Comment tenir compte de la masse du ressort dans quelques cas simples d'équilibre et de mouvement?

Comment tenir compte de la masse du ressort dans quelques cas simples d'équilibre et de mouvement ?

PAR

S. GAGNEBIN

Professeur au Gymnase cantonal

(AVEC 6 FIGURES)

INTRODUCTION

La théorie classique de l'élasticité, grâce à la forme analytique à laquelle elle a pu parvenir dans la première moitié du 19[me] siècle, reste d'une grande importance dans l'étude de la physique. Elle traite des deux problèmes suivants : 1° Connaissant les déformations d'un corps solide, déterminées en fonction des coordonnées de ses points, calculer les tensions intérieures et les forces appliquées à la surface. 2° Connaissant les forces extérieures appliquées à un corps solide, calculer les déformations et les tensions intérieures. Pour résoudre l'un ou l'autre de ces problèmes, il faut connaître deux coefficients caractéristiques du corps, si celui-ci est isotrope ; s'il est anisotrope, au plus 36. Les deux paramètres choisis par G. Lamé, l'un des principaux créateurs de la théorie, sont désignés par les lettres grecques λ et μ, et l'on définit sous le nom de *module de Poisson* la quantité $\sigma = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ dont il est question à la fin de cette étude.

Les deux problèmes mentionnés n'ont pas une importance équivalente. Le second, qui se présente constamment dans la pratique, est incomparablement plus difficile à résoudre que le premier. Il suppose généralement une étude expérimentale approfondie qui permet, grâce à des hypothèses, d'exprimer les déformations en fonction des coordonnées ; on est alors ramené au premier problème. Jusqu'à présent le second problème n'est résolu que dans un nombre restreint de cas simples.

Dans le cas où la théorie de l'élasticité ne peut s'appliquer, le physicien ne se tient pas pour battu. Il renonce sans doute à résoudre complètement les problèmes énoncés, mais, en généralisant certains résultats de la théorie rigoureuse et en faisant certaines hypothèses simplificatrices, il parvient à des solutions approximatives, parfois tout à fait suffisantes étant donnée la précision des expériences. L'ensemble des méthodes appliquées dans ces cas est désigné sous le nom de Résistance des matériaux. Ces méthodes sont seules applicables au problème de l'équilibre des ressorts à boudin.

Un effet de la torsion du fil formant le ressort.

Supposons un ressort spiral cylindrique suspendu verticalement. Nous utilisons pour cela un simple fil ciré attaché à deux points diamétralement opposés de la spire supérieure, fil glissant sur une tige horizontale[1]. Par un moyen analogue, nous suspendons un poids à la spire inférieure. De cette façon, une force F est appliquée au ressort suivant son axe vertical. La fig. I permet de conclure qu'en un point A du ressort sont appliqués une force F' égale, parallèle à la force F, de même sens qu'elle, et un couple dont le moment est le produit de la distance a du point A à l'axe du ressort, et de la force F.

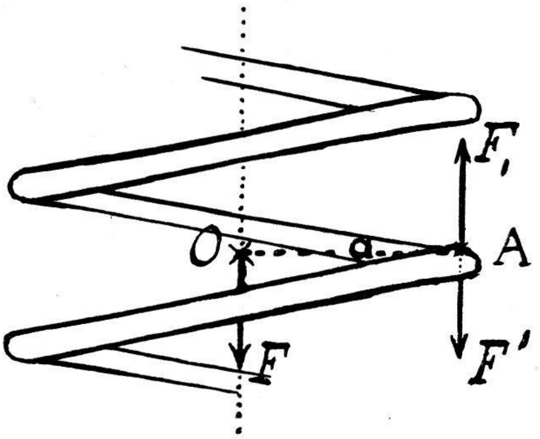


Fig. I.

La force F' est appelée effort tranchant et on en néglige les effets, petits par rapport aux autres, lorsqu'on ne soumet pas le ressort à des forces trop grandes. On réduit ainsi le problème à l'étude des déformations d'une hélice, lieu des centres des sections droites du fil métallique qui forme le ressort. A sera un point de cette hélice. Le couple de moment aF se décompose : 1° en un couple d'axe tangent à l'hélice $Fa \sin \vartheta$ qui tord la tige et, 2° en un couple $Fa \cos \vartheta$ dont l'axe est dirigé suivant la binormale et qui imprime à la tige une flexion dans le plan osculateur de l'hélice en A. Ce couple, dit fléchissant, est d'autant plus petit que la tangente à l'hélice fait, avec la verticale, un angle ϑ plus voisin de 90°, autrement dit qu'elle est plus près d'être horizontale.

[1] Sur la suspension des ressorts voir : G. BROULHIET, *La technique des ressorts à boudin travaillant à la tension,* dans « Produire », p. 66.

