Zeitschrift: Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles
Band: 57 (1932)

Artikel: Fonctions sphériques et surface d'approximation
Autor: Gaberel, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-88697

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FONCTIONS SPHÉRIQUES
ET
SURFACE D'APPROXIMATION

PAR

L. GABEREL

Professeur de géométrie à Neuchâtel

Position du problème.

Dans ses *Anwendungen der Differential und Integralrechnung auf Geometrie*, F. Klein, le célèbre mathématicien de Göttingue, proposait le problème suivant :

Les quantités φ et θ désignant les coordonnées variables angulaires (longitude et colatitude), une fonction de ces deux variables est arbitrairement définie sur la sphère unité (de rayon un), de telle manière qu'elle soit alternativement égale à $+1$ et -1 sur les octants successifs de la sphère. On demande d'exprimer la représentation approchée de cette fonction par le moyen des fonctions sphériques. On poussera l'approximation jusqu'au quatrième degré. Enfin, on construira la surface représentative d'approximation de la fonction.

L'intérêt didactique d'un tel problème est évident, et d'ailleurs la solution, que nous allons développer, présente des particularités géométriques remarquables.

PREMIÈRE PARTIE

Formules des surfaces d'approximation.

§ 1. Généralités.

Série de fonctions sphériques. — Lorsqu'une fonction $f(\mu, \varphi)$, où l'on a $\mu = \cos\theta$, est arbitrairement définie sur la sphère unité, cela signifie que la valeur de cette fonction est donnée en chaque point de la sphère, c'est-à-dire pour un quelconque des couples de valeurs de μ et φ qui correspondent aux divers points de la sphère.

Or, une fonction de μ et φ, définie sur la sphère unité, qui satisfait aux conditions de Dirichlet pour chacune des variables, peut être représentée par une série convergente procédant suivant les fonctions sphériques générales de degrés indéfiniment croissants. C'est précisément le cas pour la fonction qui nous est proposée.

La formule de la série est la suivante :

$$f(\mu, \varphi) = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m + \ldots,$$

$Y_m(\mu, \varphi) \equiv Y_m$ désignant la fonction sphérique générale de degré m définie comme suit :

$$Y_m(\mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{n=m} \left(A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi\right) \sin^n \theta \frac{d^n P_m(\mu)}{d\mu^n},$$

ou, en posant

$$\sin^n \theta \frac{d^n P_m(\mu)}{d\mu^n} = (1 - \mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_m(\mu)}{d\mu^n} = P_m^n(\mu),$$

et en séparant le terme pour lequel $n = 0$,

$$Y_m(\mu, \varphi) = A_{0,m} P_m(\mu) + \sum_{n=1}^{n=m} \left(A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi\right) P_m^n(\mu),$$

les A et les B désignant des coefficients constants dont nous rappellerons plus loin la forme.

Les fonctions $P_m(\mu)$ sont les *fonctions sphériques zonales* ou *coefficients de Legendre*. L'indice m marque le *degré*.

Quant aux fonctions $P_m^n(\mu)$, nous les appellerons d'après Byerly[1], *fonctions sphériques associées*. Cet auteur donne une table des fonctions $P_m(\mu)$ et $P_m^n(\mu)$ jusqu'au 8me degré inclusivement.

[1] BYERLY. An elementary treatise on Fourier's series, etc. Boston, 1902.

Dans ces conditions, la série d'approximation de $f(\mu, \varphi)$ en fonctions sphériques peut s'écrire, en supprimant la notation μ dans les $P_m(\mu)$ et $P_m^n(\mu)$ pour simplifier l'écriture,

$$f(\mu, \varphi) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[A_{0,m} P_m + \sum_{n=1}^{n=m} \left(A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi \right) P_m^n \right].$$

L'indice m sera donc toujours supérieur ou au moins égal à n.

Quant aux coefficients A et B, leurs formules de détermination sont :

$$A_{0,m} = \frac{2m+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} f(\mu, \varphi) P_m \, d\mu,$$

$$A_{n,m} = \frac{2m+1}{2\pi} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} f(\mu, \varphi) \cos n\varphi \, P_m^n \, d\mu,$$

$$B_{n,m} = \frac{2m+1}{2\pi} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} f(\mu, \varphi) \sin n\varphi \, P_m^n \, d\mu.$$

A cause du facteur commun $(m-n)!$, on voit que les $A_{n,m}$ et $B_{n,m}$ sont nuls pour $m = n$. On ne pourra donc avoir que $m > n$.

Le domaine d'intégration s'étend à toute la sphère, soit pour φ, de 0 à 2π, et pour $\mu = \cos\theta$, de -1 à $+1$. Mais la variation de μ peut être opérée en deux parties, savoir de -1 à 0 pour l'hémisphère inférieur, et de 0 à 1 pour l'hémisphère supérieur.

D'ailleurs, sur chaque hémisphère, de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, la fonction $f(\mu, \varphi)$ particulière que nous devons représenter doit être alternativement égale à $+1$ et -1 lorsqu'on passe d'un octant au suivant, de telle manière que sur l'hémisphère supérieur, la valeur initiale est $+1$, et qu'elle est égale à -1 sur l'hémisphère inférieur.

§ 2. Calcul des $A_{0,m}$ et $A_{n,m}$.

Calcul des $A_{0,m}$. — Puisque $P_m(\mu)$ ne dépend que de μ, on a

$$A_{0,m} = \frac{2m+1}{4\pi} \left[\int_{-1}^{0} P_m \, d\mu \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \, d\varphi + \int_0^{1} P_m \, d\mu \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \, d\varphi \right].$$

Le premier terme représente l'intégrale sur l'hémisphère inférieur, le second sur l'hémisphère supérieur. Or, pour une même

valeur de φ, la fonction $f(\mu, \varphi)$ prend deux valeurs opposées -1 et $+1$ sur ces deux hémisphères. Il en résulte que les intégrales $\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi$ sur les deux hémisphères sont opposées. En représentant par $\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi$ la valeur de cette intégrale sur l'hémisphère supérieur, on a

$$A_{0,m} = -\frac{2m+1}{4\pi}\left(\int_{-1}^{0} P_m\, d\mu - \int_0^1\right)\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi.$$

Toutes les fois que plusieurs intégrales se suivront portant sur la même expression différentielle, nous n'indiquerons celle-ci que sous le premier signe $\int$, comme nous l'avons fait ci-dessus pour $P_m\, d\mu$, ceci afin d'alléger l'écriture.

Mais l'intégrale relative à φ sur l'hémisphère supérieur donne

$$\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 0.$$

Tous les $A_{0,m}$ sont donc nuls, quel que soit l'entier m.

Calcul des $A_{n,m}$. — La formule générale de ces coefficients est donc

$$A_{n,m} = \frac{2m+1}{2\pi} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} f(\mu, \varphi) \cos n\varphi \cdot P_m^n\, d\mu.$$

D'ailleurs les $P_m^n(\mu)$ ne dépendent que de μ. En tenant compte des remarques précédentes, on pourra donc écrire

$$A_{n,m} = -\frac{2m+1}{2\pi} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!}\left(\int_{-1}^{0} P_m^n\, d\mu - \int_0^1\right)\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \cos n\varphi\, d\varphi,$$

l'intégrale relative à φ ne se rapportant plus qu'à l'hémisphère supérieur. Dans ces conditions, on a

$$\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \cos n\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos n\varphi\, d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{2}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{3n\pi}{2}\right)$$

et l'on a

$$\sin\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{3n\pi}{2}=\sin\frac{n\pi}{2}+\sin(4n-n)\frac{\pi}{2}=\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

Tous les $A_{n,m}$ sont donc nuls, quels que soient m et n.

§ 3. Généralités sur les coefficients $B_{n,m}$.

Première formule. — La formule générale est

$$B_{n,m}=\frac{2m+1}{2\pi}\cdot\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{1}f(\mu,\varphi)\sin n\varphi\cdot P_m^n\,d\mu.$$

En vertu des remarques déjà formulées sur $P_m^n\,d\mu$ et sur les valeurs de $f(\mu,\varphi)$, on peut évidemment écrire :

$$B_{n,m}=-\frac{2m+1}{2\pi}\cdot\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\left(\int_{-1}^{0}P_m^n\,d\mu-\int_0^1\right)\int_0^{2\pi}f(\mu,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,$$

l'intégrale en φ ne se rapportant qu'à l'hémisphère supérieur. On a alors

$$\int_0^{2\pi}f(\mu,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin n\varphi\,d\varphi-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{3n\pi}{2}-(1+\cos n\pi)\right].$$

La quantité entre crochets donne

$$\cos\frac{n\pi}{2}+\cos(4n-n)\frac{\pi}{2}-2\cos^2\frac{n\pi}{2}=2\cos\frac{n\pi}{2}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{n\pi}{2}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

Il faut maintenant trouver la valeur de ce produit suivant que n est pair ou impair.

