Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles

Band: 45 (1919-1920)

Artikel: Quelques remarques à propos des équations différentielles linéaires et des équations intégrales

Autor: Juvet, Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88619

Quelques remarques à propos des équations différentielles linéaires et des équations intégrales

PAR

GUSTAVE JUVET, chargé de cours à l'Université

Nous nous proposons dans cette note, d'étudier quelques propriétés des équations différentielles linéaires, relatives au problème bilocal, c'est-à-dire aux solutions définies par des conditions en deux points, et non pas en un seul comme dans le problème de Cauchy. Nous modifierons quelque peu la définition de la fonction de Green, telle que Bôcher l'a donnée pour une équation d'ordre quelconque [1].

Nous en donnerons quelques propriétés que nous rattacherons à la théorie des équations intégrales, et nous retrouverons l'équation fonctionnelle de la résolvante de Fredholm [2].

Dans un deuxième paragraphe, nous verrons les tranformations que nos définitions subissent quand on change de variable indépendante.

§ 1. M. Hilbert, dans ses « Grundzüge » [3] étudie les équations linéaires du second ordre et leurs solutions, déterminées par des conditions en deux points a et b. Etant donnée une équation linéaire identique à son adjointe [4]:

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)\,y = o$$

on se propose de trouver une solution qui prenne en a et b des valeurs données, ou dont la dérivée prenne en a et b des valeurs assignées, ou encore qui satisfasse à telles conditions linéaires en y et y', en ces deux points a et b.

[1] En vérité, nous prendrons celle que M. Hilbert a donnée pour $n = 2$. (Vide infra.)

[2] V. *Acta Mathematica,* t. 27.

[3] « Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen ». Teubner 1912.

[4] Sturm, Liouville et M. Picard avaient déjà obtenu d'importants résultats sur cette question.

M. Hilbert forme une fonction G de deux variables x et s, telle que $G(x, s)$ considérée comme fonction de x, satisfasse à l'équation différentielle, qu'elle soit continue en x et en s, et que sa dérivée par rapport à x présente au point s une discontinuité définie par la relation :

$$\lim_{\varepsilon = o}\left[\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\right]_{x=s+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon = o}\left[\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\right]_{x=s-\varepsilon} = -\frac{1}{p(s)}$$

De plus $G(x, s)$ satisfait aux conditions aux limites indiquées. Cela étant, M. Hilbert a déduit une série de conséquences relatives aux solutions des équations :

$$\Lambda(y) \equiv L(y) + \lambda y = o$$
$$L(y) = r(x)$$

définies par des conditions en a et en b. Le savant géomètre de Gœttingue démontre l'équivalence des problèmes proposés à la résolution de l'équation intégrale :

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, s)\, y(s)\, ds$$

et à la formule :

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x, s)\, r(s)\, ds$$

Si, de plus, on considère le noyau $G(x, s)$ symétrique[1] et que l'on forme sa *résolvante* pour l'intervalle (a, b), soit $\Gamma(x, s; \lambda)$, on démontre que cette résolvante s'obtient à partir de $\Lambda(y)$, comme $G(x, s)$ à partir de $L(y)$. On sait que cette résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(x, s; \lambda) - G(x, s) = \lambda \int_a^b G(x, t)\, \Gamma(t, s; \lambda)\, dt \tag{A}$$

C'est cette propriété que nous allons généraliser pour une équation différentielle linéaire d'ordre n.

Bôcher, dans un cours fait en Sorbonne en 1913-1914[2], avait déjà étendu quelques-unes des propriétés trouvées par M. Hilbert pour $n = 2$, nous allons les reprendre pour les étendre à la généralisation de (A). Il nous sera nécessaire de modifier quelque peu la définition que Bôcher donne pour la fonction de Green.

[1] *Loc. cit.*, p. 45.

[2] Leçons sur les Méthodes de Sturm. Collection Borel. Gauthier-Villars, 1917.