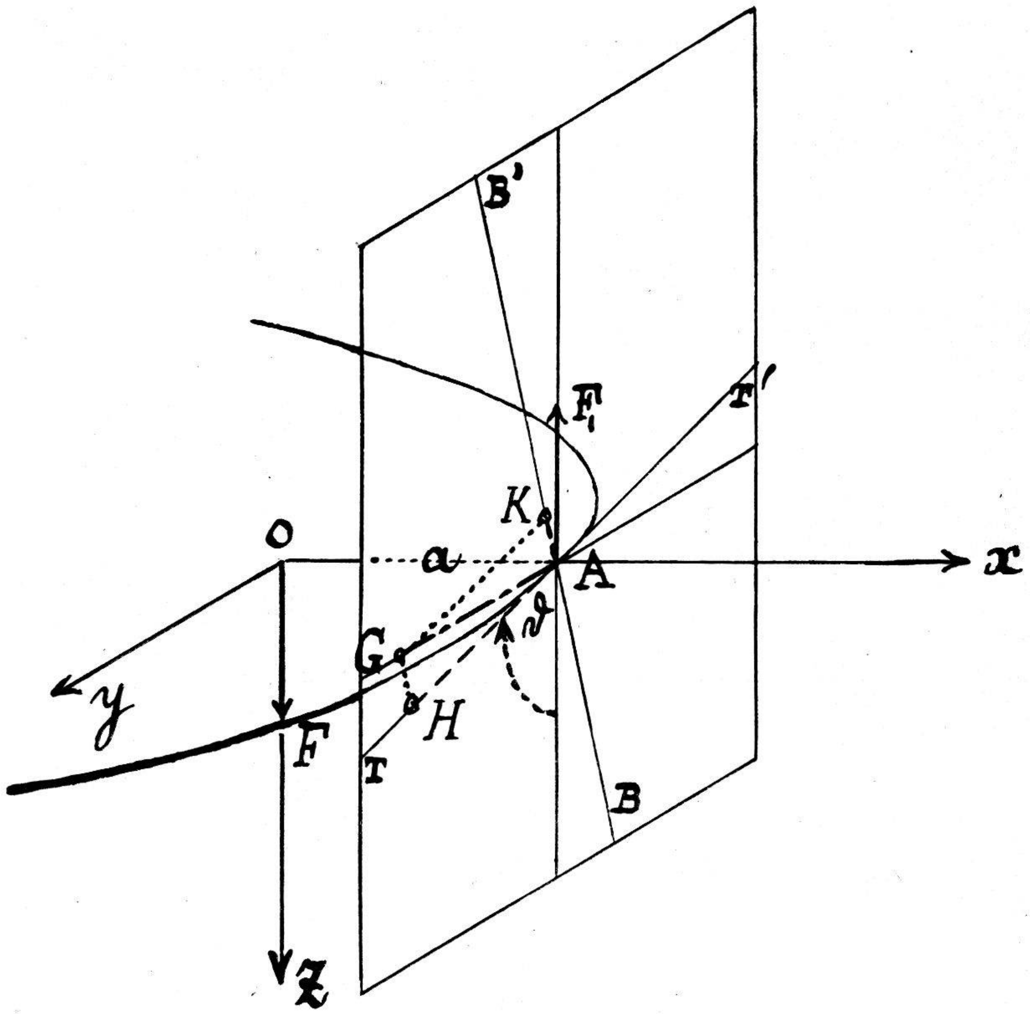
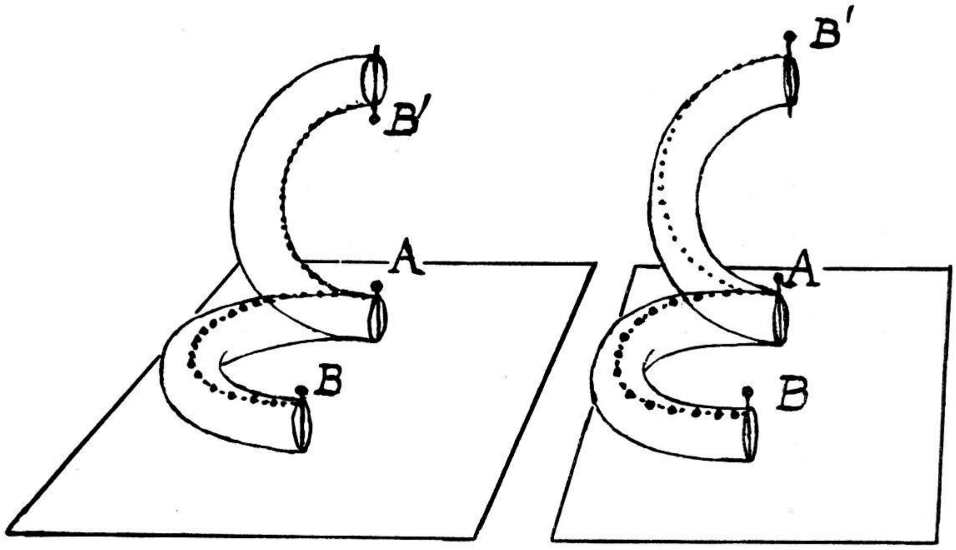


Fig. II.