Cas de n **impair.** — On a $\cos\frac{n\pi}{2}=0$, par suite on aura

$$B_{n,m}=0,$$

quel que soit m.

Cas de n **pair.** — a) n est *pairement pair :* $n = 2 \cdot 2k$, k étant un entier tel que $4k < m$. On a alors

$$\sin \frac{n\pi}{4} = \sin k\pi = 0.$$

Par conséquent, *lorsque n est pairement pair, on a*

$$B_{n,m} = 0,$$

quel que soit m.

b) n est impairement pair : $n = 2(2k+1)$. On a alors

$$\cos \frac{n\pi}{2} \sin^2 \frac{n\pi}{4} = \cos (2k+1)\pi \sin^2 (2k+1)\frac{\pi}{2} = -1.$$

Par conséquent, *dans le cas où n est impairement pair, on peut avoir $B_{n,m} \neq 0$.* On a alors

$$\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{8}{n},$$

et, par suite,

$$B_{n,m} = -\frac{4(2m+1)}{n\pi} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \left(\int_{-1}^{0} P_m^n \, d\mu - \int_0^1 \right).$$

Résumé. — Les seuls $B_{n,m}$ qui peuvent être différents de 0 sont donc

$$B_{2,m}, \quad B_{6,m}, \quad B_{10,m}, \quad \text{etc.}$$

avec $m > 2, 6, 10 \ldots$ respectivement.

Quoique le propre énoncé du problème n'exige que le calcul des coefficients jusqu'à $m = 4$, nous pousserons cette détermination jusqu'à $m = 9$. Ceci nous permettra de comparer rapidement l'approximation du quatrième degré avec celles de degrés supérieurs jusqu'à 9.

Parité de P_m^n. — L'intégration, pour le calcul des $B_{n,m}$, portant maintenant sur la fonction $P_m^n(\mu)$ dans les deux domaines opposés $(-1,0)$ et $(0,1)$, il y a lieu de comparer les valeurs de $P_m^n(\mu)$ pour deux valeurs opposées de μ. Ceci revient à étudier la parité éventuelle de $P_m^n(\mu)$.

Or, en posant $\cos \theta = \mu$, on a

$$P_m^n(\mu) \equiv \sin^n \theta \frac{d^n P_m(\mu)}{d\mu^n} = (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^n P_m(\mu)}{d\mu^n}.$$

Remarquons tout d'abord que le domaine de θ auquel correspond celui de μ de -1 à $+1$, est celui qui s'étend de $\theta = \pi$ à $\theta = 0$.

Dans tout ce domaine, $\sin\theta$ ou $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}$ reste positif et il en est de même de $\sin^n\theta$ ou $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$.

D'autre part, on sait que la fonction $P_m(\mu)$ est de même parité que le nombre m[1]. Or, la dérivée d'une fonction paire est impaire, tandis que celle d'une fonction impaire est paire. Il en résulte que les fonctions

$$P_m, \quad \frac{dP_m}{d\mu}, \quad \frac{d^2P_m}{d\mu^2}, \ldots, \quad \frac{d^nP_m}{d\mu^n},$$

sont respectivement de même parité que les nombres

$$m, \quad m+1, \quad m+2, \ldots, \quad m+n.$$

Par conséquent, la fonction P_m^n sera de même parité que le nombre $m+n$.

1° Si $m+n$ est pair, c'est-à-dire si m et n sont de même parité, on a

$$\int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu = \int_0^1 P_m^n\,d\mu, \quad \text{d'où} \quad \int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu - \int_0^1 = 0;$$

2° Si $m+n$ est impair, on a

$$\int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu = -\int_0^1 P_m^n\,d\mu, \quad \text{d'où} \quad \int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu - \int_0^1 = 2\int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu.$$

Conclusion. — *La différence* $\int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu - \int_0^1 P_m^n\,d\mu$ *est nulle pour tous les couples de nombres m et n qui sont de même parité, et égale à* $2\int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu$ *pour les couples de m et n qui sont de parités différentes.*

Les seuls $B_{n,m}$ qui peuvent donc ne pas être nuls jusqu'au 9me degré sont :

$$B_{2,3}, \quad B_{2,5}, \quad B_{2,7}, \quad B_{2,9}, \quad \text{et} \quad B_{6,7}, \quad B_{6,9}.$$

Formule définitive des $B_{n,m}$. — Nous avions trouvé

$$B_{n,m} = -\frac{4(2m+1)}{n\pi}\cdot\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\left(\int_{-1}^{0} P_m^n\,d\mu - \int_0^1\right).$$

[1] Le terme de *parité* est ici employé sous deux sens différents : parité d'une fonction, parité d'un nombre. Cette dualité ne présente évidemment aucun inconvénient.

Or, pour les $B_{n,m}$ qui peuvent être non nuls, m et n sont de parités différentes, c'est-à-dire que $P_m^n(\mu)$ est impair; on aura donc

$$B_{n,m} = -\frac{8(2m+1)}{n\pi} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \int_{-1}^{0} P_m^n(\mu)\, d\mu.$$

§ 4. Calcul des $B_{2,m}$ et $B_{6,m}$ pour $m = 3, 5, 7$.

Calcul de $B_{2,3}$. — On a

$$B_{2,3} = -\frac{8 \cdot 7}{2\pi} \cdot \frac{1}{5!} \int_{-1}^{0} P_3^2(\mu)\, d\mu,$$

et comme

$$P_3^2(\mu) = (1-\mu^2) \cdot 15\mu$$

on aura

$$B_{2,3} = -\frac{7}{2\pi} \int_{-1}^{0} \mu(1-\mu^2)\, d\mu = \frac{7}{4\pi} \int_{-1}^{0} (1-\mu^2)\, d(1-\mu^2) = \frac{7}{8\pi} \Big| (1-\mu^2)^2 \Big|_{-1}^{0}$$

soit

$$\underline{B_{2,3} = \frac{7}{8\pi}.}$$

Calcul de $B_{2,5}$. — On a

$$B_{2,5} = -\frac{8 \cdot 11 \cdot 3!}{2 \cdot \pi \cdot 7!} \int_{-1}^{0} P_3^2(\mu)\, d\mu$$

avec

$$P_3^2(\mu) = (1-\mu^2) \cdot \frac{105}{2}(3\mu^3 - \mu) = -\frac{105}{2}(3\mu^5 - 4\mu^3 + \mu).$$

Donc

$$B_{2,5} = \frac{3!\, 8 \cdot 11 \cdot 105}{7!\, 2^2 \cdot \pi} \int_{-1}^{0} (3\mu^5 - 4\mu^3 + \mu)\, d\mu.$$

Or,

$$\int_{-1}^{0} (3\mu^5 - 4\mu^3 + \mu)\, d\mu = \left| \frac{\mu^6}{2} - \mu^4 + \frac{\mu^2}{2} \right|_{-1}^{0} = 0.$$

On a, par suite, $\underline{B_{2,5} = 0.}$

Calcul de $B_{2,7}$**.** — On a

$$B_{2,7} = -\frac{8 \cdot 15 \cdot 5!}{2 \cdot \pi \cdot 9!} \int_{-1}^{0} P_7^2(\mu)\, d\mu,$$

avec

$$P_7^2(\mu) = (1-\mu^2) \cdot \frac{63}{8} \cdot (143\mu^5 - 110\mu^3 + 15\mu).$$

Donc

$$B_{2,7} = \frac{5!\,15 \cdot 63}{9!\,2 \cdot \pi} \int_{-1}^{0} (143\mu^7 - 253\mu^5 + 125\mu^3 - 15\mu)\, d\mu,$$

$$= \frac{5}{2^5\pi} \left| \frac{143}{8}\mu^8 - \frac{253}{6}\mu^6 + \frac{125}{4}\mu^4 - \frac{15}{2}\mu^2 \right|_{-1}^{0}$$

$$\underline{B_{2,7} = \frac{65}{768\pi}}.$$

Calcul de $B_{6,7}$**.** — On a

$$B_{6,7} = -\frac{8 \cdot 15}{6\pi} \cdot \frac{1}{13!} \int_{-1}^{0} P_7^6(\mu)\, d\mu,$$

avec

$$P_7^6(\mu) = (1-\mu^2)^3\, 135135\mu, \qquad 135135 = \frac{13!}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5}.$$

Donc

$$B_{6,7} = \frac{1}{2^{11} \cdot 3^2\pi} \cdot \left| (1-\mu^2)^4 \right|_{-1}^{0},$$

soit

$$B_{6,7} = \frac{1}{18432\pi}.$$

§ 5. Calcul de $B_{2,9}$ et $B_{6,9}$.

