/ « Dans un système de coordonnées lié invariablement à l'étoile Sirius, la trajectoire en question est une courbe dont actuellement on ne saurait écrire l'équation sans faire des hypothèses sur le mouvement de Sirius par rapport au Soleil. » — Et ainsi de suite. Toutes ces propositions sont justes. Elles ne se contredisent pas et ont chacune un sens mathématique nettement défini. Elles ont aussi chacune un sens physique, et si l'on imaginait des laboratoires géants, englobant tout le système planétaire, avec des physiciens de taille proportionnée à l'immensité du laboratoire, ces propositions seraient susceptibles de vérification expérimentale.

En résumé, vous voyez que la forme de la trajectoire de mon caillou cylindrique dépend du système de coordonnées auquel on la rapporte, ou du laboratoire dans lequel on suppose placé l'observateur. — Or, tous les systèmes de coordonnées cartésiennes sont illimités dans leurs dimensions ; tous les trièdres de référence s'étendent à l'infini ; tous les « laboratoires » dont nous parlons ici sont censés être également vastes et bien aménagés. « Par quoi se distinguent-ils alors l'un de l'autre ? » me demanderez-vous ; « est-ce par leur position dans l'espace planétaire ? » — « Non », sera la réponse, « car dès que deux laboratoires sont immobiles l'un par rapport à l'autre, nous les envisagerons comme formant corps, comme constituant un seul et même *système invariable*, un seul et même laboratoire. L'unique différence qui entre ici en question réside dans leur état de mouvement. » — Voici donc le résultat

auquel conduisent toutes ces déductions : *La forme de la trajectoire dépend de l'état de mouvement de l'observateur.*

Les considérations développées à propos de mon caillou cylindrique peuvent être appliquées à n'importe quel mouvement, aux lois du pendule aussi bien qu'aux orbites des planètes. On voit que pour être précis et rigoureux dans l'énoncé des lois mécaniques, physiques, chimiques, etc., il faut, explicitement ou non, les rapporter à un système de coordonnées bien déterminé. Le plus souvent, en décrivant les phénomènes de la nature, on sous-entend qu'ils se passent dans un « laboratoire » faisant corps avec la Terre et auquel l'observateur est lié invariablement. Ce fut même toute une révolution, inaugurée par COPERNIC, puis continuée par KÉPLER et achevée par NEWTON, que de concevoir un observateur immobile par rapport au Soleil, d'imaginer un système de coordonnées héliocentrique. La notion de *trajectoire* ou d'*orbite*, tout comme celle de *mouvement*, est essentiellement relative et implique un trièdre de référence, sous-entendu ou explicitement mentionné. Or, il en est de même de la notion de temps. Au point de vue physique, « le temps en soi » n'a pas davantage un sens net que « la trajectoire en soi ». Pour donner à l'idée de *temps* un sens précis, il faut que le système de coordonnées où opère le savant soit chronométré par une méthode déterminée sur une horloge-étalon. (Voir p. 13-15.)

Dans la mécanique céleste fondée par NEWTON, une énigme restait sans réponse définitive : le mouvement du périhélie de la planète Mercure ☿. En 1845 déjà, LEVERRIER, calculateur aussi habile que persévérant, trouva que le dit périhélie, au lieu de rester fixe, ou à peu près, se déplace constamment dans le même sens, d'une quantité qu'il trouva correspondre à un angle de 38'' environ par siècle. La discussion approfondie de toutes les observations a prouvé qu'en principe, LEVERRIER avait raison, l'irrégularité constatée étant presque 30 fois plus grande que son erreur probable, mais que l'écart est de 43'' \pm 5'' par siècle. Il est donc constaté irréfutablement : 1) *que le périhélie de ☿ se déplace, dans le sens du mouvement de la planète autour du Soleil, plus rapidement qu'il ne devrait le faire d'après la mécanique céleste de Newton ; 2) que cet écart entre le résultat du calcul et celui de l'observation directe est de 43'' par siècle, à très peu de chose près.*

Pour expliquer cette perturbation, on eut recours à plusieurs hypothèses que je classe en deux catégories :

α) Le plus naturel était de répéter ce qu'avaient fait

LEVERRIER et ADAMS pour expliquer les perturbations d'Uranus : supposer l'existence de planètes « intramercurielles » encore inconnues, c'est-à-dire de planètes dont l'orbite est entièrement comprise entre ζ et le Soleil. Mais ce fut toujours en vain que les télescopes les plus puissants fouillèrent le ciel aux endroits que désignaient les calculateurs. Il fallait donc une hypothèse supplémentaire pour expliquer l'invisibilité constante de la planète hypothétique.

β) On supposa qu'il n'y a pas de planètes intramercurielles, mais que dans le voisinage du Soleil tourbillonnent des millions de météores, attirés par la force de gravitation et décrivant autour de lui les ellipses les plus variées. Des calculs laborieux prouvent qu'on peut faire sur les masses, les positions et les vitesses de ces innombrables météores des hypothèses tellement appropriées qu'il en résulte, en vertu de la gravitation universelle et des lois de la mécanique classique, précisément le mouvement énigmatique du périhélie de ζ . Ici encore, il faut une hypothèse supplémentaire pour expliquer l'invisibilité constante et absolue de ces corps hypothétiques.

Bref, pour rendre compte du fameux mouvement du périhélie de Mercure, on était obligé d'avoir recours à des masses encore inconnues du système solaire, et comme aucune recherche télescopique ou autre ne venait confirmer l'existence de ces masses, on expliquait leur invisibilité par de nouvelles hypothèses imaginées *ad hoc* et que l'on admettait faute de mieux. Voilà où en était la mécanique céleste de NEWTON au moment où ALBERT EINSTEIN lança sa théorie de la relativité.

M. A. EINSTEIN donna au principe spécial de relativité la plus grande extension possible, en admettant que, dans le vide, la lumière se propage toujours avec une vitesse constante $\sigma = 300\,000$ km par seconde, la même dans toutes les directions. Il n'hésita pas à remplacer la mécanique galiléo-newtonienne par une autre dite *mécanique de la relativité*, dont il établit quelques théorèmes fondamentaux. Par un hasard des plus heureux, M. H.-A. LORENTZ avait déjà introduit certaines notions nouvelles qui sont essentielles et qui ont rendu possible la théorie de la relativité, par exemple l'idée de la contraction longitudinale et d'autres formules encore. Il est juste de dire que sans ces précurseurs, la nouvelle théorie ne se serait pas édifiée si tôt. La mécanique de la relativité étant différente de la classique, il va sans dire que si l'une est juste, l'autre sera fautive. Mais en comparant les formules, on voit aussi que, dans les conditions habituelles, la différence n'est que théorique et imperceptible en pratique. Si la mécanique nouvelle

décrit les phénomènes avec une exactitude mathématique, la mécanique galiléo-newtonienne en est une approximation extraordinairement bonne.