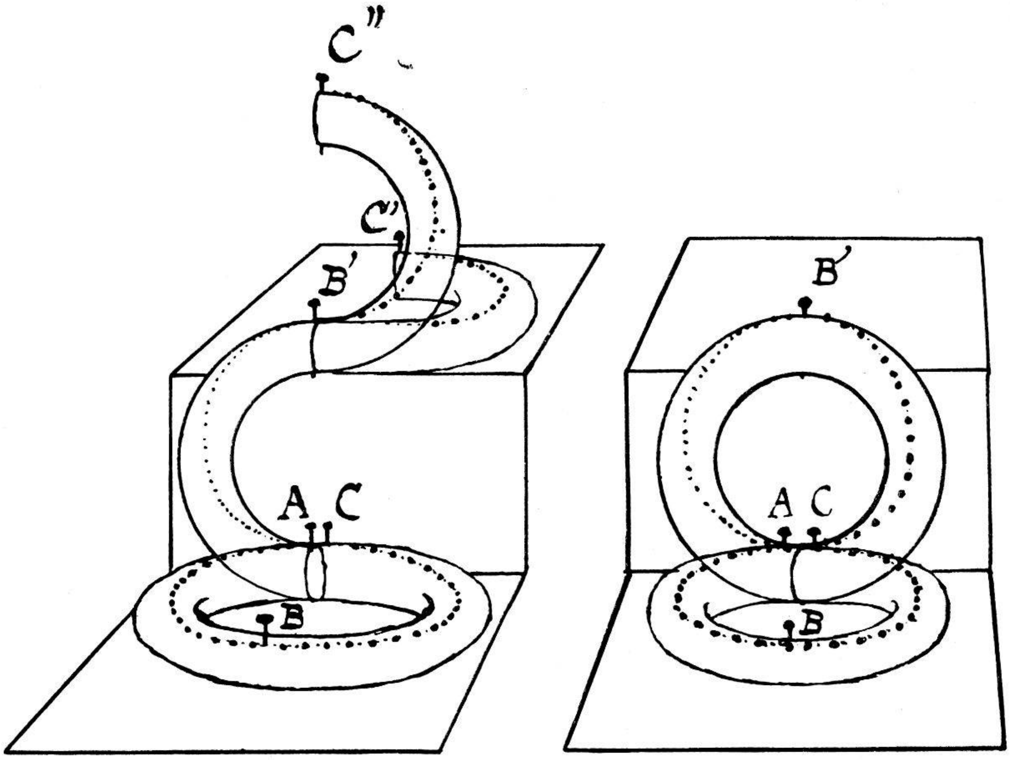
$AG = aF$ $\quad AH = Fa \sin \vartheta$ $\quad AK = Fa \cos \vartheta$

Nous allons faire voir que l'écartement des spires est dû au premier de ces couples, c'est-à-dire à la torsion du fil. La fig. III *a* montre que, si l'on relève une demi-spire d'un plan horizontal dans un plan vertical, en maintenant plane l'une des génératrices *AB*, l'épingle *B* tourne de 180° en *B'*. La fig. III *b* montre que si l'on maintient cette épingle parallèle à sa direction primitive *B*, la génératrice *AB* devient une courbe gauche *AB'* et que, en conséquence, la surface canal que forme la tige a subi une torsion totale de 180°. La fig. IV*a* montre comment, pour relever dans un plan vertical une spire complète, on peut procéder par étapes en relevant d'abord une demi-spire, puis l'autre moitié, de sorte que la torsion totale de la spire entière est 360°, quand on a maintenu les épingles *B* et *C* dans leur direction primitive. Enfin, la fig. IV *b* montre que, par une simple flexion, et par conséquent sans nouvelle torsion de la surface, on peut amener l'épingle *C''* en *C* dans sa position initiale. Il résulte de l'examen de ces figures que si l'on fait exécuter à la spire entière une rotation de 90°, de manière à amener la spire d'un plan horizontal à un plan vertical, en maintenant fixe les épingles *A* et *C*, la torsion totale du fil est de 360°, soit 2π.



a *b*

Fig. III.



a *b*

Fig. IV.

Si, au lieu d'amener la spire dans le plan vertical, on l'amenait dans un plan faisant un angle ϑ avec celui-ci, la torsion totale de la spire serait $2\pi \cos \vartheta$. Enfin, si l'on divise cette torsion totale par la longueur de la spire placée dans le plan d'angle ϑ, et qui est $\frac{2\pi a}{\sin\vartheta}$, on aura la torsion moyenne, qui se confond dans notre cas avec la torsion en un point, $2\pi\cos\vartheta\cdot\frac{\sin\vartheta}{2\pi a}=\frac{\cos\vartheta\cdot\sin\vartheta}{a}$.

Or, cette expression représente précisément la torsion géométrique, ou seconde courbure de l'hélice dont la tangente fait un angle ϑ avec la verticale. La torsion physique de la surface que forme le fil du ressort est donc égale à la seconde courbure, ou torsion géométrique, de l'hélice.

De là, on peut conclure que les variations de l'angle ϑ sont fonction du couple de torsion de moment $Fa\sin\vartheta$. D'ailleurs, le pas de l'hélice est donné par l'expression $2\pi a$ cotang ϑ; donc nous avons établi que le pas de l'hélice, à savoir l'écartement des spires, est dû à la torsion du fil dont est fait le ressort. Un petit appareil, très simple et ingénieux, décrit dans plusieurs ouvrages, en particulier dans la *Mécanique appliquée* de John Perry (trad. Davaux), permet de vérifier expérimentalement cette conclusion. Je l'ai présenté, avec d'autres expériences sur les ressorts, à la Société neuchâteloise des sciences naturelles (séance du 29 janvier 1932).