Remarque préliminaire. — Le calcul de $B_{2,9}$ et de $B_{6,9}$ nécessite la connaissance de P_9^2 et de P_9^6. Les tables de Byerly pour les fonctions P_m^n ne s'étendent pas au delà du 8me degré $m = 8$. En conséquence, j'ai dû calculer P_9^2 et P_9^6 et comme on le verra, aussi P_9.

Pour être plus sûr des résultats, j'ai fait les calculs par deux méthodes distinctes, l'une directe en partant de la formule

$$P_m^n(\mu)=\frac{(2m)!\sin^n\theta}{2\cdot m!(m-n)!}\left[\mu^{m-n}-\frac{(m-n)(m-n-1)}{2(2m-1)}\mu^{m-n-2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)(m-n-3)}{2\cdot 4\cdot(2m-1)(2m-3)}\mu^{m-n-4}-\ldots\right],$$

l'autre en partant de la formule de définition

$$P_m^n(\mu)=(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^n P_m}{d\mu^n}.$$

Cette dernière méthode a nécessité le calcul préalable de $P_m(\mu)$ pour $\mu=9$.

Les calculs sont longs et un peu fastidieux. Les résultats seuls nous intéressant, je me borne à les transcrire ici :

$$P_9=\frac{1}{128}(12155\mu^9-25740\mu^7+18018\mu^5-4620\mu^3+315\mu),$$

$$P_9^2=\frac{495}{16}\sin^2\theta(221\mu^7-273\mu^5+91\mu^3-7\mu),$$

$$P_9^6=\frac{675675}{2}\sin^6\theta(17\mu^3-3\mu)\qquad(675675=5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15).$$

Calcul de $B_{2,9}$. — On a $B_{2,9}=-\dfrac{8\cdot 19\cdot 7!}{2\cdot\pi\cdot 11!}\displaystyle\int_{-1}^{0}P_9^2(\mu)\,d\mu.$

Donc

$$B_{2,9}=\frac{19}{2^6\cdot\pi}\int_{-1}^{0}(221\mu^9-494\mu^7+364\mu^5-98\mu^3-7\mu)\,d\mu$$
$$=\frac{19}{2^6\cdot\pi}\left|\frac{221}{10}\mu^{10}-\frac{494}{8}\mu^8+\frac{364}{6}\mu^6-\frac{98}{4}\mu^4-\frac{7}{2}\mu^2\right|_{-1}^{0}$$

soit

$$\underline{B_{2,9}}=-\frac{19}{2^8\cdot 3\cdot 5\cdot\pi}=-\underline{\frac{19}{3840\pi}}.$$

Calcul de $B_{6,9}$. — On a $B_{6,9}=-\dfrac{8\cdot 19\cdot 3!}{6\cdot\pi\cdot 15!}\displaystyle\int_{-1}^{0}P_9^6(\mu)\,d\mu$

avec

$$P_9^6=\frac{675675}{3}(1-\mu^2)^3(17\mu^3-3\mu).$$

Le coefficient de l'intégrale sera donc

$$-\frac{3!\,8\cdot 19\cdot 675675}{15!\,2\cdot 6\cdot \pi}=-\frac{8\cdot 19\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13\cdot 15}{6\cdot \pi\cdot 15!}=-\frac{19}{2^9\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot \pi}.$$

L'intégration donne

$$\int_{-1}^{0}(17\mu^3-3\mu)(1-\mu^2)^3\,d\mu=-\frac{1}{8}\int_{-1}^{0}(17\mu^2-3)\,d\left[(1-\mu^2)^4\right]$$

$$=-\frac{1}{8}\Big|(17\mu^2-3)(1-\mu^2)^4\Big|_{-1}^{0}+\frac{17}{8}\int_{-1}^{0}(1-\mu^2)^4\,d(\mu^2)$$

$$=-\frac{1}{5\cdot 8}\Big|5(17\mu^2-3)(1-\mu^2)^4+17(1-\mu^2)^5\Big|_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{1}{5\cdot 8}(-15+17)=-\frac{1}{20}.$$

Donc on a

$$B_{6,9}=-\frac{19}{2^9\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot \pi}\cdot\frac{-1}{2^2\cdot 5}.$$

soit

$$\underline{B_{6,9}}=\frac{19}{2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot \pi}=\underline{\frac{19}{9676800\pi}}.$$

§ 5. Représentation de la fonction arbitraire.

Coefficients. — Les seuls coefficients non nuls jusqu'à $m=9$ sont donc

$$B_{2,3}=\frac{7}{8\pi},\quad B_{2,7}=\frac{65}{768\pi},\quad B_{6,7}=\frac{1}{18432\pi},\quad B_{2,9}=\frac{-19}{3840\pi},$$

$$B_{6,9}=\frac{19}{9676800\pi}.$$

Tous les $A_{0,m}$ ainsi que tous les $A_{n,m}$ sont nuls.

Fonctions sphériques générales jusqu'au 9me degré.

Nous désignerons maintenant avec Klein par $F_m(\theta,\varphi)$ la fonction sphérique générale de degré m que nous avions appelée $Y(\mu,\varphi)$:

$$F_m(\theta,\varphi)=Y_m(\mu,\varphi),\ \text{pour}\ \mu=\cos\theta.$$

On a donc

$$F_m(\theta, \varphi) = A_{0,m} P_m(\mu) + \sum_{n=1}^{n=m} (A_{n,m} \cos n\varphi + B_{n,m} \sin n\varphi) P_m^n(\mu),$$

pour $\mu = \cos\theta$.

Puisque les $A_{0,m}$ et les $A_{n,m}$ sont ici tous nuls, cette formule se réduit à

$$F_m(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{n=m} B_{n,m} \sin n\varphi \, P_m^n(\mu).$$

Les seuls coefficients non nuls jusqu'à $m = 9$ étant donnés ci-dessus, on voit qu'on a

$$F_0 = F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_6 = F_8 = 0,$$

tandis que

$$F_3 = \frac{7}{8\pi} \sin 2\varphi \, P_3^2,$$

$$F_7 = \frac{65}{768\pi} \sin 2\varphi \, P_7^2 + \frac{1}{18432\pi} \sin 6\pi \, P_7^6,$$

$$F_9 = \frac{19}{3840\pi} \sin 2\varphi \, P_9^2 + \frac{19}{9676800\pi} \sin 6\pi \, P_9^6.$$

On a d'ailleurs en faisant $\mu = \cos\theta$:

$$P_3^2 = 15\mu(1-\mu^2) = 15 \sin^2\theta \cos\theta,$$

$$P_7^2 = \frac{63}{8}(1-\mu^2)(143\mu^5 - 110\mu^3 + 15\mu)$$
$$= \frac{63}{8} \sin^2\theta (143 \cos^5\theta - 110 \cos^3\theta + 15 \cos\theta),$$

$$P_7^6 = 135135\mu(1-\mu^2)^3 = 135135 \sin^6\theta \cos\theta,$$

$$P_9^2 = \frac{495}{16}(1-\mu^2)(221\mu^7 - 273\mu^5 + 91\mu^3 - 7\mu)$$
$$= \frac{495}{16} \sin^2\theta (221 \cos^7\theta - 273 \cos^5\theta + 91 \cos^3\theta - 7 \cos\theta),$$

$$P_9^6 = \frac{675675}{2}(1-\mu^2)(17\mu^3 - 3\mu) = \frac{675675}{2} \sin^6\theta (17 \cos^3\theta - 3 \cos\theta).$$

Formules approchées de la fonction arbitraire. — Nous désignerons par $f_m(\mu, \varphi)$ la valeur de la fonction approchée de la fonction $f(\mu, \varphi)$ au moyen des fonctions sphériques générales jusqu'au degré m, c'est-à-dire que nous poserons :

$$f_m(\mu, \varphi) = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_m.$$

On voit qu'il faut aller jusqu'au 3me degré pour obtenir une formule approchée. On voit aussi que l'approximation reste ensuite la même jusqu'au 6me degré inclusivement,

$$f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = \frac{7}{8\pi} \sin 2\varphi \, P_3^2.$$

Surface d'approximation. — Nous représenterons la valeur de $f(\mu, \varphi)$ par un rayon r_m issu de l'origine et porté par la droite passant par le point (μ, φ) de la sphère unité et dirigé vers ce point ou dans le sens contraire, suivant que r_m sera positif ou négatif. Le lieu des extrémités du rayon r_m dans tout le domaine de la sphère sera donc une surface ayant pour équation, en coordonnées sphériques r_m, φ et θ:

$$r_m = \sum_0^m F_i(\theta, \varphi).$$

Cette équation représentera l'approximation obtenue pour la fonction arbitraire en employant les fonctions sphériques jusqu'au me degré.