Soit :

$$L(u) \equiv l_n \frac{d^n u}{dx^n} + l_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + l_o u = o$$

où les l_i sont des fonctions de x, continues sur (a, b), extrémités comprises, une équation linéaire d'ordre n, son adjointe est :

$$M(v) \equiv (-1)^n \frac{d^n (l_n v)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} (l_{n-1} v)}{dx^{n-1}} + \dots + l_o u = o$$

Lagrange a démontré l'identité :

$$v\, L(u) - u\, M(v) = \frac{d}{dx} P(u, v)$$

où $P(u, v)$ est l'expression suivante bilinéaire en $u, u', \dots\dots u^{(n-1)}$; $v, v' \dots\dots\dots v^{(n-1)}$:

$$P(u, v) = u \left[l_1 v - \frac{d(l_2 v)}{dn} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(l_n v)}{dx^{n-1}} \right]$$

$$+ u' \left[l_2 v - \frac{d(l_3 v)}{dx} + \dots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}(l_n v)}{dx^{n-2}} \right] + \dots + u^{(n-1)} l_n v$$

on en déduit la formule :

$$\int_a^b \Big[v\, L(u) - u\, M(v) \Big] dx = \Big[P(u, v) \Big]_a^b$$

que l'on appelle *formule de Green*, bien qu'elle ait été déjà donnée par Lagrange ; mais elle est l'analogue et, en quelque manière, l'extension d'une des célèbres formules qui interviennent dans la théorie des équations aux dérivées partielles et qui portent le nom du géomètre anglais.

Si l'on s'arrange pour que

$$P(u, v)_{x=b} - P(u, v)_{x=a} = o$$

l'expression $\Big[P(u, v) \Big]_a^b$ représente la somme des sauts, changée de signe, de la fonction $P(u, v)$ de x dans l'intervalle (a, b). Or, remarquons que l'on peut, d'une infinité de manières, écrire

$$P(u, v)_{x=b} - P(u, v)_{x=a} = U_1 V_1 + U_2 V_2 + \dots + U_{2n} V_{2n}$$

où les $U_1, \dots U_{2n}$ d'une part, les $V_1, \dots V_{2n}$ d'autre part, sont respectivement des fonctions linéaires, indépendantes entre elles, des quantités : $u(a)$, $u(b)$, $u'(a)$, $u'(b)$, ... $u^{(n-1)}(a)$, $u^{(n-1)}(b)$; et $v(a)$, $v(b)$, $v'(a)$, $v'(b)$, ... $v^{(n-1)}(a)$, $v^{(n-1)}(b)$.

Lorsque nous nous proposerons la résolution d'un problème bilocal, nous nous arrangerons toujours pour que la donnée soit telle, que les conditions aux limites s'expriment pour $L(u)=o$, par les relations :

$$U_i = o \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ 2n)$$

et pour $M(v)=o$, par les conditions :

$$V_i = o \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ 2n)$$

Nous dirons que celles-ci sont les *adjointes* de celles-là.

Définissons une fonction $G(x,y)$ satisfaisant en x à l'équation $L(u)=o$, continue ainsi que ses dérivées jusqu'à la $(n-1)^{ième}$ non comprise, celle-ci ayant un saut défini par[1] :

$$\lim_{\varepsilon=o}\left[\frac{\partial^{n-1} G(x,y)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=y+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=o}\left[\frac{\partial^{n-1} G(x,y)}{\partial x^{n-1}}\right]_{n=y-\varepsilon} = -\frac{1}{l_n(y)}$$

de plus $G(x,y)$ satisfera à des conditions pour $x=a$ et $x=b$, qui soient telles que :

$$P(G,v)_{x=b} - P(G,v)_{x=a} = o$$

quelle que soit la fonction bornée $v(x)$ [2].

Nous définirons de même une fonction $H(x,z)$, solution de $M(v)=o$ continue ainsi que ses dérivées jusqu'à la $(n-1)^{ième}$ non comprise, celle-ci présentant le saut :

$$\lim_{\varepsilon=o}\left[\frac{\partial^{n-1} H(x,z)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=z+\varepsilon} - \lim_{\varepsilon=o}\left[\frac{\partial^{n-1} H(x,z)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=z-\varepsilon} = -\frac{(-1)^n}{l_n(z)}$$

Appliquons la formule de Green, en y faisant :

$$u = G(x,y); \qquad v = H(x,z)$$

le premier membre est identiquement nul, le second est égal à la somme, changée de signe, des sauts de $P(u,v)$. Si l'on se reporte à la forme de $P(u,v)$, on voit que les seuls termes qui présentent des discontinuités sont :

[1] Comparer avec Bôcher (*loc. cit.*) et avec la définition rappelée plus haut.
[2] Ces conditions sont compatibles ; voir Bôcher (*loc. cit.*), p. 101 et suiv.

$$\left[G(x,y)\,(-1)^{n-1}\,l_n(x)\,H^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,z)\right]_{x=z}$$

et

$$\left[G^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,y)\,l_n(x)\;H(x,z)\right]_{x=y}$$

on obtient ainsi l'égalité

$$o=-\left[(-1)^{n-1}\,l_n(z)\,G(z,y)\frac{(-1)^{n+1}}{l_n(z)}+l_n(y)H(y,z)\,.\,\frac{-1}{l_n(y)}\right]$$

d'où:

$$G(z,y)=H(y,z)$$

Cela veut dire que:

Etant donnée une équation différentielle linéaire L(u) = o *et certaines conditions aux limites pour l'intervalle* (a, b), *il y correspond une fonction de Green* G(x, y), *qui, considérée comme fonction de* y *satisfait à l'équation adjointe* M(y) = o *et aux conditions aux limites adjointes pour* (a, b).