Variations du rayon du cylindre sur lequel s'enroule l'hélice.

La théorie de la résistance des matériaux admet qu'un couple fléchissant a pour effet une variation de courbure, proportionnelle, dans le plan du couple. La courbure de l'hélice en un de ses points a pour expression $\frac{\sin^2\vartheta}{a}$ et l'on peut calculer l'effet du couple C appliqué dans le plan osculateur de l'hélice.

$$C=B\cdot d\left(\frac{\sin^2\vartheta}{a}\right)$$

où B est une constante égale au produit du moment d'inertie de la section droite du fil du ressort par rapport à un diamètre contenu dans le plan osculateur, et du module d'Young, E, relatif au fil utilisé.

D'autre part, si l'on fait le développement de l'hélice sur un plan parallèle à l'axe du cylindre (voir fig. V), on a facilement la relation suivante :

$$\sin\vartheta=\frac{a\varphi}{l}$$

où l est la longueur du fil, a le rayon du cylindre, φ l'angle total des spires, de telle sorte qu'on a la relation $\varphi = 2\pi n$, où n est le nombre (entier ou fractionnaire) des spires.

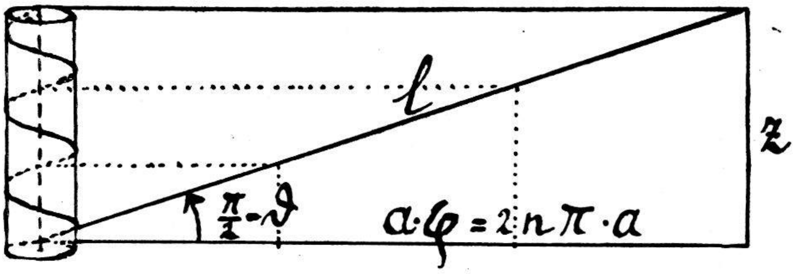


Fig. V.

On tire de là : $$C = B \cdot d\left(a \cdot \frac{\varphi^2}{l^2}\right)$$

et, en remarquant que da et $d\varphi$ sont de signes contraires,

$$da = -\frac{l \sin\vartheta}{\varphi^2}\, d\varphi,$$

on peut écrire :

$$C = B\left(-\frac{\sin^2\vartheta}{a^2}\, da + 2\frac{\sin\vartheta}{l} \cdot d\varphi\right)\cdot$$

Il résulte de cette équation que l'application d'un couple de forces dans le plan osculateur de l'hélice donne lieu à une diminution du rayon a du cylindre sur lequel est enroulée l'hélice, diminution qui est proportionnelle au couple de forces et au carré du rayon a du cylindre. Cette variation augmente quand l'angle ϑ diminue, c'est-à-dire quand la tangente à l'hélice s'éloigne de l'horizontale.

L'application du même couple donne encore lieu à une augmentation du nombre des spires de l'hélice qui est proportionnelle à la longueur du fil formant le ressort.

En utilisant la relation qui existe dans une hélice entre la longueur l du fil, celle z du ressort, le rayon a du cylindre et l'angle φ donnant le nombre de spires, à savoir la relation :

$$a^2\varphi^2 = l^2 - z^2$$

on peut calculer la variation du rayon du cylindre en fonction de l'allongement dz du ressort et de l'augmentation dn du nombre des spires :

$$da = -\frac{az}{l^2 - z^2}\, dz - \frac{a}{n}\, dn.$$

La quantité $-\frac{\partial a}{\partial z} = \frac{az}{l^2 - z^2}$ peut se représenter par la courbe de la fig. VI. Pour obtenir cette courbe, on a fait : $a = 1$, $l = 8$. On voit que la variation du rayon du cylindre est très faible même pour des allongements du ressort considérables. Le rayon diminue, au contraire, très rapidement quand la longueur du ressort devient comparable à la longueur du fil.

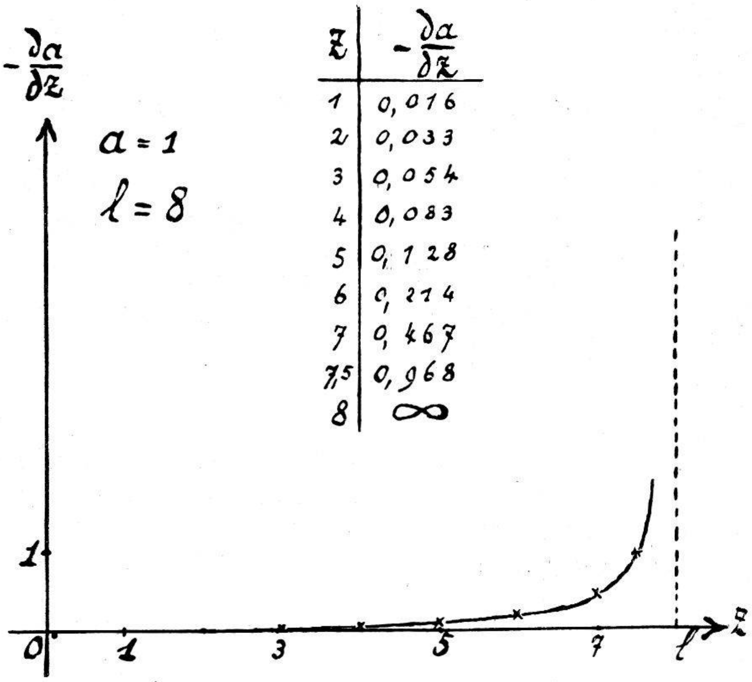


Fig. VI.