Il n'y a donc, jusqu'au degré 9, que trois surfaces distinctes d'approximation, savoir celles dont les équations sont:

$$r_3 = F_3, \qquad r_7 = F_3 + F_7, \qquad r_9 = F_3 + F_7 + F_9.$$

Nous nous bornerons à écrire la première, soit

$$r_3 = \frac{105}{8\pi} \sin 2\varphi \sin^2\theta \cos\theta,$$

les deux autres ont des équations qu'il serait aisé d'écrire puisque nous avons calculé tous les éléments utiles, savoir les $B_{n,m}$ et les P_m^n, mais ces équations sont compliquées.

§ 7. Remarques sur la construction des surfaces d'approximation.

Symétrie par rapport aux axes coordonnés. — Il résulte des expressions des $B_{n,m}$ et des P_m^n que dans les équations des trois surfaces d'approximation, l'angle φ ne figure que sous le symbole *sin* portant sur des multiples pairs de φ. Or, on a

$$\sin 2k(\varphi + \pi) = \sin 2k\varphi,$$
$$\sin 2k(\pi - \varphi) = -\sin 2k\varphi.$$

Donc, en supposant l'angle θ constant, on peut déjà faire les deux remarques suivantes:

1° Si φ croît de π, r reprend la même valeur;

2° Si φ est changé en son supplément $\pi - \varphi$, r change simplement de signe.

De plus, dans chaque terme des trois équations, l'angle θ figure dans un produit de deux facteurs, l'un étant formé de puissances impairement paires de sin θ sera toujours positif; l'autre est un monôme ou un polynôme de puissances impaires de cos θ.

Il en résulte que si φ ne change pas de valeur, mais que θ soit changé en $\pi - \theta$, la fonction *cos* changeant de signe, ses puissances impaires en feront autant et, par suite, r prendra la valeur opposée.

Supposons maintenant qu'on opère une rotation de deux angles droits autour d'un quelconque des trois axes rectangulaires, voici ce qui se produira :

1° *Autour de l'axe des z :*

θ reste constant,
φ croît de π,
r *reprend la même valeur.*

2° *Autour de l'axe des x :*

θ est changé en $\pi - \theta$,
φ » » » $-\varphi$ ou en $2\pi - \varphi$,
r *reprend la même valeur.*

3° *Autour de l'axe des y :*

θ est changé en $\pi - \theta$,
φ » » » $\pi - \varphi$,
r *reprend la même valeur.*

En d'autres termes, *les surfaces d'approximation sont symétriques par rapport aux axes coordonnés.*

Relations par rapport aux plans coordonnés.

Si l'on passe d'un point (θ, φ) de la sphère unité au point symétrique par rapport à l'un quelconque des plans coordonnés, on aura les variations suivantes :

1° *Par rapport au plan x y :*

θ est changé en $\pi - \theta$,
φ ne change pas,
r *change simplement de signe.*

2° *Par rapport au plan y z :*

θ ne change pas,
φ est changé en $\pi - \varphi$,
r *change simplement de signe.*

3° *Par rapport au plan z x :*

θ ne change pas,
φ est changé en $-\varphi$ ou $2\pi - \varphi$,
r *change simplement de signe.*

Conclusion. — Numérotons les octants de la sphère comme suit :

1° Sur l'hémisphère supérieur : 1, 2, 3, 4 à partir de $\varphi = 0$;
2° Sur l'hémisphère inférieur : 5, 6, 7, 8 à partir de $\varphi = 0$.

Il résulte alors de la symétrie par rapport aux axes coordonnés qu'une rotation de deux droits opérée sur la surface d'approximation correspondant au premier octant et autour de l'axe des z, ou de l'axe des y, ou de l'axe des x, donnera la partie de la surface relative aux octants 3, 6, 8.

Il en est évidemment de même de la surface relative à l'octant 5 par rapport aux parties relatives respectivement aux octants 7, 2, 4.

Il suffit donc de faire voir comment on obtient la représentation de l'octant 5 au moyen de l'octant 1.

Or, il résulte des relations par rapport aux plans coordonnés que si r est la valeur du rayon secteur de la surface d'approximation correspondant à un point (θ, φ) du premier octant, la valeur du rayon qui correspond au point symétrique par rapport au plan $x\,y$ de l'octant 5 sera $-r$, c'est-à-dire qu'elle devra être portée dans le sens négatif. En d'autres termes, la représentation de ce point du 5me octant coïncidera avec celle du point de l'octant 3 qu'on obtiendrait par une rotation de deux droits de la surface relative au premier octant autour de l'axe des z.

Or, pour le premier octant les r sont positifs. *Il suffira donc de construire la surface relative au premier octant.* Alors, on en pourra déduire :

a) *la surface relative au 3me octant*, par une rotation de deux droits *autour de l'axe des z ;*

b) *la surface relative au 6me octant*, par une rotation de deux droits *autour de l'axe des y ;*

c) *la surface relative au 8me octant*, par une rotation de deux droits *autour de l'axe des x.*

De plus, les représentations ainsi obtenues sont doubles ; elles correspondent aux octants 1, 3, 6, 8, d'une part, et à leurs opposés respectifs par rapport à l'origine 7, 5, 4, 2, d'autre part.

Nous nous bornerons d'ailleurs, ainsi que le comporte l'énoncé primitif du problème, à étudier la surface d'approximation relative au 4me degré qui est celle des degrés 3, 4, 5, 6 à la fois.

DEUXIÈME PARTIE

Etude en coordonnées sphériques de la première surface d'approximation relative au premier octant.

§ 1. Généralités.

Symétrie. — L'équation de la première surface d'approximation (3me, 4me, 5me, 6me degré) est

$$r = \frac{105}{8\pi} \sin 2\varphi \sin^2 \theta \cos \theta.$$

Elle montre immédiatement que cette surface est symétrique par rapport au plan bissecteur $\varphi = \frac{\pi}{4}$ du premier dièdre (x, y). Car pour deux valeurs φ_1 et φ_2 de φ, équidistantes de $\frac{\pi}{4}$, on a

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \alpha, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \alpha,$$

d'où

$$\sin 2\varphi_1 = \cos 2\alpha, \qquad \sin 2\varphi_2 = \cos 2\alpha,$$

soit

$$\sin 2\varphi_1 = \sin 2\varphi_2,$$

et comme pour deux points de la sphère unité, symétriques par rapport au plan $\varphi = \frac{\pi}{4}$, les deux valeurs de θ sont égales, il s'ensuit que les deux valeurs de r sont aussi égales.

Nous étudierons la surface en la coupant, soit par des plans méridiens : $\varphi = \text{const.}$, soit par ces cônes : $\theta = \text{const.}$

Cônes θ. — L'équation

$$\theta = \theta_1, \tag{1}$$

où θ_1 est constant, représente un cône ayant pour sommet l'origine, pour axe l'axe des z, et pour demi-ouverture θ_1. Ce cône coupe la surface d'approximation suivant une courbe gauche dont les points

sont à des distances de l'origine variables avec φ et données par la formule

$$r_1 = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^2 \theta_1 \cos \theta_1 \sin 2\varphi. \qquad (2)$$

Les équations de (1) et (2) sont celles de cette courbe gauche.

La projection de la courbe sur le plan xy a pour équation polaire

$$R_1 = r_1 \sin \theta$$

soit

$$R_1 = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^3 \theta_1 \cos \theta_1 \sin 2\varphi,$$

R_1 et φ étant les coordonnées polaires dans le plan xy, le pôle étant l'origine O et l'axe x étant pris pour axe polaire. C'est une équation de la forme

$$R_1 = A_1 \sin 2\varphi,$$

qui représente une *rosace à quatre feuilles.*

A son tour la courbe gauche (1), (2) est l'intersection du cône $\theta = \theta_1$ avec le cylindre $R_1 = A_1 \sin 2\varphi$ qui a ses génératrices parallèles à l'axe des z.

Soient

$$R_1 = A_1 \sin 2\varphi, \qquad R_2 = A_2 \sin 2\varphi,$$

deux quelconques des courbes projetées sur xy, correspondant aux cônes θ_1 et θ_2. Elles sont symétriques par rapport à $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et de plus, homothétiques par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\sin^3 \theta_1 \cos \theta_1}{\sin^3 \theta_2 \cos \theta_2}.$$

Sections φ. — L'équation

$$\varphi = \varphi_1 \qquad (1)$$

représente un plan passant par l'axe z et faisant un angle φ avec le plan origine zx; sa trace sur le plan xy fait elle-même l'angle φ avec l'axe des x.