Si l'équation $L=o$ est identique à son adjointe, $G(x,y)$ est symétrique.

Appliquons ensuite la formule de Green, comme M. Hilbert l'a fait pour $n=2$, aux fonctions suivantes:

$$u=\Gamma(x,y\,;\,\lambda)\qquad v=H(x,z)$$

Γ satisfait, *par définition*, à l'équation $L(u)+\lambda y=o$ et aux mêmes conditions aux limites de l'intervalle (a,b), que $G(x,y)$.

On a alors:

$$-\lambda\int_a^b H(x,z)\,\Gamma(x,y;\lambda)\,dx=-\left[(-1)^{n-1}\,l_n(z)\,\Gamma(z,y;\lambda)\frac{(-1)^{n+1}}{l_n(z)}\right.$$
$$\left.+\,l_n(y)\,H(y,z)\,.\,\frac{-1}{l_n(y)}\right]$$

soit, puisque $H(y,z)=G(z,y)$:

$$\Gamma(z,y\,;\,\lambda)-G(z,y)=\lambda\int_a^b G(z,x)\,\Gamma(x,y\,;\,\lambda)\,dx \tag{A}$$

Remarques: 1. J'ai modifié la définition de Bôcher, en changeant le signe du saut. En la conservant je serais arrivé à la formule:

$$\Gamma(z,y\,;\,\lambda)-G(z,y)=-\lambda\int_a^b G(z,x)\,\Gamma(x,y\,;\,\lambda)\,dx$$

M. Hilbert obtient (A) malgré qu'il fît

$$v = \Gamma \qquad \text{et} \qquad u = G$$

parce qu'il considère des équations identiques à leur adjointe.

$$L(u) \equiv M(u)$$

Les définitions données semblent donc être celles qui établissent exactement la généralisation de la théorie de M. Hilbert. Les définitions que Bôcher a données, correspondent au changement de λ en $-\lambda$ dans l'équation de Fredholm[1].

On voit encore aisément que la fonction y qui satisfait à l'équation

$$L(y) + \lambda y = o$$

et aux conditions aux limites qui ont défini $G(x, s)$, est donnée par la résolution de l'équation intégrale homogène[2]:

$$y(s) - \lambda \int_a^b G(s, x) y(x) dx = o$$

De même la solution du problème bilocal pour l'équation

$$L(y) = -r(x)$$

est donnée par la relation

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) r(s) ds$$

C'est cette relation qui justifie le nom de fonction de Green donnée à $G(x, s)$, nom qui primitivement était réservé à certaines solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre.

En prenant les définitions de Bôcher, on serait arrivé aux résultats suivants:

pour la solution de $L(y) + \lambda y = o$:

$$y(s) + \lambda \int_a^b G(s, x) y(x) dx = o$$

pour la solution de $L(y) = -r(x)$:

$$y(x) = -\int_a^b G(x, s) r(s) ds$$

[1] Cela est général. Comparez avec *Lalesco : Introduction à la théorie des équations intégrales*.

[2] On fait dans la formule de Green, $u = y(x)$, solution continue de $L(y) + \lambda y = o$, $v = H(x, s)$.

§ 2. On peut se demander quel sera l'effet d'un changement de variable indépendante sur la relation fondamentale (A). On sait par exemple que l'équation d'Euler :

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = o$$

où les A_i, sont des constantes, se ramène à une équation à coefficients constants, en posant $x = e^t$, t étant la nouvelle variable indépendante. Si l'on sait comment se transforme l'équation (A) relative à l'une de ces deux équations, quand on passe à l'autre, on aura ainsi la possibilité de trouver les fonctions de Green et leur résolvante pour toute une famille d'équations, sans qu'il soit nécessaire de faire des calculs — longs et fastidieux souvent — pour chacune d'elles.