Equations d'équilibre.

On les obtient en faisant la somme des énergies de torsion et de flexion. Nous désignerons par ϱ le rayon de courbure de l'hélice en un de ses points, et par τ le rayon de seconde courbure.

L'énergie de torsion a pour expression :

$$\frac{A}{2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau_0}\right)^2 l = \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{l^3}(\varphi z - \varphi_0 z_0)^2$$

L'énergie de flexion a pour expression :

$$\frac{B}{2}\left(\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)^2 l = \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{l^3}\left(\varphi\sqrt{l^2-z^2}-\varphi_0\sqrt{l^2-z_0^2}\right)^2$$

où B a la signification qui lui a été donnée à la page 111 et A désigne une constante, produit du moment d'inertie de la section droite du fil par rapport au centre de cette section, par la constante μ ; z_0 *et* φ_0 désignent la longueur du ressort et l'angle proportionnel au nombre des spires quand le ressort est dans sa position d'équilibre initiale. La somme de ces énergies reste constante si l'on laisse librement osciller le ressort et qu'on fasse abstraction des amortissements. C'est ce que met en évidence l'expérience de Wilberforce (1894). On suspend au ressort une masse dont le moment d'inertie par rapport à l'axe du ressort est réglable, on peut alors constater l'échange des énergies de torsion et de flexion. Pour une valeur calculable du moment d'inertie, l'une des énergies devient nulle lorsque l'autre est à son maximum.

L'énergie totale est égale au travail accompli par le poids suspendu, lorsqu'on déplace celui-ci d'une hauteur $z - z_0$, soit $\int_{z_0}^{z} F\,dz$.

Ainsi la dérivée partielle, par rapport à z, de l'énergie totale sera égale au poids F. C'est ainsi qu'on obtient l'équation de l'équilibre du ressort sous le poids F :

$$(1)\quad F = \frac{A}{l^3}(\varphi z - \varphi_0 z_0)\varphi - \frac{B}{l^3}\left(\varphi\sqrt{l^2 - z^2} - \varphi_0\sqrt{l^2 - z_0^2}\right)\frac{\varphi z}{\sqrt{l^2 - z^2}}.$$

Si c'est un couple de forces de moment N qu'on applique à l'extrémité du ressort et dans un plan perpendiculaire à l'axe, l'énergie sera égale au travail de ce couple tournant d'un angle $\varphi - \varphi_0$ à partir de la position d'équilibre φ_0. En dérivant par rapport à φ, on obtient l'équation :

$$(2)\quad N = \frac{B}{l^3}\left(\varphi\sqrt{l^2 - z^2} - \varphi_0\sqrt{l^2 - z_0^2}\right)\sqrt{l^2 - z^2} + \frac{A}{l^3}(\varphi z - \varphi_0 z_0)z.$$

Les déterminations des constantes A et B des ressorts se font au moyen de petites oscillations autour d'une position définie, la masse suspendue au ressort ayant un grand moment d'inertie par rapport à l'axe de celui-ci.

L'angle ϑ variant au voisinage de 90°, $\sin\vartheta = \frac{a\varphi}{l}$ varie très peu, $\cos\vartheta = \frac{z}{l}$ varie beaucoup, au contraire ; on écrira donc l'équation (1) en fonction de z :

$$(3)\quad F = \frac{A\sin^2\vartheta}{a^2 l}\left(z - \frac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta}z_0\right) - \frac{B}{a^2 l}(\sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0)\,z.$$

Si l'oscillation est assez petite pour qu'on puisse écrire $\vartheta = \vartheta_0$, on a simplement :

$$(4)\quad F = \frac{A\sin^2\vartheta_0}{a^2 l}(z - z_0)$$

et l'on voit qu'alors la force F est proportionnelle à l'allongement $z - z_0$.

Si l'oscillation est une torsion se produisant dans un plan perpendiculaire à l'axe, on a $z = z_0$ et l'équation (2) s'écrit :

$$(5)\quad N = \frac{B\sin^2\vartheta_0 + A\cos^2\vartheta_0}{l}(\varphi - \varphi_0)$$

ainsi le couple est proportionnel à l'angle de déviation.

Ces équations ont été données par Thomson et Tait : *Natural Philosophy*, vol. I, part II, p. 141. Dans l'exposé qui précède, je me suis principalement inspiré des ouvrages de H. Bouasse : *Mécanique physique*, 1912, *Résistance des matériaux*, 2me édition, 1931. Voir aussi : A. Boulanger, *Les principes de la mécanique des ressorts*, 1927.