Ce plan coupe la surface d'approximation $r = F_3$ suivant une courbe ayant pour équations (1) et

$$r_1 = \frac{13{,}125}{\pi} \sin 2\varphi_1 \sin^2 \theta \cos \theta. \qquad (2)$$

Si l'on considère le plan φ_1 comme donné, l'équation polaire de cette courbe dans ce plan est simplement l'équation (2), le pôle étant l'origine O, l'axe polaire l'axe des z et θ l'angle polaire.

Sur un autre plan $\varphi = \varphi_2$ on aurait la courbe d'intersection

$$r_2 = \frac{13{,}125}{\pi} \sin 2\varphi_2 \sin^2 \theta \cos \theta.$$

Formons le rapport

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_2}.$$

Nous voyons que si l'on opère une rotation d'un des plans projetants autour de l'axe z jusqu'à ce qu'il vienne s'appliquer sur l'autre, les deux courbes r_1 et r_2 seront homothétiques par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant $\frac{\sin 2\varphi_1}{\sin 2\varphi_2}$.

Si nous considérons en particulier le plan $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, et si nous posons $r_1 = R$ pour cet angle, l'équation de la section par ce plan sera

$$R = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta,$$

et l'on aura pour un autre plan φ quelconque la courbe d'intersection

$$r = R \sin 2\varphi. \tag{3}$$

Sous cette forme, on voit que le rapport d'homothétie de chaque courbe φ avec la courbe $\varphi = \frac{\pi}{4}$ varie avec φ comme $\sin 2\varphi$. Si l'on admet donc qu'en faisant tourner le plan φ autour de l'axe des z à partir de $\varphi = \frac{\pi}{4}$, la courbe se rétrécisse d'une manière continue dans le rapport d'homothétie $\sin 2\varphi$, c'est-à-dire suivant la loi (3), la courbe variable décrira la surface relative au premier octant de $\frac{\pi}{4}$ à 0 et de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Nous sommes ainsi amenés à construire la courbe R relative au plan $\varphi = \frac{\pi}{4}$ qui présentera, à l'échelle près, les mêmes affections que toutes les courbes φ.

§ 2. Etude de la courbe R.

Courbe ϱ. — Si l'on pose

$$\sin^2 \theta \cos \theta = \varrho,$$

l'équation de la courbe R prend la forme

$$R = \frac{13{,}125}{\pi} \varrho.$$

La courbe R se déduira donc par homothétie de la courbe ϱ, le centre d'homothétie étant l'origine et le rapport d'homothétie $\frac{13{,}125}{\pi}$.

Voisinage de l'origine. — Pour $\theta = 0$ et $\theta = 90^0$, la fonction ϱ est nulle. D'ailleurs ϱ sera infiniment petit pour θ infiniment petit et pour θ infiniment voisin de 90^0. Donc la courbe ϱ est tangente à l'axe polaire (axe des z) et à la trace sur le plan xy du plan φ. Il en sera de même de la courbe R.

Comme on en peut dire autant de toutes les courbes r, la surface est donc tangente, à l'origine, à l'axe z et au plan xy.

Valeurs particulières de $\varrho = \sin^2 \theta \cos \theta$. — On a :

$$\text{pour } \theta = 45^0, \quad \varrho_{45} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1{,}414}{4} = 0{,}3335,$$

$$\text{pour } \theta = 30^0, \quad \varrho_{30} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732}{8} = 0{,}2165,$$

$$\text{pour } \theta = 15^0, \quad \varrho_{15} = \frac{1}{2} \sin 30^0 \sin 15^0 = 0{,}6475,$$

$$\text{pour } \theta = 60^0, \quad \varrho_{60} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}375,$$

$$\text{pour } \theta = 75^0, \quad \varrho_{75} = \frac{1}{2} \sin 30^0 \sin 75^0 = 0{,}2415,$$

$$\text{pour } \theta = 82^0{,}5 \quad \varrho_{82,5} = \frac{1}{2} \sin 5^0 \sin 82^0{,}5 = 0{,}1283.$$

On aura donc pour les R correspondants, en nous bornant aux décimales pratiquement utiles :

$$R_{45} = 1{,}47, \qquad R_{60} = 1{,}56,$$

$$R_{30} = 0{,}835, \qquad R_{75} = 1{,}009,$$

$$R_{15} = 0{,}27, \qquad R_{82,5} = 0{,}536.$$

Rayon maximum. — La dérivée de $\varrho = \sin^2\theta \cos\theta$ est

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = 2 \sin\theta \cos^2\theta - \sin^3\theta = \sin\theta \cos^2\theta (2 - tg^2\theta)$$

Lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on a donc

$$\frac{d\varrho}{d\theta} > 0 \text{ pour } 0 < \theta < \text{arc } tg \sqrt{2}),$$

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = 0 \text{ pour } \qquad \theta = \text{arc } tg \sqrt{2},$$

$$\frac{d\varrho}{d\theta} < 0 \text{ pour arc } tg \sqrt{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Donc ϱ croît, à partir de la valeur zéro, de $\theta = 0$ à $\theta = \text{arc } tg \sqrt{2}$, prend une valeur maximale pour $\theta = \text{arc } tg \sqrt{2}$, enfin décroît de $\theta = \text{arc } tg \sqrt{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ pour reprendre la valeur zéro.

Les tables de logarithmes donnent pour $tg\theta = \sqrt{2}$,

$$\theta = 54^\circ 44' 9'',$$

et l'on a pour cet angle

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

de sorte que le ϱ maximum est

$$\varrho_{max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0{,}3849\,..$$

et par suite on a pour le R correspondant

$$R_{max} = \frac{13{,}125}{\pi} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} = 1{,}608\,..$$

Ce rayon est évidemment porté par la demi-droite issue de l'origine et qui passe par le point (1, 1, 1) rapporté au système cartésien rectangulaire.

Les plans bissecteurs des trois dièdres Ox, Oy, Oz des demi-axes positifs passent par cette demi-droite, laquelle perce l'octant de la sphère unité au point qui est représenté sur la surface d'approximation par l'extrémité du R maximum. C'est donc en ce point de la surface d'approximation que l'erreur, par excès, soit 0,608.. du rayon vecteur est la plus considérable.

Il s'ensuit que le cône $\theta = \text{arc } tg \sqrt{2}$ coupe la surface aux points les plus éloignés de l'origine sur toutes les courbes φ.

Point de cote maximum. — Le cote z d'un point (ϱ, θ) quelconque de la courbe ϱ est évidemment

$$z = \varrho \cos\theta = \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

Puisque la somme des deux facteurs $\sin^2\theta$ et $\cos^2\theta$ est égale à 1, c'est-à-dire constante, la cote sera maximale pour $\sin\theta = \cos\theta$, soit pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. Le rayon R au point de cote maximale sera

$$R = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^2\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{4} = 1{,}47,$$

et la cote maximale sur la courbe R sera

$$Z = R \cos\frac{\pi}{4} = 1{,}044,$$

valeur qui est évidemment égale à la distance du point de cote maximale à l'axe z.

Le cône $\theta = \frac{\pi}{4}$ coupe la surface d'approximation aux points où les courbes φ ont leurs cotes maximales.

Les équations de la courbe gauche, lieu des points de cotes maximales sur les sections φ, sont donc en coordonnées sphériques,

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad r = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^2\theta \cos\theta \sin 2\varphi.$$

Conoïde. — Le lieu des tangentes aux points de cotes maximales des courbes φ forme un conoïde ayant pour plan directeur le plan xy, pour directrice rectiligne l'axe des z, et pour directrice curviligne le lieu des points de cotes maximales. Ce lieu peut donc être considéré, soit comme la source commune au conoïde et à la surface, soit comme l'intersection du cône $\theta = \frac{\pi}{4}$ et du conoïde, soit comme l'intersection de ce cône et de la surface.

Le conoïde est circonscrit à la surface le long de cette courbe. Donc le plan en un point de celle-ci qui est tangent à la surface l'est au conoïde et, passant donc par la tangente à la courbe φ correspondante, coupera le plan xy suivant une droite parallèle à cette tangente.

La cote maximale de la courbe $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ayant été désignée par Z, il résulte des relations d'homothétie développées plus haut que la cote maximale d'une courbe φ quelconque sera $z = Z \sin 2\varphi$, soit

$$z = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} \sin 2\varphi = \frac{13{,}125}{4\pi} \sin 2\varphi.$$

Cette formule est aussi l'équation du conoïde en coordonnées cylindriques.