Exemple : le théorème d'addition des vitesses. En supposant que les vitesses v et w aient même direction, la mécanique classique donne pour la résultante $c = v + w$, tandis que la

mécanique de la relativité donne
$$c = \frac{v + w}{1 + \frac{v \cdot w}{\sigma \cdot \sigma}}$$

où σ , vitesse de la lumière dans le vide, est une constante d'univers et = 300 000 *km* par seconde.

Il est d'un haut intérêt de savoir laquelle des deux cinématiques est juste. Seule, l'expérience peut nous l'apprendre. Mais il n'est pas très simple d'imaginer des dispositifs permettant de trancher la question avec certitude. L'un nous est fourni par la célèbre expérience de FIZEAU. Or, celle-ci donne une réponse nettement favorable à la cinématique de la relativité. Une autre confirmation expérimentale vint du domaine astronomique et, chose inattendue, c'est la grande énigme du mouvement du périhélie de Mercure qui reçut une solution satisfaisante.

Pour simplifier, supposons le Soleil et la planète \S seuls dans l'univers ou du moins, faisons abstraction des perturbations qui proviennent de la présence d'autres corps matériels. NEWTON enseignait que dans ce cas \S , gravitant autour du Soleil, décrira une ellipse dont le Soleil occupera l'un des foyers. La nouvelle mécanique céleste, moins simple que la classique, enseigne au contraire que, dans les conditions admises, la planète gravitera autour du Soleil en décrivant une courbe très compliquée dont je vais essayer de vous donner une idée.

Soit une ellipse $ABCDEGE'D'C'B'A$ (*fig. 4*) tournant autour de l'un de ses foyers, F , en restant toujours dans son plan. Imaginons qu'un point mobile M parcourt cette ellipse génératrice pendant qu'elle est animée du dit mouvement de rotation. Quelle sera la résultante de ces deux mouvements simultanés, la trajectoire du point M dans le plan de l'ellipse? Pour fixer les idées, nous supposerons :

1) que l'ellipse génératrice tourne autour du point F dans le sens des aiguilles d'une montre, avec une vitesse angulaire ω constante et telle qu'une révolution complète soit exécutée toutes les deux secondes ;

2) que le point M se meuve sur l'ellipse dans le sens des flèches et avec une vitesse v qui lui fasse parcourir 1 fois par

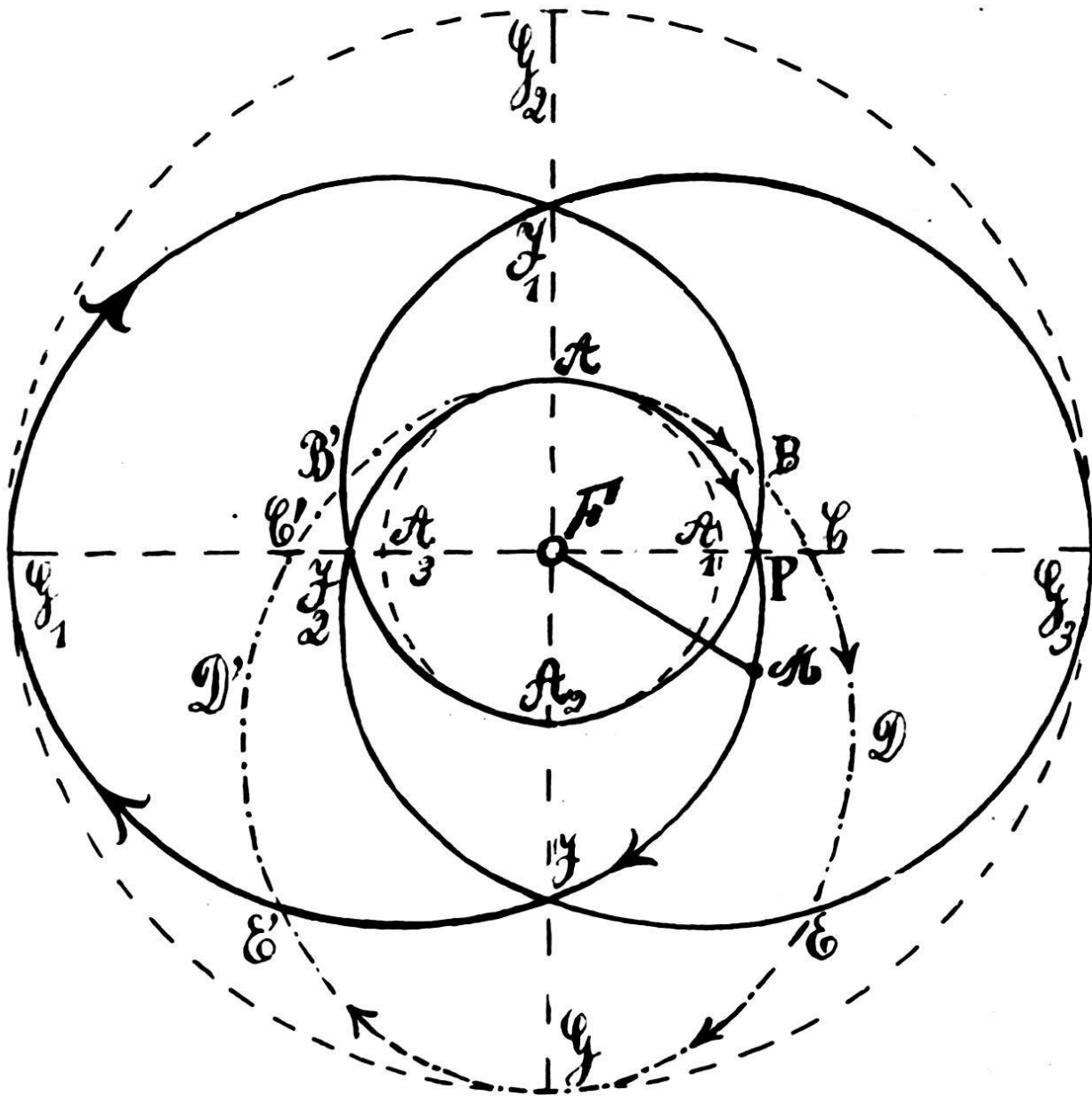


FIG. 4.

