Les formules de Frenet dans un espace généralisé de Weyl

Autor(en): **Juvet, Gustave**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **46 (1921)**

PDF erstellt am: **17.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-88624

Les formules de Frenet dans un espace généralisé de Weyl

PAR

GUSTAVE JUVET, professeur à l'Université

On sait l'importance des formules de Frenet pour l'analyse infinitésimale des courbes. Tous les traités de géométrie différentielle les établissent pour une courbe gauche dans l'espace euclidien à 3 dimensions (E_3) dont le ds^2 est de la forme :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

M. C. Guichard les a établies[1] pour une courbe gauche générale décrite dans un espace euclidien à n dimensions (E_n), dont le ds^2 a la forme :

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2$$

Cette question est d'ailleurs classique.

M. W. Blaschke, dans un récent travail[2] a considéré une courbe, placée dans une variété riemannienne (R_n) dont le ds^2 a la forme très générale :

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1\dots n} g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

les g_{ik} étant des fonctions continues en général, d'ailleurs quelconques des coordonnées curvilignes $x_1, x_2, \dots x_n$. Nous suivons ici la méthode employée par ce géomètre, et dans la mesure du possible, nous emploierons les mêmes notations que celles qui sont employées dans l'article cité, de sorte qu'il nous sera aisé, à la fin de cette note, d'énoncer les résultats

[1] Cours professé en Sorbonne, hiver 1919-1920.

[2] *Mathematische Zeitschrift,* t. 6, 1919; *Frenets Formeln für den Raum von Riemann.*

de M. Blaschke, puisqu'ils constituent un cas particulier des formules que nous établirons. En effet, notre dessein est de trouver une généralisation des formules de Frenet pour une variété où la métrique est définie au sens de M. Weyl[1]. Dans une telle variété (W_n) la métrique est définie au moyen de deux formes différentielles, l'une quadratique:

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\dots n} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{I}$$

l'autre linéaire:

$$d\varphi = \sum_{i}^{1\dots n} \varphi_i\, dx_i \tag{II}$$

Les g_{ik} et les φ_i sont des fonctions des coordonnées curvilignes $x_1, x_2, \dots x_n$ au moyen desquelles on représente l'espace (W_n); la forme $d\varphi$ est un invariant pour toutes les transformations continues $x_i = f_i(y_1, y_2, \dots y_n)$.

C'est dire que les φ_i sont les composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 1 attaché à la forme (I). L'intérêt — d'ordre philosophique puisqu'il est relatif aux « hypothèses qui servent de base à la géométrie » — qui s'attache à une telle définition de la métrique d'une variété, dépend de la notion *d'étalonnage*. Nous n'y insisterons pas outre mesure, nous contentant de renvoyer le lecteur aux articles et ouvrage cités.

Toutefois il est bon de rappeler les faits suivants qui permettent de situer nettement le problème. Supposons qu'en chaque point de la variété, l'on change l'unité de longueur; nous supposerons qu'elle y devienne $\sqrt{\lambda}$ fois plus petite, λ étant une fonction positive du lieu. Alors le carré de l'élément linéaire devient[2]:

$$ds'^2 = \lambda g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

et M. Weyl a démontré que la forme (II) devient

$$d\varphi' = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi - d\log\lambda,$$

c'est-à-dire que, si l'on admet que les g_{ik} sont définis à un facteur connu près, la forme $d\varphi$ n'est définie qu'à une différentielle totale près. Au principe de l'invariance des formules

[1] Voir *Raum, Zeit, Materie.* 4e éd. Springer, Berlin 1921, p. 109, ou bien *Math. Zs.*, t. 2, 1918: *Reine Infinitesimalgeometrie.*

[2] Suivant la convention bien connue, nous supprimons les signes Σ quand ils portent sur des indices qui sont à la fois covariants et contravariants.

qui expriment les lois de la géométrie infinitésimale[1], c'est-à-dire en quelque manière, à l'indifférence que ces formules manifestent pour le système des coordonnées curvilignes choisi dans la variété, M. Weyl a ajouté le *principe de la relativité de la grandeur:*

Les formules de la géométrie différentielle ne doivent pas être seulement invariantes pour des transformations continues quelconques des variables x_i, mais encore elles doivent rester inaltérées quand l'étalonnage de la variété change, c'est-à-dire quand on remplace g_{ik} par λg_{ik} et φ_i par $\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$.