Point d'éloignement maximum de l'axe des z. — Il s'agit ici de rendre maximum l'éloignement $e = \varrho \sin \theta$, soit

$$e = \sin^3 \theta \cos \theta$$

du point de la courbe $\varrho = \sin^2 \theta \cos \theta$. Or, on a

$$\frac{de}{d\theta} = \sin^2 \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

On aura donc $\left(\sqrt{3} = tg \frac{\pi}{3}\right)$

$$\frac{de}{d\theta} > 0 \text{ pour } 0 < \theta < \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{de}{d\theta} = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{de}{d\theta} < 0 \text{ pour } \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Donc e, partant de zéro, croît de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{3}$, atteint un maximum pour $\theta = \text{arc } tg \sqrt{3}$, enfin décroît au delà de arc $tg \sqrt{3}$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$ où il redevient nul.

Le rayon correspondant est

$$r = \frac{13{,}155}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{13{,}125}{\pi} \cdot \frac{3}{8} = 1{,}567.$$

La cote du point correspondant, très importante à connaître pour la construction de la surface, est

$$z = r \cos \frac{\pi}{3} = 0{,}783.$$

Enfin l'éloignement maximum sera

$$E = \frac{13{,}125}{\pi} \cdot \frac{3}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 1{,}357.$$

Remarque. — Aux points d'éloignement maximum de l'axe des z, la tangente à la courbe φ sur la surface ainsi que le plan tangent sont parallèles à l'axe des z.

Le cylindre

$$R = \frac{13{,}125}{\pi} \cdot \sin^3 \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \sin 2\varphi \equiv \frac{13{,}125}{\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{16} \sin 2\varphi,$$

dont la trace sur le plan xy est une rosace à quatre feuilles, est circonscrit à la surface tout le long de la courbe d'éloignement maximum de l'axe des z. Sa trace sur xy est donc le contour apparent horizontal de la surface.

§ 3. Courbe d'exactitude.

L'équation de la surface de la sphère est en coordonnées sphériques r, φ, θ.

$$r = 1. \tag{1}$$

C'est aussi, pour le premier octant, l'équation représentant *exactement* la fonction arbitraire proposée.

L'équation de la surface d'approximation est, d'autre part,

$$r = \frac{13{,}125}{\pi} \sin 2\varphi \sin^2 \theta \cos \theta. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) sont celles d'une courbe gauche qui est l'intersection de la sphère unité et de la surface d'approximation. Le long de cette courbe la fonction étudiée est toujours égale à $+1$ sur le premier octant; elle y est donc représentée exactement. Nous l'appellerons la *courbe d'exactitude.*

Si l'on suppose donnée la surface de la sphère unité, la courbe d'exactitude relative au premier octant aura simplement pour équation sur cette sphère

$$\frac{13{,}125}{\pi} \sin 2\varphi \sin^2 \theta \cos \theta = 1. \tag{3}$$

Il est important de construire cette courbe en déterminant un nombre suffisant de ses points et, en particulier, en fixant ses points extrêmes dans le sens des φ et dans celui des θ. A cet effet, nous étudierons ses intersections avec des méridiens φ et des parallèles θ de la sphère.

Si l'on y suppose φ constant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on aura une équation en $\cos \theta$ dont les racines correspondront aux intersections de la courbe d'intersection avec le méridien φ. Cette équation peut s'écrire

$$\cos^3 \theta - \cos \theta + \frac{\pi}{13{,}125 \sin 2\varphi} = 0.$$

On vérifie aisément qu'une racine $\cos\theta$ est inférieure à -1. Le produit des racines est $-\dfrac{\pi}{13{,}125\sin 2\varphi}$, soit négatif. Donc, si les trois racines sont réelles, la somme des racines devant être nulle, il y aura encore deux racines positives. D'ailleurs aucune n'est supérieure à 1. Il y aura donc alors deux racines positives comprises entre 0 et 1.

Ce sont les seules qui correspondent à un angle θ réel, et par suite, dans l'intervalle des valeurs de φ où les racines $\cos\theta$ sont réelles, chaque méridien φ coupe la courbe d'exactitude en deux points. Il n'y a qu'à exprimer que les trois racines sont réelles pour obtenir cet intervalle, ce qu'indique la condition, nécessaire et suffisante,

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{\pi^2}{26{,}25^2\sin^2 2\varphi}\leqq 0,$$

soit, puisque $\sin 2\varphi > 0$,

$$\sin 2\varphi \geqq \frac{3\sqrt{3}\pi}{26{,}25}.$$

Le cas de l'égalité signifie que le méridien φ correspondant rencontre la courbe d'exactitude en deux points confondus. Cette équation fournit deux valeurs supplémentaires pour 2φ et, par conséquent, deux valeurs pour φ équidistantes de $\frac{\pi}{4}$. Soient, φ_1 et φ_2 ces deux valeurs. Le calcul donne

$$\varphi_1 = 19^\circ 13' 35'',5, \qquad \varphi_2 = 70^\circ 46' 24'',5,$$

et l'on aura donc pour la courbe d'exactitude

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2.$$

Pour les valeurs φ_1 et φ_2, l'équation en $\cos\theta$ est

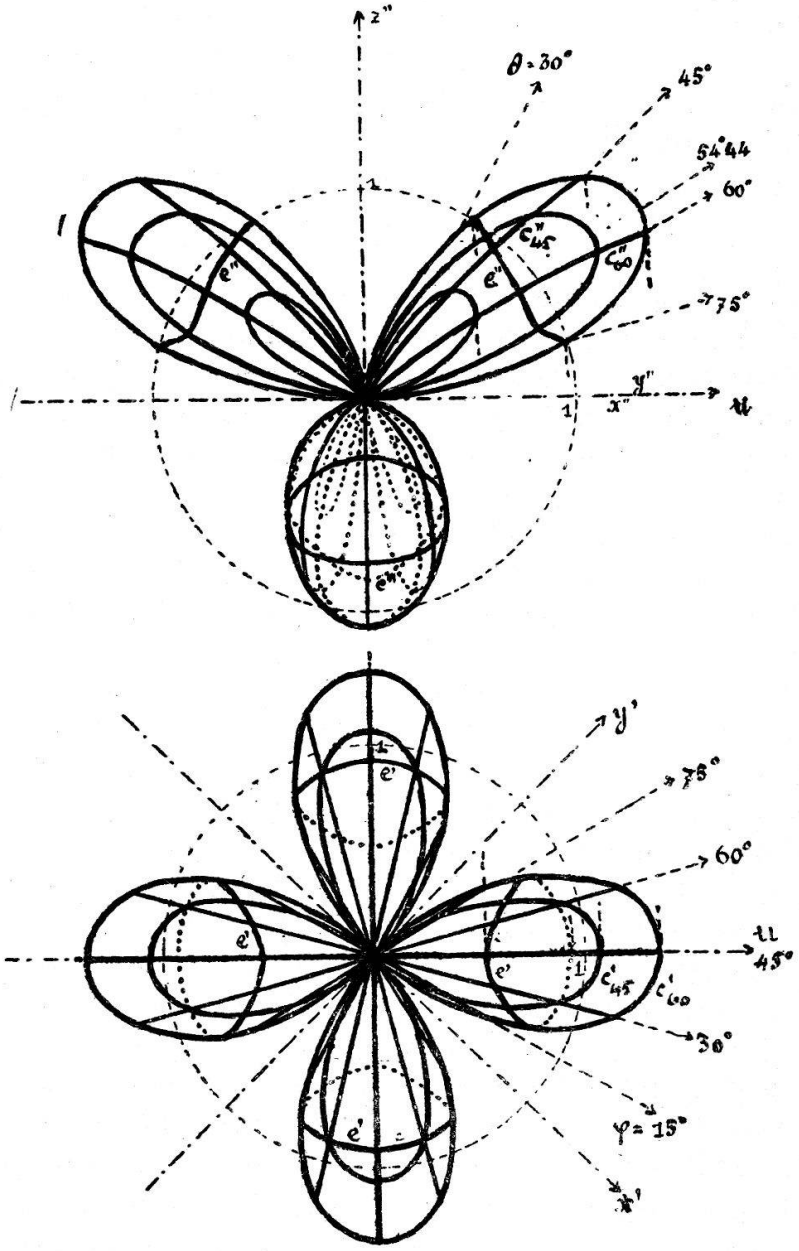
$$f(\theta) \equiv \cos^3\theta - \cos\theta + \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0.$$

Les deux racines égales sont aussi racines de l'équation

$$f(\theta) \equiv \sin\theta(1 - 3\cos^2\theta) = 0,$$

soit en supprimant le facteur $\sin\theta$ qui ne fournit évidemment aucune solution de $f(\theta) = 0$,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{d'où} \quad tg\,\theta = \sqrt{2}.$$



Projections de Monge

de la surface d'approximation $(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{26,25}{\pi}xyz=0$.