seconde exactement l'ellipse entière; que, de plus, les variations de cette vitesse v soient telles que la rotation du rayon vecteur $r = FM$ autour du foyer F s'effectue avec une vitesse angulaire ω' constante; on aura $\omega' = 2\omega$;

3) qu'à l'instant $t = 0$, le mobile M se trouve en A , sommet le plus rapproché de F , et l'ellipse dans la position qu'indique la fig. 4. Nous allons raisonner comme suit:

a) Sans le mouvement rotatoire de l'ellipse, (si $\omega = 0$), le point mobile M décrirait, pendant la première demi-seconde, la moitié de l'ellipse, soit l'arc $A B C D E G$; parti de A , il atteindrait en G l'autre extrémité du grand axe. Or, ω n'étant pas nul, l'ellipse, pendant cette première demi-seconde, exécute le quart d'une révolution complète, par hypothèse. Le grand

axe AFG vient en A_1FG_1 et le point mobile parti de A aboutira non en G , mais en G_1 , ayant ainsi décrit l'arc $APMJEG_1$.

β) Pendant la deuxième demi-seconde, le grand axe A_1FG_1 tourne de nouveau de 90° autour de F et vient en A_2FG_2 , entraînant l'ellipse avec lui. Le mobile M parti de G_1 , au lieu d'atteindre en A_1 l'autre extrémité du grand axe, l'atteindra en A_2 et décrira ainsi l'arc $G_1J_1BPA_2$, symétrique du précédent par rapport à la droite G_1FG_3 .

γ) Pendant la troisième demi-seconde, le grand axe, partant de la position A_2FG_2 , tourne de 90° autour de F et vient en A_3FG_3 , entraînant l'ellipse avec le point mobile M . Ce dernier, parti de A_2 , au lieu d'atteindre en G_2 l'autre extrémité du grand axe, l'atteindra en G_3 et décrira ainsi l'arc $A_2J_2B'J_1G_3$.

δ) Pendant la quatrième demi-seconde, le grand axe, partant de la position A_3FG_3 , tourne d'un angle droit autour de F et vient en AFG , entraînant dans son mouvement de rotation l'ellipse avec le point mobile M . Celui-ci, parti de G_3 , atteindra l'autre extrémité du grand axe non en A_3 , mais en A et décrira ainsi l'arc G_3EJJ_2A , symétrique du précédent par rapport à la droite G_1FG_3 .

ε) Au bout des deux premières secondes, l'ellipse aura de nouveau la position qu'indique la fig. 4 et le point mobile se retrouvera en A , comme à l'instant $t = 0$. Les mêmes mouvements se répèteront périodiquement de deux secondes en deux secondes. La trajectoire du mobile est donc, dans ces hypothèses, une courbe gp_2 fermée ayant quatre points doubles, deux axes de symétrie et un centre qui est le foyer F de l'ellipse génératrice. Son équation $r = f(\theta)$ en coordonnées polaires rapportées à F comme pôle et FA comme axe polaire

est $r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \frac{2\theta}{3}}$, où $p = b^2 : a$ représente le demi-paramètre

et $e = \frac{c}{a}$ l'excentricité numérique de l'ellipse, $0 < e < 1$.

Supposons maintenant $\omega' = 4\omega$, en paroles : dans les hypothèses sus-indiquées, faisons ce changement que l'ellipse met quatre secondes à exécuter une révolution complète autour du foyer F , tandis que le point mobile M parcourt une fois par seconde l'ellipse entière (fig. 5). En une demi-seconde, le grand axe AFG de l'ellipse tournera autour de F d'un angle de 45° et le point mobile décrira l'arc AJG_1 . En raisonnant comme précédemment, on verrait que la trajectoire se compose