Cette notion est liée très étroitement à la notion de *connexion métrique* dont elle découle d'ailleurs. En chaque point de la variété, on peut imaginer des vecteurs, c'est-à-dire des grandeurs définies par n nombres $\xi^1, \xi^2, \ldots \xi^n$ qui se transforment dans un changement de coordonnées comme les différentielles dx_i; ce sont les composantes contravariantes d'un vecteur. A chaque vecteur, on peut faire correspondre un nombre qui sera appelé la *mesure du segment* déterminé par le vecteur, ce nombre est[2]:

$$g_{ik}\,\xi^i\,\xi^k$$

Considérons l'ensemble des vecteurs attachés à un point P. Il y correspond un ensemble simplement infini de nombres qui sont les mesures des segments déterminés par ces vecteurs. Considérons de plus les deux ensembles de vecteurs et de segments attachés à un point P', infiniment voisin de P. On dira que le point P est en *connexion métrique* avec son voisinage; si l'on sait avec quel segment attaché à P', un segment quelconque attaché à P, vient coïncider quand on déplace par *congruence* l'ensemble des vecteurs attachés à P jusqu'à l'amener à coïncider avec l'ensemble des vecteurs attachés à P'. Un tel déplacement par congruence a été déjà défini par M. Levi Civita[3] sous le nom de *déplacement parallèle*, dans le cas où l'on admet que la mesure d'un segment reste inaltérée quel que soit le déplacement que subit le vecteur auquel il est attaché. La définition que donne M. Weyl du déplacement congruent, coïncide parfaitement avec celle de M. Levi Civita,

[1] Les principes de cette géométrie intrinsèque se trouvent développés dans le travail suivant de MM. Ricci et Levi Civita : *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Math. Annalen,* t. 54, 1900.

[2] Ce n'est pas sa longueur.

[3] *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque, etc. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo,* t. 42, 1917.

quand on suppose $d\varphi \equiv 0$. Voici les résultats : Si l'on considère en P $(x_1, \dots x_n)$ le vecteur X $(\xi^1, \xi^2, \dots \xi^n)$, et qu'on le déplace par congruence de P en P' $(x_1 + dx_1, \dots x_n + dx_n)$ il vient s'appliquer sur le vecteur attaché à P' dont les composantes sont $\xi^i + d\xi^i$ $(i = 1, 2, \dots n)$ et l'on a :

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{rs}\,\xi^r\,dx_s.$$

Les Γ^i_{rs} sont les composantes d'une grandeur qui n'a un caractère tensoriel que pour des transformations linéaires des coordonnées ; elles sont alors covariantes en r et s, contravariantes en i, de plus :

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}.$$

Leur expression en fonction des g_{ik} et des φ_i est

$$\Gamma^i_{rs} = g^{ik}\,\Gamma_{k,rs}$$

avec

$$\Gamma_{r,ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\right] + \frac{1}{2}(g_{ir}\varphi_k + g_{rk}\varphi_i - g_{ik}\varphi_r);$$

les g^{ik} sont égaux respectivement aux mineurs des g_{ik} dans le déterminant $|g_{ik}|$, divisés par ce déterminant lui-même ; on a de plus :

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} + g_{ik}\varphi_r.$$

Considérons une courbe C donnée par les équations paramétriques : $x_i = x_i(s)$; à chaque point de la courbe, attachons un vecteur X ; ses composantes ξ^i seront définies par des fonctions de s : $\xi^i = f^i(s)$.

Déplaçons congruement ce vecteur $X(\xi^i)$, relatif au point $P(s)$ de la courbe, de P en $P'(s + ds)$, ses composantes y deviennent

$$\xi^i + d\xi^i = \xi^i - \Gamma^i_{rs}\,\xi^r\,dx_s.$$

Mais au point $P'(s + ds)$ est attaché, d'après les lois données, le vecteur

$$\xi^i + \frac{d\xi^i}{ds}ds = \xi^i + \frac{df^i}{ds}ds.$$

La différence de ces expressions donne la quantité dont varie une composante du vecteur X, quand on passe de P en P' ; cette différence n'est pas autre chose qu'une des composantes du vecteur qu'il faut ajouter au vecteur $X(s)$ transporté congruement de P en P', pour obtenir le vecteur $X(s+ds)$ attaché à P'.