Soit donc :

$$L(u) \equiv l_n \frac{d^n u}{dx^n} + l_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + l_o u = o$$

une équation différentielle linéaire, et soient $G(x, y)$ la fonction de Green relative à un problème bilocal pour l'intervalle (a, b), $\Gamma(x, y; \lambda)$ sa résolvante.

Faisons le changement de variable $x = f(s)$; $L(u)$ se transforme en une expression $L'(u)$ linéaire encore en u et ses dérivées dont je n'écrirai que le terme en $\dfrac{d^n u}{dx^n}$

$$L'(u) \equiv \frac{l_n[f(s)]}{[f'(s)]^n} \cdot \frac{d^n u}{dx^n} + \ldots$$

Faisons dans $G(x, y)$ et dans $\Gamma(x, y; \lambda)$ le changement de variables

$$x = f(s); \quad y = f(t)$$

et posons :

$$G[f(s), f(t)] = G_1(s, t)$$
$$\Gamma[f(s), f(t); \lambda] = \Gamma_1(s, t; \lambda)$$

Si l'on fait ces changements dans l'équation de la résolvante (A), elle devient :

$$\Gamma_1(s, t; \lambda) - G_1(s, t) = \lambda \int_c^d G_1(s, u) \Gamma_1(u, t; \lambda) f'(u) du \qquad \text{(B)}$$

où : $a = f(c)$ $b = f(d)$; on voit bien que Γ_1 et G_1 ne sont pas les fonctions de Green de $L'(u) + \lambda u$ et de $L'(u)$; cela tient, comme on va le voir à ce que l'on n'a pas pour les $(n-1)^{\text{ièmes}}$ dérivées de ces fonctions les sauts convenables. En effet :

$$\frac{\partial^{n-1} G_1}{\partial s^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}} \left(\frac{dx}{ds}\right)^{n-1} + \textit{fonction continue}$$

ce qui montre que le saut pour $s=t$ du premier membre est égal au saut du deuxième membre, en l'espèce au saut du premier terme, soit :

$$S_1 = \frac{-1}{l_n[f(t)]} \cdot [f'(t)]^{n-1}$$

Or, d'après l'expression de $L'(u)$, le saut pour la fonction de Green correspondante G' doit être :

$$S' = -\frac{1}{l_n[f(t)]} \cdot [f'(t)]^n$$

c'est-à-dire :

$$S' = S_1 f'(t)$$

Multiplions les deux membres de (B) par $f'(t)$, on trouve :

$$f'(t)\Gamma_1(s,t;\lambda) - f'(t)G_1(s,t) = \lambda \int_c^d G_1(s,u) f'(u) \Gamma_1(u,t;\lambda) f'(t)\, du$$

et si l'on pose :

$$f'(t)\Gamma_1(s,t;\lambda) = \Gamma_2(s,t;\lambda)$$
$$f'(t)G_1(s,t) = G_2(s,t)$$

on voit que :

$$\Gamma_2(s,t;\lambda) - G_2(s,t) = \lambda \int_c^d G_2(s,u)\Gamma_2(u,t;\lambda)\, du$$

c'est-à-dire que Γ_2 est bien la résolvante de G_2 pour l'intervalle (c,d) ; mais le saut de $\Gamma_2^{(n-1)}$ et de $G_2^{(n-1)}$ est égal à S' ; de plus Γ_2 et G_2 considérées comme fonctions de s, satisfont respectivement à $L'(u) + \lambda u = o$ et $L'(u) = o$, et aux conditions aux limites transformées par le changement de variables ; donc :

$$G_2 \equiv G'$$
$$\Gamma_2 \equiv \Gamma'$$

On peut donc conclure ce paragraphe par le :

Théorème : Si l'on effectue un changement de variable indépendante sur une équation différentielle linéaire $\mathrm{L(u)=o}$

par la relation x = f(s), *on obtiendra la fonction de Green relative à l'équation transformée et à l'intervalle correspondant, en effectuant sur les deux variables* x *et* y, *de la fonction de Green de* L(u), *les substitutions*

$$x = f(s) \qquad y = f(t)$$

et en multipliant le résultat obtenu par f'(t).

Remarque : On se rend compte facilement que $G'(t, s)$ considérée comme fonction de s est la fonction de Green de l'adjointe $M'(v)$ de $L'(u)$; mais nos calculs et une brève réflexion montrent que $M'(v)$ n'est pas la transformée de $M(v)$ par $x = f(t)$. On peut dire que, en général, la transformée de l'adjointe n'est pas identique à l'adjointe de la transformée.

Nous nous proposons de revenir ultérieurement sur ces questions en les généralisant, pour les appliquer à certaines équations intégrales singulières.