Allongement d'un ressort spiral cylindrique sous son propre poids.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte du poids du ressort. Pour en calculer l'effet sur la longueur du ressort dans l'état d'équilibre, nous nous placerons dans des conditions particulièrement simples. Nous admettrons que ce poids est faible par rapport à la force appliquée à son extrémité, de sorte que l'allongement qui en résulte est proportionnel au poids. En d'autres termes, nous nous bornerons à appliquer la plus simple des équations qui précèdent (4) et nous désignerons par k le module d'allongement défini par l'équation :

$$k = \frac{A \sin^2 \vartheta}{a^2 l} \tag{6}$$

Pour des ressorts de même rayon a, de même pas, de même fil, k est inversement proportionnel à la hauteur z_0 du ressort, puisque z_0 est alors proportionnel à la longueur l du fil qui figure au dénominateur de l'expression qui définit k.

Considérons des tranches horizontales de même hauteur infiniment petites dz ; la constante d'allongement est, pour chacune d'elles, $k \dfrac{z_0}{dz}$ et, par conséquent, la variation de longueur d'une de ces tranches sous un poids δP est :

$$\delta dz = \frac{1}{k} \cdot \frac{dz}{z_0} \cdot \delta P.$$

δP varie avec la cote z de la tranche considérée : pour $z = z_0$, c'est-à-dire au bas du ressort, $\delta P = 0$; pour la plus haute tranche, $z = 0$, $\delta P = P$, le poids total du ressort. On aura pour une tranche de cote z :

$$\delta P = \frac{P}{z_0}(z_0 - z)$$

d'où :

$$\delta dz = \frac{1}{k} \cdot \frac{dz}{z_0} \cdot \frac{P}{z_0}(z_0 - z) = \frac{P}{k} \cdot \frac{z_0 - z}{z_0^2}\, dz \tag{7}$$

Pour l'allongement total, δz_0, nous aurons donc :

$$\delta z_0 = \int_0^{z_0} \frac{P}{k} \cdot \frac{z_0 - z}{z_0^2}\, dz = \frac{1}{k} \cdot \frac{P}{2}.$$

Ainsi l'allongement d'un ressort sous son propre poids est la moitié de l'allongement que produirait un poids égal à celui du ressort suspendu à l'extrémité de celui-ci.

Masse entraînée dans le mouvement d'oscillation vertical d'un ressort à boudin.

Considérons un ressort à boudin suspendu verticalement et à l'état d'équilibre sous l'effet d'un poids P_0 dont nous désignons la masse par m. Si nous communiquons à ce ressort un mouvement dans le sens vertical et que nous abandonnions ensuite le système au jeu des forces élastiques, le mouvement qui en résulte n'est généralement pas simple. Cependant, l'expérience montre que, parfois, le ressort vibre tout d'une pièce, de sorte que chacun de ses points est animé d'un mouvement sinusoïdal simple, vertical. Il faut pour cela, tout d'abord, que le moment d'inertie du système, par rapport à l'axe du ressort, soit grand; il faut que les oscillations soient d'amplitude petite; il faut enfin que les ondes de choc qui apparaissent au moment où on abandonne le ressort à lui-même, et qui donnent lieu à des battements compliqués, soient amorties d'une façon ou d'une autre.

Admettons qu'il en soit ainsi et que le ressort soit parfaitement homogène dans toute sa longueur, la vitesse d'un de ses points, à un instant donné, sera proportionnelle à la cote de ce point, cote mesurée à partir du point de vitesse nulle. Si donc x est l'élongation verticale de la masse m, un point de cote z aura pour vitesse, au même instant :

$$\frac{z}{z_0} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Si l'on néglige la déformation produite sur le ressort par son poids, le calcul a été souvent répété depuis que lord Rayleigh en a indiqué le résultat dans sa *Theory of sound*, **§ 156**. En effet, la masse de la tranche élémentaire, de hauteur dz, du ressort a la valeur $\frac{M}{z_0}\, dz$, où M désigne la masse du ressort de poids P et z_0, la hauteur du ressort à l'état d'équilibre. La force vive du système sera donc :

$$2\,T = m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \int_0^{z_0} \frac{M\,dz}{z_0} \left(\frac{z}{z_0} \cdot \frac{dx}{dt}\right)^2$$

en mettant $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ en facteur :

$$2T = \left[m + \frac{M}{z_0^3}\int_0^{z_0} z^2\,dz\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

ou :

$$2T = \left[m + \frac{M}{3}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

On en conclut que la masse entraînée est égale à la masse suspendue m, augmentée du tiers de la masse du ressort.

Mais, comme nous l'avons vu, le poids du ressort déforme celui-ci, de sorte que les spires les plus serrées sont entraînées avec la plus grande vitesse. C'est cet effet que nous nous proposons de calculer.

Remarquons premièrement que la tranche qui se trouve au bas du ressort n'est pas déformée, sa hauteur est donc dz et sa masse $\frac{M}{z_0}\,dz$, comme dans le calcul précédent.