Il s'ensuit que :

$$\theta\xi^i = \frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma^i_{rs}\xi^r \frac{dx_s}{ds} \tag{1}$$

est une composante d'un *vecteur contravariant* attaché à la courbe[1].

Ces préliminaires établis ou rappelés, il nous est facile de trouver les formules de Frenet pour une courbe quelconque tracée dans une (W_n). Ces formules expriment la variation d'un n-èdre rectangle, attaché à la courbe lorsque l'on passe d'un point de cette courbe à un point infiniment voisin. A chaque point $P(s)$ de la courbe, nous attachons n vecteurs définis de la manière suivante[2] :

$$\begin{array}{lll}
X_1\,(\xi^i_{(1)}) & \text{aux composantes :} & \xi^i_{(1)} = \dfrac{dx_i}{ds} \\
X_2\,(\xi^i_{(2)}) & \text{»} \qquad\qquad \text{»} & : \xi^i_{(2)} = \theta\xi^i_{(1)} \\
\dots\dots & & \\
X_k\,(\xi^i_{(k)}) & \text{»} \qquad\qquad \text{»} & : \xi^i_{(k)} = \theta\xi^i_{(k-1)} \\
\dots\dots & & \\
X_n\,(\xi^i_{(n)}) & \text{»} \qquad\qquad \text{»} & : \xi^i_{(n)} = \theta\xi^i_{(n-1)}
\end{array}$$

Nous supposerons qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre ces n vecteurs; cela veut dire que ces n vecteurs forment bien un n-èdre (oblique en général) situé dans l'espace plan, tangent à la variété W_n au point P. (M. Guichard appelle un tel espace plan un *n-plan*.)

Cela étant, appliquons à ces n vecteurs les procédés d'orthogonalisation qui sont dus à M. Schmidt[3], c'est-à-dire considérons dans le n-plan tangent à W_n un n-èdre n-rectangulaire[4].

[1] *R., Z., M.*, p. 103.

[2] Ici, nous suivons servilement la méthode que M. Blaschke a employée pour le cas particulier d'un espace (Rn).

[3] *Math. Ann.*, t. 63.

[4] Deux vecteurs $X(\xi^i)$ et $Y(\eta^i)$ sont dits rectangulaires, comme on sait, si

$$g_{ik}\xi^i\eta^k = 0$$

Posons :

$$g_{ik}\,\xi^i_{(p)}\,\xi^k_{(q)} = (p, q)$$

et

$$\begin{vmatrix} (1,1), (1,2) \ldots (1,p) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (p,1), \ldots\ldots (p,p) \end{vmatrix} = D_{(p)}; \quad (D_{(o)} = 1);$$

les n vecteurs de base du n-èdre seront :

$$\eta^i_{(p)} = \frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}} \begin{vmatrix} (1,1), \ldots (1, p-1), \xi^i_{(1)} \\ (2,1), \ldots (2, p-1), \xi^i_{(2)} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (p,1), \ldots (p, p-1); \xi^i_{(p)} \end{vmatrix}$$

$(p = 1, 2, \ldots n)$

En se rappelant les principes de la théorie d'orthogonalisation suivant Schmidt, on voit que :

$$g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\xi^k_{(q)} = 0 \quad \text{et} \quad g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\eta^k_{(q)} = 0, \text{ si } p > q,$$

et

$$g_{ik}\,\eta^i_{(p)}\,\eta^k_{(p)} = 1.$$

Nous avons ainsi un n-èdre (N) formé de *n-vecteurs* dont les *segments* ont pour mesure l'unité ; ces vecteurs étant orthogonaux 2 à 2.

$\eta^i_{(1)}$ est le vecteur tangent à la courbe en P,

$\eta^i_{(2)}$ est le vecteur situé dans le *un-plan* osculateur à la courbe en P, il est normal à la tangente ; c'est la 1re normale à la courbe ; etc., etc...

Déplaçons le n-èdre (N) par congruence de $P(s)$ en $P'(s+ds)$; soit (N^*) sa nouvelle position, et considérons le n-èdre (N') attaché en P'. Comment passe-t-on du n-èdre (N^*) au n-èdre (N') ? Tel est le problème que l'on se pose et qui aboutit aux formules de Frenet. Prenons, par exemple, le vecteur $H_p\left(\eta^i_{(p)}\right)$, il est devenu dans le déplacement H^*_p ; formons alors $\dfrac{H'_p - H^*_p}{ds}$, ce n'est pas autre chose que θH_p, et ce n'est pas d'une autre manière que l'on procède quand on emploie en géométrie différentielle classique, l'image sphérique de la courbe.