Plan horizontal de projection : xy.

Plan vertical de projection : bissecteur de $z(x, y)$.

Les deux projections sont écartées pour éviter le recouvrement.

Signe de terre : $u(u', u'')$, $u \equiv Y$. Axe $Z \equiv$ axe z. Axe X (non marqué) perpendiculaire à u'.

$e(e', e'')$: courbe d'exactitude. — $c_\theta(c'_\theta, c''_\theta)$: Cônes θ.

On reconnaît ainsi que les méridiens φ_1 et φ_2 de la sphère *touchent* la courbe d'exactitude aux points où les courbes φ_1 et φ_2 de la surface d'approximation ont leur rayon vecteur maximum.

Intersection avec les parallèles θ. — L'équation de la courbe d'exactitude peut s'écrire

$$\sin 2\varphi + \frac{\pi}{13{,}125 \sin^2 \theta \cos \theta} = 0.$$

Si l'on y suppose θ constant, les valeurs de φ qu'elle définira détermineront les points d'intersection de la courbe avec le parallèle θ correspondant. Le second membre étant positif, pour que ces points soient réels sur le premier octant de la sphère, il faut évidemment et il suffit que θ soit tel que

$$\frac{\pi}{13{,}125 \sin^2 \theta \cos \theta} \leqq 1.$$

Pour le cas de l'égalité, c'est-à-dire pour $\sin 2\varphi = 1$, soit $\varphi = \frac{\pi}{4}$, on a l'équation

$$\cos^3 \theta - \cos \theta + \frac{\pi}{13{,}125} = 0.$$

Une analyse, analogue à celle du paragraphe précédent, donne pour les deux seuls angles réels définis entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ par cette équation,

$$\theta_1 = 32^\circ 6' 48'',8, \qquad \theta_2 = 75^\circ 9' 25'',6.$$

Ce sont les équations des parallèles limites entre lesquels est comprise la courbe d'exactitude sur le premier octant. Ces parallèles sont tangents à celle-ci.

Remarque finale. — On peut remarquer que l'énoncé du problème ne fait jouer à l'axe z aucun rôle particulier. On pourrait opérer une permutation cyclique des trois axes x, y, z, de sorte que ce qu'on a dit de l'axe z, par rapport à x et y, sera vrai de l'axe x par rapport à y et z, et aussi de l'axe y par rapport à z et x.

TROISIÈME PARTIE

La surface d'approximation en coordonnées cartésiennes.

§ 1. Equation cartésienne de la surface.

L'équation, en coordonnées sphériques, étant

$$R = \frac{13{,}125}{\pi} \sin^2\theta \cos\theta \sin 2\varphi,$$

les formules de transformation,

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = R \cos\theta,$$

donneront

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \sin^2\theta = \frac{x^2+y^2}{R^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{R}, \quad \sin 2\varphi = \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

de sorte que l'équation pourra d'abord s'écrire

$$R = \frac{13{,}125}{\pi} \cdot \frac{x^2+y^2}{R^2} \cdot \frac{z}{R} \cdot \frac{2xy}{x^2+y^2},$$

soit évidemment

$$F(x, y, z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^2 - \frac{26{,}25}{\pi} x y z = 0. \tag{1}$$

Le produit xyz devant toujours être positif, il s'ensuit que *la surface d'approximation n'existera que dans les trièdres trirectangles qui contiennent les octants 1, 3, 6 et 8 de la sphère unité.*

Symétrie. — La fonction $F(x, y, z)$ est symétrique par rapport aux trois coordonnées x, y, z. Si donc on échange deux quelconques d'entre elles, l'équation reste satisfaite. Cela signifie évidemment que la *surface d'approximation est symétrique par rapport aux trois plans bissecteurs des dièdres rectangles dont les arêtes sont les axes x, y, z.*

Plan tangent. — L'équation du plan tangent au point $P(x, y, z)$ de la surface étant

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

on peut écrire

$$F=(R^2)^2-\frac{26,25}{\pi}xyz,$$

avec

$$R^2=x^2+y^2+z^2.$$

On aura donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4R^2x-\frac{26,25}{\pi}yz=R^2\left(4x-\frac{R^2}{x}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=4R^2y-\frac{26,25}{\pi}zx=R^2\left(4y-\frac{R^2}{y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=4R^2z-\frac{26,25}{\pi}xy=R^2\left(4z-\frac{R^2}{z}\right).$$

Donc l'équation du plan tangent deviendra

$$(X-x)\left(4x-\frac{R^2}{x}\right)+(Y-y)\left(4y-\frac{R^2}{y}\right)+(Z-z)\left(4z-\frac{R^2}{z}\right)=0.$$

On peut encore l'écrire

$$4(Xx+Yy+Zz)-R^2\left(\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}\right)-R^2=0,$$

ou

$$X\left(4x-\frac{R^2}{x}\right)+Y\left(4y-\frac{R^2}{y}\right)+Z\left(4z-\frac{R^2}{z}\right)-R^2=0,$$

où l'on fera toujours $R^2=x^2+y^2+z^2$.

§ 2. Courbe d'exactitude et angle d'approximation.

Courbe d'exactitude. — Cette courbe est l'intersection de la sphère unité et de la surface d'approximation. Ses équations sont donc

$$(x^2+y^2+z^2)^2-\frac{26,25}{\pi}xyz=0,\qquad x^2+y^2+z^2=1,$$

soit, évidemment,

$$xyz=\frac{\pi}{26,25},\qquad x^2+y^2+z^2=1.$$

Tout le long de cette courbe, on a $R=1$, et par suite,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x-\frac{1}{x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=4y-\frac{1}{y},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=4z-\frac{1}{z}.$$

Dès lors, le plan tangent à la surface d'approximation, en un point P (x, y, z) de la courbe d'exactitude, aura pour équation

$$(X-x)\left(4x-\frac{1}{x}\right)+(Y-y)\left(4y-\frac{1}{y}\right)+(Z-z)\left(4z-\frac{1}{z}\right)0,$$

ou

$$4(Xx+Yy+Zz)-\left(\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}+\frac{Z}{z}\right)-1=0.$$

Angle d'approximation. — J'appelle *angle d'approximation en un point de la courbe d'exactitude*, l'angle α sous lequel, en ce point, la surface d'approximation coupe la sphère unité, celle-ci étant la surface exacte. Il est intéressant de connaître cet angle qui exprimera la loi suivant laquelle la surface d'approximation différera de la surface exacte le long de la courbe.

Or, cet angle étant celui des normales aux deux surfaces, est déterminé par la formule

$$\cos\alpha=\frac{x\left(4x-\frac{1}{x}\right)+y\left(4y-\frac{1}{y}\right)+z\left(4z-\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left[\left(4x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(4y-\frac{1}{y}\right)^2+\left(4z-\frac{1}{z}\right)^2\right]}},$$

c'est-à-dire, puisque $x^2+y^2+z^2=1$,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-8}}.$$

Cherchons entre quelles limites varie l'angle α, et quelles sont les coordonnées des points qui correspondent à ces limites.

Les simples relations de symétrie déjà énoncées font voir immédiatement que les points de la courbe d'exactitude situés sur les bissecteurs des dièdres x, y, z correspondent à des extrêmes de l'angle α. Mais n'en existe-t-il pas d'autres?

Or, les maxima et minima de l'angle α correspondent respectivement aux minima et maxima de $\cos\alpha$, c'est-à-dire aux maxima et minima de la fonction

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}, \tag{1}$$

le long de la courbe d'exactitude

$$x^2+y^2+z^2=1, \tag{2}$$

$$xyz-\frac{\pi}{26{,}25}=0. \tag{3}$$

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de cette courbe sont des fonctions d'un seul paramètre qui peut être une des trois coordonnées et qu'il n'est d'ailleurs pas nécessaire de spécifier. Mais pour les valeurs de ces coordonnées qui rendent $f(x, y, z)$ extrême, on doit avoir $df = 0$, soit

$$\frac{1}{x^3}dx + \frac{1}{y^3}dy + \frac{1}{z^3}dz = 0 \tag{4}$$

les différentielles dx, dy, dz devant satisfaire aux deux équations de la courbe, c'est-à-dire être telles que

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \tag{5}$$

$$yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz = 0. \tag{6}$$

L'élimination des trois différentielles entre ces trois équations donnera

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x^3} & \frac{1}{y^3} & \frac{1}{z^3} \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Les équations (2), (3) et (7) permettent de trouver les valeurs de x, y, z qui peuvent rendre $f(x, y, z)$ extrême.