Les autres tranches sont allongées d'une quantité égale à (7) que nous écrivons :

$$\delta\,dz = \frac{dz}{kz_0}\cdot\frac{P(z_0 - z)}{z_0}$$

où dz a toujours la même signification, ainsi que k et z_0 dans le quotient $\frac{dz}{kz_0}$; au contraire, nous allons maintenant faire varier z de 0 à Z_0, Z_0 représentant la hauteur du ressort déformé par son poids, car nous allons introduire la vitesse de l'élément de cote z. Le rapport $\frac{z_0 - z}{z_0}$ ne changera pas de valeur par cette substitution, mais il s'écrira :

$$\frac{Z_0 - Z}{Z_0}$$

en désignant par Z la nouvelle cote du point du ressort qui avait pour cote z, lorsqu'on ne tenait pas compte du poids du ressort.

Nous pourrons ainsi mettre la variation de longueur de l'élément de hauteur dz sous la forme :

$$\delta\,dz = \frac{dz}{k\,z_0}\cdot P\cdot\frac{Z_0 - Z}{Z_0}$$

où Z varie de 0 à Z_0.

La masse d'un de ces éléments reste la même : $\frac{M}{z_0}dz$. Exprimons ici z_0 en fonction de Z_0 : $Z_0 - z_0$ est l'allongement total du ressort en équilibre sous son propre poids P, et nous avons vu que cet allongement est: $\frac{P}{2k}$. Nous avons alors, en faisant: $\alpha = \frac{P}{kz_0}$,

$$\frac{Z_0 - z_0}{z_0} = \frac{P}{2kz_0} = \frac{\alpha}{2}$$

ce qui donne : $Z_0 = z_0\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$ ou $z_0 = \frac{Z_0}{1 + \frac{\alpha}{2}}$.

On peut donc exprimer la masse de l'élément dz sous la forme :

$$\frac{M\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{Z_0} dz.$$

Mais alors, la masse par unité de longueur de l'élément déformé a pour expression :

$$\frac{\frac{M\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{Z_0} dz}{dz + \frac{dz}{kz_0} \cdot P \cdot \frac{Z_0 - Z}{Z_0}} = \frac{M\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}{Z_0 + \alpha(Z_0 - Z)}.$$

Et enfin l'élément dZ du ressort déformé a pour masse :

$$\frac{M\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) dZ}{(1 + \alpha) Z_0 - \alpha Z}.$$

Nous n'avons plus qu'à répéter notre calcul de la force vive en introduisant cet élément de masse à la place de l'élément constant : $\frac{M}{z_0} dz$.

Nous obtenons :

$$2T = m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \int_0^{z_0} \frac{M\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) dZ}{(1 + \alpha) Z_0 - \alpha Z} \left(\frac{Z}{Z_0} \cdot \frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Le calcul de la somme $\int_0^{Z_0} \frac{Z^2\, dZ}{(1+\alpha)Z_0 - \alpha Z}$ se fait en posant :

$$a = \frac{(1+\alpha)Z_0}{\alpha}.$$

En désignant par z la variable d'intégration, cette somme s'écrit :

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{Z_0} \frac{z^2\, dz}{a-z} = \frac{a^2}{\alpha}\left[-\frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} - \log_e(a-z)\right]_0^{Z_0}.$$

Mais comme

$$\log_e(a-z) = -\left(\frac{z}{a} + \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} + \ldots\right) + \log_e a$$

on peut écrire :

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{Z_0} \frac{z^2\, dz}{a-z} = \frac{a^2}{\alpha}\left[\frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^4}{4a^4} + \frac{z^5}{5a^5} + \ldots\right]_0^{Z_0}$$

et l'on a :

$$2T = \left[m + \frac{M\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{Z_0^2}\cdot\frac{a^2}{\alpha}\cdot\left(\frac{Z_0^3}{3a^3} + \frac{Z_0^4}{4a^4} + \ldots\right)\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

La masse entraînée devient alors, en remplaçant a par sa valeur,

$$\mathfrak{M} = m + M\frac{1+\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \ldots\right]$$

où

$$\mathfrak{M} = m + M\frac{1+\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{2+n}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{n-1}$$

c'est le résultat que nous voulions établir : la série est convergente pour toutes les valeurs positives de $\alpha = \frac{P}{kz_0}$ Dans cette formule : m est la masse suspendue au ressort ; M, la masse du ressort ; P, son poids ; k, son module d'allongement ; z_0, la longueur du ressort mesurée dans l'état d'équilibre en supposant ce ressort sans poids. Pour $\alpha = 0$, on retrouve le résultat de lord Rayleigh.

Exemple.