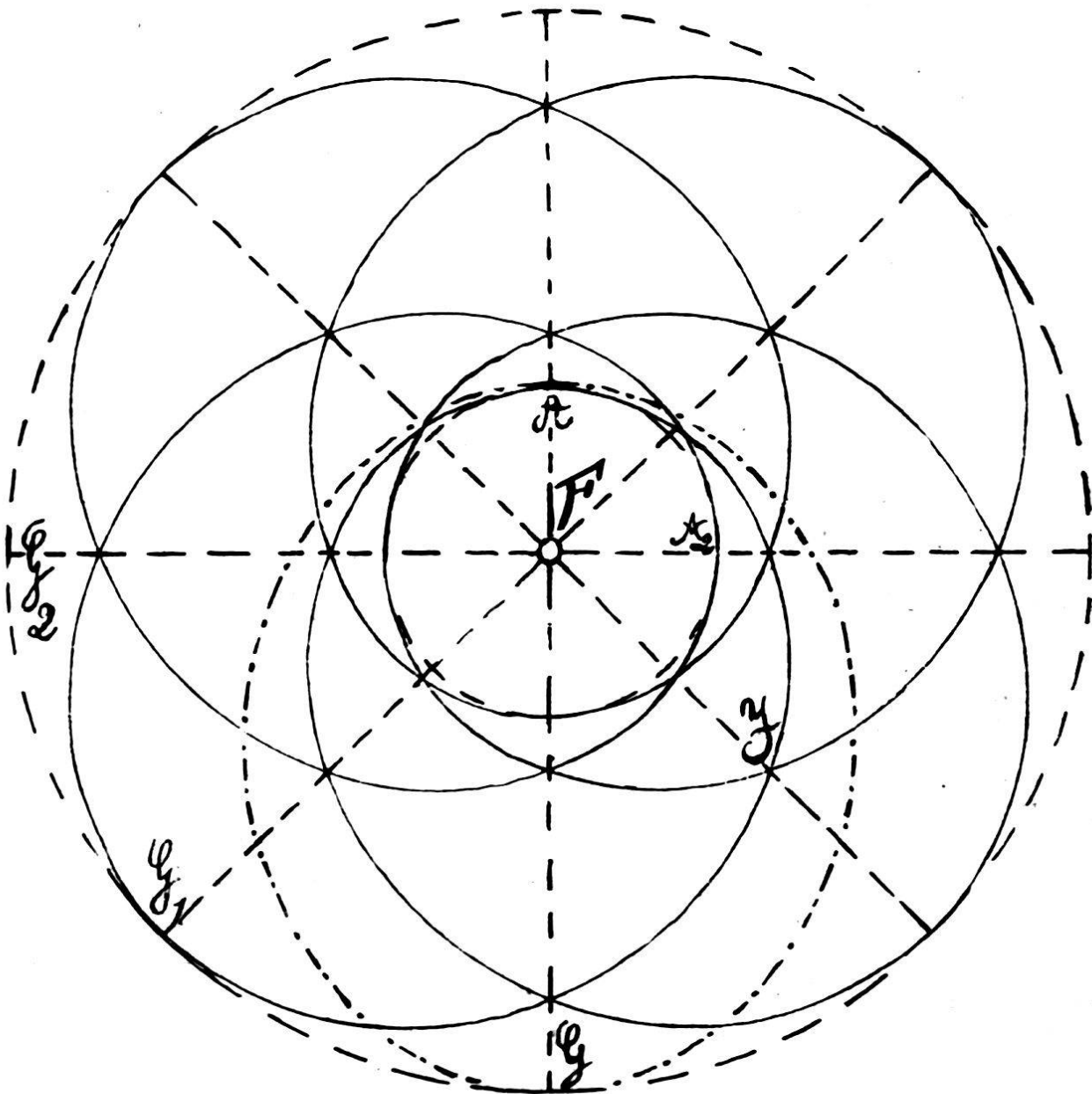


FIG. 5.

de huit arcs égaux à AJG_1 et symétriquement disposés, de manière à former une courbe gp_4 fermée, ayant seize points doubles, quatre axes de symétrie et comme *centre* le foyer F de l'ellipse génératrice. L'équation de cette courbe, en coordonnées polaires, est $r = p : \left(1 + e \cdot \cos \frac{4\theta}{5}\right)$

On voit que, *toutes choses égales d'ailleurs*, la forme de la trajectoire dépend du rapport des deux vitesses angulaires ω et ω' . La *fig. 6* montre la trajectoire du point mobile M dans l'hypothèse $\omega' = 8\omega$, quand on suppose que l'ellipse met huit secondes à exécuter une révolution complète autour du foyer F , alors que le point mobile parcourt l'ellipse entière une fois par seconde. En une demi-seconde, le grand axe AFG tourne

autour de F d'un angle de $22\frac{1}{2}^\circ$ et le point mobile, parti d'une extrémité de ce grand axe, décrit un arc égal à $AJKG_1$. La trajectoire entière gp_8 se compose de seize arcs égaux à celui-là et disposés symétriquement de manière à former une courbe fermée ayant 64 points doubles, huit axes de symétrie et *un centre* coïncidant avec F . Son équation en coordonnées polaires est $r = p : \left(1 + e \cdot \cos \frac{8\theta}{9}\right)$

Envisageons le cas général où $\omega' = n \cdot \omega$; le point mobile parcourt une fois par seconde l'ellipse entière et celle-ci met n secondes à faire une révolution complète. Nous supposons que n représente un nombre *entier* auquel nous attribuerons des valeurs de plus en plus grandes. A l'instant $t = 0$ (v. *fig. 6*), supposons le mobile à l'extrémité A du grand axe AFG et l'ellipse dans la position $ANGLA$. Pendant la première demi-seconde, le grand axe tourne autour de F d'un angle $GF G_1$ égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de deux angles droits et le point mobile, parcourant la première moitié de l'ellipse, décrit l'arc $AJKG_1$ qui est la $(2n)^{\text{ième}}$ partie de la trajectoire complète. Pendant la deuxième demi-seconde, le grand axe vient de la position A_1FG_1 en A_2FG_2 et le point mobile M , en parcourant l'autre moitié de l'ellipse, décrit l'arc $G_1J_1A_2$ symétrique du précédent par rapport à l'axe A_1FG_1 . — Ainsi, pendant la première seconde, le mobile décrit la boucle $AJKG_1J_1A_2$.

Une boucle égale sera décrite pendant la deuxième seconde, puis une troisième boucle égale pendant la troisième seconde, puis une quatrième pendant la quatrième seconde, etc.; enfin, encore une boucle égale pendant la $n^{\text{ième}}$ seconde. Au bout de n secondes, l'ellipse aura effectué une révolution complète, occupera donc de nouveau la position $ANGLA$ et le point mobile M se retrouvera en A , comme à l'instant $t = 0$.

On voit que la trajectoire complète gp_n est une courbe fermée ayant n^2 points doubles, n axes de symétrie et *un centre* qui coïncide toujours avec le foyer F de l'ellipse génératrice. On voit de plus que la courbe entière est située dans une couronne circulaire comprise entre deux cercles concentriques de centre F et dont les rayons sont \overline{AF} et \overline{GF} , c'est-à-dire $a - c$ et $a + c$, où a représente le demi grand axe de l'ellipse et c la distance de son centre à l'un de ses foyers. La forme de la trajectoire dépend donc encore de l'excentricité numérique $e \equiv \frac{c}{a}$, nombre positif plus petit que 1 : moins l'excentricité de l'ellipse mobile sera prononcée, plus la cou-

ronne circulaire en question sera étroite, puisque sa largeur est $(a + c) - (a - c) = 2c$, distance des deux foyers de l'ellipse.

J'ajoute en passant que si, l'hypothèse $\omega' = n \cdot \omega$ étant faite, n est un nombre rationnel fractionnaire, par exemple $n = p : m$, où p et m représentent des nombres entiers premiers entre eux, cela entraîne une complication de plus dans la forme de la trajectoire : la courbe ne se ferme qu'après m révolutions complètes de l'ellipse autour du foyer F . La trajectoire est encore une courbe gp_n fermée, composée d'un nombre fini de boucles superposables, courbe ayant un centre en F , comprise entièrement dans la couronne circulaire de largeur $2c$ et possédant un nombre fini de points doubles et d'axes de symétrie.