Posons alors :

$$\theta\eta^{(i)}_{(p)} = \sum_{q}^{1\dots n} \alpha_{(pq)}\, \eta^{i}_{(q)}, \tag{2}$$

nous dirons que les $\alpha_{(pq)}$ sont les courbures généralisées; on voit aisément leur signification vectorielle. Remarquons que

$$\alpha_{(pq)} = g_{ik}\left(\theta\eta^{i}_{(p)}\right)\eta^{k}_{(q)}$$

en vertu des relations d'orthogonalisation.

Calculons les $\alpha_{(pq)}$ explicitement.

Puisque $$g_{ik}\,\eta^{i}_{(p)}\,\eta^{k}_{(q)} = const.,$$

$$\frac{d}{ds}\left[g_{ik}\,\eta^{i}_{(p)}\,\eta^{k}_{(q)}\right] = 0,$$

c'est-à-dire en vertu de (1) :

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r}\,\xi^{r}\,\eta^{i}_{(p)}\,\eta^{r}_{(q)} + g_{li}\left[\theta\eta^{l}_{(p)} - \Gamma^{l}_{kr}\,\xi^{r}\,\eta^{k}_{(p)}\right]\eta^{i}_{(q)}$$
$$+ g_{kl}\left[\theta\eta^{l}_{(q)} - \Gamma^{l}_{ir}\,\xi^{r}\,\eta^{i}_{(q)}\right]\eta^{k}_{(p)} = 0; \tag{3}$$

or : $$g_{li}\,\Gamma^{l}_{kr} + g_{kl}\,\Gamma^{l}_{ir} = \Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = g_{ik}\,\varphi_r + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r};$$

par suite, l'égalité (3) devient :

$$g_{li}\,\theta\eta^{l}_{(p)}\,\eta^{i}_{(q)} + g_{kl}\,\theta\eta^{l}_{(q)}\,\eta^{k}_{(p)} - g_{ik}\,\varphi_r\,\xi^{r}\,\eta^{k}_{(p)}\,\eta^{i}_{(q)} = 0.$$

Donc, on a : $$\alpha_{(pq)} + \alpha_{(qp)} = \delta_{(pq)}\frac{d\varphi}{ds}$$

car

$$\xi^{r}\,\varphi_r = \varphi_r\frac{dx_r}{ds} = \frac{d\varphi}{ds};$$

on a posé : $$\delta_{(pq)} = \begin{matrix} 1\ (\text{si } p = q) \\ 0\ (\text{si } p \neq q) \end{matrix}$$

on voit donc que, si $p \neq q$,

$$\alpha_{(pq)} = -\,\alpha_{(qp)}$$

Remarquons encore que $\theta\eta_{(p)}$ dépend linéairement des vecteurs $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots \xi_{(p+1)}$; or $\eta_{(q)}$ est orthogonal aux vecteurs $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots \xi_{(q-1)}$, donc si

$$p+1 \leqq q-1, \text{ l'on a :}$$

$$g_{ik}\left(\theta\eta^i_{(p)}\right)\eta^k_{(q)} = 0,$$

c'est-à-dire que $$\alpha_{(pq)} = 0$$

quand p et q diffèrent de 2 unités ou plus.

On posera par suite :

$$\alpha_{(p,p+1)} = \frac{1}{\rho_{(p)}}.$$

Notre calcul est déjà considérablement réduit puisqu'il ne s'agit plus que de calculer les $(n-1)$ grandeurs $\rho_{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots n-1)$.

Or :

$$\alpha_{(p,p+1)} = \frac{1}{\rho_{(p)}} = g_{ik}\,\theta\eta^i_{(p)}\,\eta^k_{(p+1)}$$

mais

$$\eta^i_{(p)} = \frac{1}{\sqrt{D_{(p-1)}D_{(p)}}}\begin{vmatrix} (1,1), \dots (1, p-1), & \xi^i_{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ (p,1), \dots (p, p-1), & \xi^i_{(p)} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\eta^i_{(p)} = A_{(1)}\xi^i_{(1)} + A_{(2)}\xi^i_{(2)} + \dots + A_{(p)}\xi^i_{(p)},$$

les A étant des nombres bien choisis, par suite :

$$\theta\eta^i_{(p)} = B_{(1)}\xi^i_{(1)} + \dots + B_{(p)}\xi^i_{(p)} + B_{(p+1)}\xi^i_{(p+1)};$$

les B étant des coefficients dont le dernier seul nous importe, car le vecteur $H_{(p+1)}\left(\eta^k_{(p+1)}\right)$ est orthogonal à tous les $X_{(r)}\left(\xi^i_{(r)}\right)$, pour lesquels $r < p+1$.