Or, en vertu de (3), l'équation (7) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x^3} & \frac{1}{y^3} & \frac{1}{z^3} \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions les éléments des trois colonnes respectivement par x^3, y^3, z^3. Cette opération n'introduit aucune solution étrangère, ni ne supprime aucune solution existante, car aucune des coordonnées x, y, z n'est nulle sur la courbe d'exactitude. On a alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^4 & y^4 & z^4 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qu'on peut évidemment écrire en changeant les signes

$$(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)(x^2 - y^2) = 0.$$

Les maxima et minima cherchés sur la courbe d'exactitude correspondront donc aux points de celle-ci où l'on a alternativement (et non simultanément, ce qui est impossible):

$$y^2 - z^2 = 0, \qquad z^2 - x^2 = 0, \qquad x^2 - y^2 = 0. \tag{8}$$

Ce sont les équations des paires de plans bissecteurs des dièdres x, y, z respectivement. Par là on voit qu'il n'y a pas d'autres extrêmes que ceux que l'on pouvait découvrir, à la qualité près, à l'aide des simples relations de symétrie géométrique.

En nous bornant au premier octant, pour lequel les x, y, z sont tous positifs, nous pourrons écrire ces relations indépendantes

$$y = z, \qquad z = x, \qquad x = y. \tag{9}$$

Les équations de la surface d'approximation, de la sphère unité et de la courbe d'exactitude étant symétriques par rapport à x, y, z il suffira d'étudier la solution $x = y$. Alors les équations (2) et (3) donnent

$$2x^2 = 1 - z^2, \qquad x^2 = \frac{\pi}{26{,}25\, z},$$

d'où

$$z^3 - z + \frac{\pi}{13{,}25} = 0. \tag{10}$$

C'est l'équation qui donnera les valeurs de z correspondant aux points où l'angle α d'approximation sera extrême sur le plan bissecteur $x = y$. Or, sur la sphère, on a toujours $z = \cos\theta$. Dès lors, cette équation a déjà été étudiée et l'on a trouvé pour ses deux racines positives et inférieures à 1,

$$z_1 = \cos\theta_1, \qquad z_2 = \cos\theta_2,$$

où

$$\theta_1 = 32^\circ 6' 48'',8, \qquad \theta_2 = 75^\circ 9' 25'',6.$$

Pour décider laquelle des deux valeurs de z fournira un maximum ou un minimum pour la fonction $f(x, y, z)$, remarquons que, tout le long de la courbe d'exactitude, on a

$$f(x, y, z) \equiv \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} + \frac{1}{z^2} = (1 - z^2)\, z^2 \left(\frac{26{,}25}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{z^2}.$$

La fonction à rendre extrême devient donc

$$F(z) = \left(\frac{26{,}25}{\pi}\right)^2 (z^2 - z^4) + \frac{1}{z^2}.$$

D'ailleurs, il s'agit ici d'extrêmes absolus, de sorte que le plus petit sera le minimum et le plus grand le maximum. Or, $\cos\theta_1$ est

peu inférieur à $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta_2$ est peu supérieur à $\frac{1}{4}$, et $\left(\frac{26,25}{\pi}\right)^2$ est peu différent de 67. On vérifie alors aisément que $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < F\left(\frac{1}{4}\right)$. Les calculs faits avec les valeurs exactes z_1 et z_2 montrent qu'on a, en effet, $F(z_1) < F(z_2)$.

Ce qui a été dit des z se dira *mutatis mutandis* des x et des y.

Conclusion. — *Le long de la courbe d'exactitude, l'angle d'approximation présente six extrêmes, tous aux points situés sur les plans bissecteurs des dièdres x, y, z, à savoir, trois minima aux points A, B, C les plus rapprochés des trois axes x, y, z, et trois maxima aux points A' B' C' les plus rapprochés des plans yz, zx et xy.*

§ 3. Représentation de la surface en projections de Monge.

Le plan xy étant horizontal, si l'on prenait le plan yz pour plan vertical de projections, les deux projections de la surface auraient comme contours apparents des rosaces à quatre feuilles. La représentation devient plus intéressante lorsque, conservant l'axe z et le plan xy, on fait tourner le trièdre autour de z d'un angle $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, de manière que les anciens axes x et y seront les bissecteurs des angles des nouveaux axes X et Y. A cet effet, il suffit évidemment de faire

$$x = (X + Y)\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y = -(X - Y)\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad z = Z.$$

L'équation de la surface devient

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 + \frac{13,125}{\pi}(X^2 - Y^2)Z = 0.$$

Alors, le *contour apparent horizontal* est une rosace à quatre feuilles, comme on l'a vu dans la première partie.

Pour reconnaître la nature du *contour apparent vertical*, remarquons qu'il est le lieu de la trace, sur le plan YZ, d'une droite de bout tangente à la surface. Or, une telle droite, passant par le point (Y, Z) du nouveau plan vertical, a des coordonnées courantes ξ, η, ζ, telles que ξ est variable, $\eta = Y$, $\zeta = Z$.

Pour ses points d'intersection avec la surface, on a

$$(\xi^2 + Y^2 + Z^2)^2 + \frac{13,125}{\pi}(\xi^2 - Y^2)Z = 0,$$

soit, évidemment,

$$\xi^4+2\left(Y^2+Z^2+\frac{13,125}{2\pi}Z\right)\xi^2+(Y^2+Z^2)^2-\frac{13,125}{\pi}Y^2Z=0.$$

C'est une équation bicarrée en ξ. A chaque couple de valeurs réelles de Y et Z correspondent donc quatre points communs à la droite de bout et à la surface. Ces points sont deux à deux réels ou imaginaires, distincts ou confondus, mais symétriques par rapport au plan vertical $X=0$. Ils ne peuvent d'ailleurs être réels que pour $\xi^2=0$ ou $\xi^2>0$.

1° $\xi^2=0$. Les deux points correspondants sont donc confondus en un seul sur le plan YZ. La droite de bout est tangente à la surface en ce point. La condition, nécessaire et suffisante pour que ce cas soit réalisé, est qu'on ait

$$(Y^2+Z^2)^2-\frac{13,125}{\pi}Y^2Z=0,$$

avec, nécessairement, $Z>0$. C'est l'équation du contour apparent vertical au-dessus de la ligne de terre $u\equiv Y$. Il est aisé de voir que l'équation ci-dessus étant satisfaite pour $Z>0$, les deux autres points d'intersection de la droite de bout avec la surface sont imaginaires conjugués.

Conclusion. — *Le demi-plan vertical $X=0$ supérieur $(Z>0)$ coupe la surface suivant la partie du contour apparent vertical situé au-dessus de la ligne de terre.*

2° $\xi^2>0$. Les racines étant réelles, la droite de bout ne pourra être tangente qu'à la condition que deux points d'intersection situés d'un même côté du plan vertical soient venus se confondre. Alors les deux autres points, symétriques de ceux-là, seront aussi confondus. La droite sera bitangente. En d'autres termes, chaque valeur de ξ^2 définissant un même couple de points symétriques par rapport au plan vertical, les deux couples devront être représentés par deux valeurs égales de ξ^2. La condition, nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, est que le réalisant de l'équation du deuxième degré par rapport à ξ^2 soit nul, c'est-à-dire qu'on ait

$$(Y^2+Z^2)^2+\frac{13,125}{\pi}Z(Y^2+Z^2)+\left(\frac{13,125}{2\pi}\right)^2Z^2$$
$$-(Y^2+Z^2)+\frac{13,125}{\pi}Y^2Z=0.$$

En réduisant et supprimant la solution $Z=0$ qui ne peut évidemment convenir qu'au seul point singulier qui est l'origine des coordonnées, on obtiendra l'équation

$$2Y^2 + Z^2 + \frac{13,125}{4\pi} Z = 0.$$

Elle représente une ellipse qui ne peut être réelle que pour $Z < 0$, c'est-à-dire sur le demi-plan vertical inférieur.

On pourra écrire cette équation

$$\frac{\left(Z + \frac{13,125}{8\pi}\right)^2}{\left(\frac{13,125}{8\pi}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{13,125}{8\sqrt{2}\pi}\right)^2} = 1.$$

On obtient donc ce résultat remarquable : *le contour apparent vertical au-dessus de la ligne de terre est une ellipse, tangente à la ligne de terre à l'origine et dont le demi-petit axe* $\frac{13,125}{8\sqrt{2}\pi}$, *parallèle à la ligne de terre, est au demi-grand axe* $\frac{13,125}{8\pi}$, *comme le côté d'un carré est à sa diagonale.*

Manuscrit reçu le 22 avril 1932.
Dernières épreuves corrigées le 19 mars 1933.