Enfin, si n n'était pas un nombre rationnel, il y aurait lieu de distinguer suivant que n est irrationnel algébrique ou irrationnel transcendant. Ces cas ont en commun que la trajectoire complète du mobile M est une courbe gp_n transcendante non fermée comprenant un nombre infini de boucles superposables et différemment placées, un nombre infini de points doubles et possédant un nombre infini d'axes de symétrie tous concourants au foyer F qui est en même temps centre de la courbe. Tous les points de cette courbe, remarquable à plusieurs égards, sont situés dans la couronne circulaire de largeur $2c$ déjà plusieurs fois mentionnée. Cette couronne circulaire est entièrement remplie par la trajectoire, c'est-à-dire que les points de la courbe en question y forment, comme on dit, une *pantachie*, un ensemble de points dense partout. L'équation de la courbe gp_n , en coordonnées polaires r, θ , rapportées à

F comme pôle, est $r = p : \left(1 + e \cdot \cos \frac{n \theta}{n + 1} \right)$

Reprenons l'hypothèse de tout à l'heure, $\omega' = n \cdot \omega$, et supposons n entier et très grand ; prenons en particulier $n = 12\,538\,800$. Cela revient à dire que le mouvement rotatoire de l'ellipse autour de son foyer F est très lent par rapport au mouvement de circulation du point mobile M sur l'ellipse, puisque ce mobile a le temps de parcourir l'ellipse entière 12 538 800 fois pendant qu'elle effectue une seule révolution autour de F . Si donc on suppose que M met une seconde pour parcourir l'ellipse, celle-ci mettra 145 jours 3 heures, soit près de cinq mois, pour exécuter une révolution complète autour de F . En une demi-seconde, le grand axe tourne d'un angle très petit $\angle F G_1 G_2$ égal à $180 \cdot 60 \cdot 60 : 12\,538\,800 = 0'',05167$. L'arc $A J K G_1$ décrit par le point mobile (v. *fig. 6*) ressemble

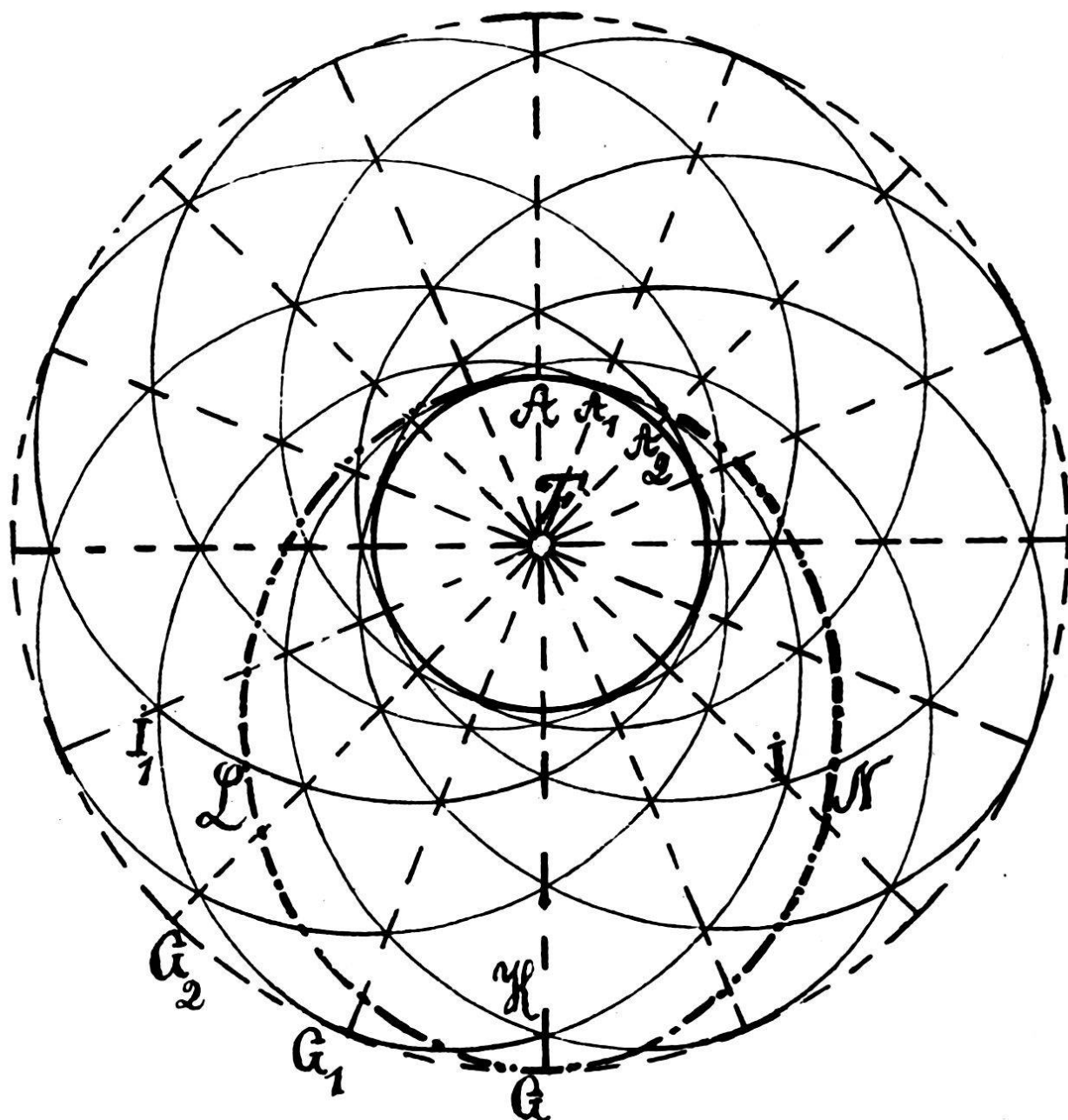


FIG. 6.

donc énormément à une demi-ellipse, et la boucle $AJKG_1J_1A_2$ ne se distingue presque pas d'une ellipse mathématique.

Quand le nombre n prend des valeurs de plus en plus grandes, le mouvement rotatoire de l'ellipse autour de son foyer devient de plus en plus lent en comparaison du mouvement circulatoire du mobile M ; l'angle GFG_1 devient de plus en plus petit, l'arc $AJKG_1$ de la trajectoire tend vers une demi-ellipse, et la forme de la première boucle $AJKG_1J_1A_2$, de même que celle de chacune des n boucles superposables, tend vers celle de l'ellipse génératrice. Un observateur dont les instruments de mesure ne seraient pas d'une précision très grande, ou qui n'aurait pas eu le temps d'étudier à fond ce mouvement, ne s'apercevrait peut-être pas du tout de la rota-

tion de l'ellipse et croirait décrire la trajectoire exacte du point M en disant qu'elle est elliptique, alors qu'en réalité, comme nous le savons maintenant, c'est la courbe fermée $gp_{12\ 538\ 800}$ très compliquée qui a $157 \cdot 221\ 505 \cdot 440\ 000$ points doubles et $12\ 538\ 800$ axes de symétrie tous concourants au centre F . Elle est du $25\ 077\ 602^{\text{ième}}$ degré.