Donc, on a :

$$\alpha_{(p,p+1)} = \frac{1}{\rho_{(p)}} = g_{ik}\,B_{(p+1)}\,\xi^i_{(p+1)}\,\eta^k_{(p+1)}.$$

$B_{(p+1)}$ se calcule aisément, ce n'est pas autre chose que $A_{(p)}$ comme il appert de la règle suivante :

$$\theta(\lambda\xi^i) = \frac{d\lambda}{ds}\xi^i + \lambda\theta\xi^i,$$

où λ est une fonction quelconque de s. Mais

$$A_{(p)} = D_{(p-1)} : \sqrt{D_{(p)} D_{(p-1)}}.$$

Remarquons enfin que les formules qui expriment les $\eta^i_{(p)}$ en fonction des $\xi^j_{(q)}$ peuvent se résoudre par rapport aux $\xi_{(q)}$; on trouve en particulier :

$$\xi^i_{(p+1)} = C_{(1)}\eta^i_{(1)} + C_{(2)}\eta^i_{(2)} + \ldots + C_{(p+1)}\eta^i_{(p+1)};$$

le seul coefficient intéressant pour nous est $C_{(p+1)}$, car

$$\alpha_{(p,p+1)} = \frac{1}{\rho_{(p)}} = g_{ik} A_{(p)} C_{(p+1)} \eta^i_{(p+1)} \eta^k_{(p+1)} = A_{(p)} C_{(p+1)}$$

Un calcul simple montre que

$$C_{(p+1)} = \frac{\sqrt{D_{(p)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}}$$

donc :

$$\alpha_{(p,p+1)} = \frac{1}{\rho_{(p)}} = \frac{D_{(p-1)}}{\sqrt{D_{(p)} D_{(p-1)}}} \cdot \frac{\sqrt{D_{(p)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}} = \frac{\sqrt{D_{(p-1)} D_{(p+1)}}}{D_{(p)}}$$

Les formules (2) deviennent donc :

$$(F)\left\{\begin{array}{l}
\theta\eta^i_{(1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(1)} + \dfrac{1}{\rho_{(1)}}\eta^i_{(2)} \\
\theta\eta^i_{(2)} = -\dfrac{1}{\rho_{(1)}}\eta^i_{(1)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(2)} + \dfrac{1}{\rho_{(2)}}\eta^i_{(3)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta\eta^i_{(p)} = -\dfrac{1}{\rho_{(p-1)}}\eta^i_{(p-1)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(p)} + \dfrac{1}{\rho_{(p)}}\eta^i_{(p+1)} \quad (p = 2, \ldots n-1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta\eta^i_{(n)} = \qquad\qquad\qquad -\dfrac{1}{\rho_{(n-1)}}\eta^i_{(n-1)} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi}{ds}\eta^i_{(n)}.
\end{array}\right.$$

Ce sont les formules de Frenet cherchées; les rayons de courbure $\rho_{(1)} \ldots \rho_{(n-1)}$ sont donnés par les formules:

$$\rho_{(k)} = \frac{D_{(k)}}{\sqrt{D_{(k-1)} D_{(k+1)}}}$$

Le déterminant des coefficients des formules (F) est *symétrique gauche;* les termes de la diagonale principale sont *tous égaux à* $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{ds}\cdot$ Si l'on regarde le n-èdre (N) comme mobile sur la courbe C, on peut dire que l'on passe d'une de ses positions à la position voisine *en le déplaçant par congruence,* puis *en lui faisant subir une rotation définie par les courbures* $\frac{1}{\rho_{(i)}}$ *de* C, et, enfin *en le déformant suivant une homothétie de rapport* $1 + \frac{d\varphi}{2}\cdot$ Nous généraliserons ces résultats pour des variétés quelconques plongées dans une (W_n).

Manuscrit reçu le 10 octobre 1921.
Dernières épreuves corrigées le 15 novembre 1921.