Observez que si l'on dessinait, même avec le trait le plus mince possible, à côté de l'ellipse $ANGLA$ de la fig. 6, la première boucle $AJKG_1J_1A_2$ de cette courbe gp , l'angle $\alpha = GFG_2$ étant de $0'',10335$ seulement, la différence entre l'ellipse mathématique exacte et cette première boucle de $gp_{12\ 538\ 800}$ serait totalement imperceptible à l'œil nu, à moins de donner au dessin des dimensions extraordinairement grandes.

Ces résultats étant admis, nous allons reprendre l'hypothèse qui fut le point de départ de toutes ces déductions géométriques : le Soleil et la planète Mercure, supposés seuls dans l'univers et soumis à la loi de gravitation universelle. Le foyer F représente alors le centre du Soleil, le point mobile M le centre de ♁ , le grand axe AFG devient la ligne des apsides ; au lieu de 1 seconde, nous aurons 1 année de Mercure, savoir $87,97$ jours terrestres = $7\ 600\ 608$ secondes, disons, pour simplifier, 88 jours.

Je répète que la mécanique céleste, fondée par NEWTON, enseigne que dans ces conditions, étant donnée la masse du Soleil, celle de ♁ et la distance de leurs centres, ♁ gravitera autour du Soleil, que son centre décrira tous les 88 jours une ellipse mathématique dont le centre du Soleil occupera l'un des foyers, que cette orbite conservera indéfiniment sa forme, sa grandeur et sa position dans l'espace, du moins aux yeux d'un observateur supposé immobile par rapport au Soleil. Contrairement à cette doctrine, M. A. EINSTEIN trouva, en appliquant aux données astronomiques les formules de la mécanique de la relativité, que pendant une révolution de ♁ autour du Soleil, donc en 88 jours, la ligne des apsides tourne dans le sens du mouvement de la planète, d'un angle α égal à un dixième de seconde, plus exactement $\alpha = 0'',10335$.

Faisons maintenant le calcul : en 88 jours, un dixième ou $0'',1$; en un jour, 88 fois moins ; et en une année, 365 fois plus, soit $\frac{365 \cdot 0'',1}{88}$. Remarquant qu'une année terrestre

compte $365,25636$ jours et une année de Mercure $87,97$ jours, on trouve pour cent années, en prenant les chiffres exacts, $100 \cdot 0,10335 \cdot 365,25636 : 87,97 = 42,91$ secondes. Si l'on tient compte des inévitables erreurs d'observation, on peut dire que

cela fait, pour l'avance du périhélie de Mercure, juste le montant dont l'observation a prouvé l'existence et qui constituait la pierre d'achoppement de la mécanique céleste newtonienne. C'est une concordance frappante entre la théorie et l'observation. Si l'on admet la mécanique de la relativité, il n'est donc pas nécessaire d'avoir recours à des hypothèses supplémentaires. Le seul fait de la gravitation autour du soleil suffit déjà pour rendre compte, avec une exactitude merveilleuse, des mouvements des corps célestes réellement observés. On ne saurait exagérer l'importance de cette constatation qui vient militer de tout son poids en faveur du principe de relativité.

Si la mécanique de la relativité est exacte, *chaque planète*, pas seulement $\text{\textcircled{S}}$, doit présenter le même phénomène : une avance du périhélie dans le sens du mouvement de la planète. « Alors », objecterez-vous, « pourquoi n'a-t-on jamais constaté chez les autres planètes cette rotation lente et séculaire de toute l'orbite autour du Soleil ? » — « Pour deux bonnes raisons », sera la réponse. D'abord, *le mouvement rotatoire en question est d'autant plus lent que la planète est plus éloignée du Soleil*. Désignons par α l'angle $G F G_2$ dont tourne la ligne des apsides pendant que la planète exécute une révolution complète. M. EINSTEIN a déduit de sa théorie la formule

$$\alpha = \frac{24 \pi^3 \cdot a^2}{T^2 \cdot \sigma^2 \cdot (1 - e^2)} \quad (1)$$

formule dite « de GERBER », en l'honneur du savant qui la publia, en 1898, pour la première fois (v. *Zeitschrift f. Math. u. Phys.* 43 (1898), p. 93-104). Dans la formule de GERBER, $\pi = 3,1415926\dots$ est le rapport de la circonférence au diamètre; $\sigma = 300\,000 \text{ km/sec}$ est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide; a représente, évaluée en *km*, la distance moyenne de la planète au Soleil, distance égale à la longueur du demi grand axe de son orbite, et $e \equiv \frac{c}{a}$, l'excentricité numérique de l'ellipse; enfin, T représente, évaluée en *secondes*, la durée d'une révolution complète de la planète. Or, d'après la troisième loi de KÉPLER, T^2 est proportionnel à a^3 ; la formule de GERBER peut donc s'écrire

$$\alpha = \frac{\text{constante}}{a \cdot \sigma^2 \cdot (1 - e^2)} \quad (2)$$

ce qui montre bien que α diminue quand a augmente.

Comme $\sigma = 3 \cdot 10^5$ et $e < 1$, le facteur $\sigma^2(1 - e^2)$ est de l'ordre de grandeur de cent milliard, et ce nombre déjà grand doit encore être multiplié par a qui est pour Vénus de 108 000 000 *km*; pour la Terre, de 149,5 millions; pour Mars, de 228 millions de kilomètres, etc. La formule (2) a donc, pour les trois planètes énumérées (et à fortiori pour les suivantes), un dénominateur de l'ordre de grandeur de $10^{11} \cdot 10^8 = 10^{19}$, soit de dix trillions, d'où l'on conclut aisément à l'excessive petitesse de α . C'est la première raison pourquoi l'on ne s'aperçoit pas si facilement de cette rotation séculaire des orbites planétaires autour du Soleil: son excessive lenteur jointe aux inévitables erreurs d'observation.

En prenant pour Mercure les données astronomiques: $a = 57\,900\,000$ *km*, $T = 7\,600\,600$ *secondes*, $e = 0,206$ d'où $1 - e^2 = 0,957564$, on trouve

$$\alpha = \frac{24 \pi^3 \cdot 57\,900\,000^2}{7\,600\,600^2 \cdot 9 \cdot 10^{10} \cdot 0,957564} = \frac{8 \pi^3 \cdot 57,9^2}{76\,006^2 \cdot 3 \cdot 95,7564}$$

Ce nombre donne l'angle α en radiants; pour l'exprimer en degrés, minutes et secondes, il faut se rappeler que π radiants correspondent à 180° , donc un radiant à $\frac{180^\circ}{\pi}$ et α , à $\frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} =$

$\frac{\alpha \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$ *secondes*. Remplaçant α par la valeur ci-dessus,

on trouve après réduction $\alpha = \frac{\pi^2 \cdot 579^2 \cdot 432}{38\,003^2 \cdot 9,57564} = 0'',10335\dots$

C'est bien le montant annoncé par M. EINSTEIN.

La formule de GERBER, appliquée à la planète Vénus qui parcourt son orbite en 225 jours environ, donne $\alpha = 0'',047$, soit à peu près $7'',8$ par siècle. Pour la Terre, on trouve environ $3''$ par siècle, pour Mars un peu plus d'une seconde par siècle. Soit v la vitesse de la planète gravitant autour du Soleil; le montant que donne la formule de GERBER est pratiquement égal à $6 \pi v^2 : \sigma^2$ radiants par révolution.

Cette lenteur excessive du mouvement du périhélie n'est qu'une première cause de ce qu'il a passé inaperçu pour les planètes autres que \S . Une deuxième cause réside dans la forme de l'orbite. A part précisément \S , l'excentricité de l'ellipse planétaire est très petite. On le voit par le tableau suivant qui contient, pour les huit grandes planètes et pour la petite planète Eva n° 164, les éléments nécessaires au calcul de l'angle α par la formule (1):

Noms des planètes	Durées des révolutions sidérales		Distances moyennes au soleil		Excentricités numériques des ellipses
	en années sidérales	en années juliennes et en jours moyens	la distance moyenne de la Terre au soleil étant prise comme unité	en millions de kilomètres	
Mercure ♀	0 an 240 843	87,9693 jours	0,3870987	58	0,2056048
Venus ♀	0 » 615 186	224,7008 »	0,7233322	108	0,0068433
La Terre ☉	1 »	1 an 0,006374 »	1	149,5	0,0167701
Mars ♂	1 » 880 832	1 » 321,72965 »	1,5236913	227,8	0,0932611
Jupiter ♃	11 ans 861 965	11 ans 314,8382 »	5,202800	778	0,0482519
Saturne ♄	29 » 457 176	29 » 166,9864 »	9,538861	1426	0,0560713
Uranus ♅	84 » 020 233	84 » 7,3904 »	19,18329	2869	0,0463402
Neptune ♆	164 » 766 895	164 » 280,1132 »	30,05508	4500	0,0089646
Eva 164		4 » 98,123 »	2,631434	393,3	0,3471007

L'excentricité numérique de l'orbite de la planète Vénus étant 0,0068, il s'en suit que si l'on construit une ellipse semblable à cette orbite et dont le grand axe ait une longueur de un mètre, la distance des deux foyers ne sera que de 6,8 millimètres. Telle sera donc aussi la largeur de la couronne circulaire mentionnée à plusieurs reprises, à l'intérieur de laquelle se trouve la courbe *gp*. Si donc je traçais devant vos yeux, sur le tableau noir, à la craie, l'ellipse en question, puis, concentrique à elle, le cercle ayant un diamètre de un mètre, l'épaisseur du trait vous empêcherait de distinguer l'une de l'autre ces deux courbes. Cette image vous fera mieux comprendre l'erreur de COPERNIC qui disait que Vénus, en gravitant autour du Soleil, décrit une circonférence de cercle. — Or, quand l'excentricité est si petite, *il est difficile d'indiquer avec précision où se trouve le périhélie*. Cette incertitude dans la position exacte du périhélie augmente en valeur absolue avec les dimensions de l'ellipse. Comme ces dimensions atteignent des centaines de millions de *km*, il s'en suit qu'actuellement encore, malgré tout le perfectionnement des instruments astronomiques et des méthodes de calcul, la position du périhélie de Vénus est assez mal connue. Or, quand on connaît la position d'un point à quelques centimètres près seulement, il est impossible de dire si elle a varié, oui ou non, de quelques millimètres.

La même chose pourrait se dire des autres planètes, sauf peut-être de Mars dont l'orbite présente une excentricité qui est presque quatorze fois plus grande que celle de l'orbite de

Vénus. Après ♃, c'est Mars qui a, de toutes les grandes planètes, l'orbite la plus excentrique ; c'est donc, après ♃, de Mars que l'on connaît le plus exactement le périhélie, que l'on pourrait par conséquent avec le moins d'incertitude dire si le périhélie est en mouvement ou non. Les astronomes indiquent pour le périhélie de Mars une avance d'environ 9" par siècle ; d'après la théorie de M. EINSTEIN, ce périhélie ne doit avancer que de 1" à 2" par siècle ; comme les observations astronomiques avant TYCHO BRAHÉ et GALILÉE (XVII^{me} siècle) n'atteignent pas la précision voulue, la question n'a pas encore pu être tranchée.

On voit que la probabilité de l'exactitude de ce genre d'observations dépend de deux facteurs essentiels qui sont : 1) l'excentricité numérique de l'ellipse, soit e ; 2) la vitesse du mouvement du périhélie, soit $\frac{d\pi}{dt}$. Pour juger du degré de confiance à accorder aux résultats de ces observations, il faut, d'après NEWCOMB, faire le produit de ces deux facteurs et le comparer à son erreur probable. Pour les quatre premières planètes, ces indications se trouvent résumées dans le tableau que voici :

PLANÈTES	$e \cdot \frac{d\pi}{dt}$
Mercure ♃	8,48 ± 0,43
Vénus ♀	— 0,05 ± 0,25
Terre ♂	0,10 ± 0,13
Mars ♂	0,75 ± 0,35

On constate que, abstraction faite de Mercure, l'erreur probable est du même ordre de grandeur que le produit de NEWCOMB (pour Vénus, l'erreur probable est même supérieure à la grandeur envisagée). Conclusion : un mouvement du périhélie n'est irréfutablement démontré jusqu'ici que pour Mercure (pour Mercure, le produit de NEWCOMB est vingt fois plus grand que son erreur probable). Ainsi, dans la question du mouvement du périhélie, pour Mercure, c'est l'observation qui a devancé la théorie ; pour les autres planètes et pour les comètes, ce sera la théorie qui aura devancé l'observation.

Encore quelques remarques sur les orbites planétaires. Il résulte des considérations précédentes que si le Soleil et ♃

étaient seuls dans l'univers : 1) le centre de ξ décrirait une courbe ressemblant fort à la courbe $gp_{12\ 538\ 800}$ aux 12 538 800 axes de symétrie, toujours sous-entendu : aux yeux d'un observateur supposé immobile par rapport au Soleil ; 2) que pour parcourir cette orbite une fois, la planète mettrait plus de 30 000 siècles, savoir 3 019 877 années terrestres correspondant aux 12 538 800 années de ξ . En effet, la ligne des apsides de ξ tourne en une année mercurienne de $\alpha = 0'', 10335\dots$ et c'est précisément la grandeur que j'ai prise pour l'angle GFG_2 en définissant la courbe gp .

Pour plusieurs raisons, l'orbite réelle de ξ n'est pas géométriquement semblable à la courbe $gp_{12\ 538\ 800}$. D'abord, à cause des *perturbations* provenant de la présence des autres corps célestes. Ensuite, parce que le mouvement de ξ sur une boucle quasi-elliptique de son orbite ne s'effectue pas, comme je l'ai supposé, avec une vitesse *angulaire* ω constante, mais avec une vitesse *aréolaire* constante (deuxième loi de KÉPLER), c'est-à-dire que la vitesse angulaire ω est variable de telle façon que les aires balayées par le rayon vecteur de la planète en des temps égaux sont égales. Cependant, l'influence de cette cause n'est guère plus sensible que celle des perturbations, vu l'excessive lenteur du mouvement rotatoire de l'orbite et enfin, elle est peut-être contre-balancée par les variations encore inconnues de ce mouvement rotatoire lui-même que j'ai supposé uniforme.

En troisième lieu, et c'est la raison principale, l'hypothèse faite en posant $\omega' = n \cdot \omega$ et prenant $n = 12\ 538\ 800$ n'est sans doute réalisée qu'approximativement. J'ai pris pour n ce nombre de 12 538 800 parce que, l'avance du périhélie de ξ étant de $\alpha = 0'', 10\ 335\dots$ par année mercurienne, une circonférence entière comprend 12 538 800 angles de cette grandeur α . Or, observateurs et théoriciens s'accordent à dire que $\alpha = 0'', 10335$ est très approché, mais pas rigoureusement exact. Si l'on admet, d'après les connaissances actuelles, que la valeur de α est comprise entre $0'', 10\ 335$ et $0'', 10\ 336$, le nombre n , d'après la théorie, doit être compris entre 12 538 699 et 12 539 912. En tenant compte des perturbations dues à la présence des autres corps célestes, on peut dire que si la courbe gp aux 12 538 800 axes de symétrie n'est pas semblable à l'orbite réelle, elle en est du moins une représentation beaucoup plus approchée que l'ellipse képlérienne.

La forme de l'orbite dépend du nombre n qui lui-même dépend de α , et cet angle, comme le montre la formule de GERBER, est fonction de plusieurs grandeurs dont l'état actuel

de la science ne permet que des évaluations plus ou moins approximatives. Si l'on prend $\alpha = 0''{,}10\ 336$ exactement, on

$$\text{trouve } n = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{0,10\ 336} = \frac{81 \cdot 5 \cdot 10^7}{323} = 12\ 538\ 699 \frac{223}{323}. \quad \text{Cela}$$

donne comme trajectoire encore une courbe *gp* à centre, composée d'un nombre fini très grand de boucles superposables, mais qui se ferme seulement après 323 révolutions de l'ellipse génératrice. Comme chacune de ces révolutions dure plus de 30 000 siècles, \wp emploierait plus de 97 551 490 000 années (terrestres) à parcourir une fois son orbite. — Si α , et par suite

$$n = \frac{1\ 296\ 000}{\alpha},$$

est un nombre rationnel, la courbe *gp* corres-

pondante, donc aussi l'orbite de \wp , est fermée. Mais il est possible, voire même probable, que α soit irrationnel. Dans ce cas, la courbe *gp*, donc aussi l'orbite de \wp , serait une courbe à centre, non fermée. — Des déductions analogues peuvent se faire à propos des autres planètes.

En admettant le principe de relativité, on arrive donc, en mécanique céleste, aux conclusions suivantes : 1) l'orbite d'une planète, abstraction faite des perturbations, est une courbe *gp* à centre, en général très compliquée, composée de boucles égales et symétriquement disposées, boucles dont *l'ellipse képlérienne* est une représentation très approchée ; 2) l'orbite planétaire est située entièrement à l'intérieur d'une couronne circulaire dont la largeur est égale à l'excentricité linéaire de l'ellipse képlérienne et qui est comprise entre deux cercles concentriques au Soleil ; 3) si l'orbite est une courbe fermée, il faut à la planète un temps excessivement long, des milliers de siècles, pour la parcourir une fois entièrement ; 4) il est probable que l'orbite réelle est une courbe non fermée qui remplit entièrement la couronne circulaire susmentionnée et dont le Soleil occupe le centre.

De ces conclusions, je retiens un point : *l'orbite planétaire possède toujours un centre et c'est le Soleil qui l'occupe*. N'avez-vous jamais réfléchi sur ce qu'il y a de curieux dans l'une des conclusions de la mécanique classique ? Le Soleil, dont la puissance d'attraction dirige planètes, comètes et météores, le Soleil, qui est le centre physique et mécanique de notre univers planétaire, n'en est pas le centre géométrique ! Le besoin de symétrie inné à l'esprit humain ferait décrire aux astres des cercles autour du Soleil comme centre, ainsi que le faisaient déjà les Anciens, et s'il doit absolument y avoir des ellipses, que le Soleil en occupe au moins le centre et non l'un

des foyers. Personnellement, j'ai toujours trouvé très curieux ce phénomène d'asymétrie qu'implique la mécanique newtonienne et si les déductions mathématiques n'étaient irréfutables, j'aurais eu quelque peine à croire à cette position excentrique. La mécanique de la relativité vient satisfaire ce besoin de symétrie d'une manière inattendue : elle enseigne que les orbites des planètes ont un centre et qu'il coïncide toujours avec le centre du Soleil ! D'après la nouvelle théorie, le centre physique et mécanique de notre monde planétaire en devient aussi le centre géométrique.