Réservant l'étude expérimentale de quelques ressorts pour une publication ultérieure, nous nous bornerons à illustrer l'usage de notre formule par un seul exemple et nous étudierons un ressort qui est loin d'être parfait et dont les spires ne sont pas également jointives à l'état de repos, mais qui nous semble se prêter particulièrement bien à une vérification, parce que sa force de rappel est suffisamment grande par rapport à son poids. *Pour de grandes déformations,* k *n'est pas une constante et notre formule ne s'applique pas.*

Les caractéristiques du ressort sont les suivantes : Les spires sont, en général, jointives sans effort, leur nombre est $n = 140$; la longueur du ressort est alors de 187 mm.; le diamètre du fil cylindrique, qui s'en déduit, est de $1^{mm},34$. Le cylindre extérieur que forment les spires a un diamètre de $23^{mm},85$, de sorte que le cylindre de l'hélice a un diamètre de $22^{mm},51$. Ainsi la grandeur que nous désignions précédemment par a est égale à $11^{mm},26$. La longueur du fil est donnée par la formule $l = 2\pi n a = 990^{cm},5$. La hauteur de l'ensemble des spires à l'état d'équilibre vertical, sous l'effet du poids P_0, était $Z_0 = 48^{cm},45$. Cette donnée permet de calculer l'angle ϑ_0 de la tangente à l'hélice avec la verticale, et l'on obtient $\vartheta_0 = 87^\circ\, 12'$. Le poids du ressort, dans l'air, est de $106^{gr},275$. Le resserrement des spires sous l'effet de ce poids est insensible à l'œil (0,4 mm. entre la première et la dernière spire).

Pour des charges voisines de la charge que le ressort supportait dans ses oscillations, $k = \dfrac{P - P_0}{z - z_0}$ gr. cm.$^{-1}$ variait très peu. Pour le calcul de la masse entraînée, nous avons admis une valeur moyenne de $k = 18{,}8$ *;* comprise entre la valeur obtenue en calculant avec le tiers de la masse du ressort et une détermination statique.

La masse, que nous avons désignée par m, suspendue à l'extrémité inférieure du ressort se composait :

1. D'une tige verticale avec vis et encoche	$25^{gr},25$
2. D'une tige transversale de 7 mm. de diamètre, de 58 cm. de longueur, d'un poids de	$233^{gr},27$
3. De deux contre-poids placés aux extrémités de la tige horizontale; ensemble	$318^{gr},64$
La masse m est donc de	$577^{gr},16$

Nous n'avons pas utilisé pour ce ressort le mode de suspension indiqué au début. Les extrémités des spires étaient recourbées et venaient se souder à une tige verticale ayant approximativement pour axe l'axe du ressort. Des ressorts construits avec des soins spéciaux, en vue de notre étude, seront examinés dans un autre article.

La durée d'oscillation du ressort a été mesurée à la température, à peu près constante, de 19°. Nous avons d'abord employé une méthode directe en comptant le nombre des oscillations, soit 1004 en 1152 sec. Cela fait une période de 1,14741 sec. Nous avons ensuite vérifié ce résultat par la méthode des coïncidences et avons obtenu 156 coïncidences avec le balancier de l'horloge fondamentale du laboratoire, en 1214 sec.; puis 260 coïncidences en 2023 sec. Le temps écoulé entre deux coïncidences consécutives est de 7,7820 sec. dans le premier, de 7,7807 sec. dans le second cas. Les durées d'oscillation qui s'en déduisent sont respectivement 1,14745 sec. et 1,14747 sec. Nous pouvons admettre que les quatre premières décimales sont exactes et qu'en comptant $T = 1{,}1474$ sec. pour la durée d'oscillation du ressort, nous commettons une erreur qui ne dépasse pas 5.10^{-5} sec.

L'amortissement a été déterminé en notant le temps que le ressort a mis à passer d'une amplitude de $1^{mm},5$ à $0^{mm},1$ après 1022 oscillations, soit en 1173 sec. Le décrément logarithmique est ainsi de $\frac{\log 15}{1022} = 0{,}00115$. Le coefficient d'amortissement f est donné par l'équation :

$$f = \frac{2\mathfrak{M}}{nT} \cdot \log_e 10 \, . \, \log \frac{x_0}{x_n} \cdot$$

Le facteur de correction qui entre dans le calcul de la période $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\mathfrak{M}}{kg - \dfrac{f^2}{4\mathfrak{M}}}}$ est: $\frac{f^2}{4\mathfrak{M}} = 0{,}003425$. Ce nombre est négligeable devant la valeur de $kg = 18435{,}6$.

Calculons maintenant la masse totale entraînée d'après la formule indiquée :

$$\mathfrak{M} = m + M \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{1 + \alpha} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2+n} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{n-1} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{P}{kz_0}$$

$m = 577^{gr},16$. $M = 106^{gr},28$; nous ajouterons au total de la masse entraînée $0^{gr},01$ pour tenir compte de la poussée de l'air.

Pour calculer α, il faut calculer, tout d'abord, z_0.

On a: $z_0 = Z_0 - \delta z_0 \qquad Z_0 = 48{,}45$ cm. $\qquad \delta z_0 = \frac{P}{2k} = 2{,}83$ mm., et

l'on trouve: $\qquad z_0 = 45{,}62$ cm.

$$\alpha = \frac{P}{kz_0} = 0{,}12392, \quad \text{d'où} \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}06196;$$

$$1+\frac{\alpha}{2}=1{,}06196, \qquad 1+\alpha=1{,}12392$$

$$\log \alpha=\bar{1}{,}09313$$

$$\log\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)=0{,}02611; \quad \log(1+\alpha)=0{,}05073$$

$$\log\frac{1+\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha}=\bar{1}{,}97538 \qquad \log\frac{\alpha}{1+\alpha}=\bar{1}{,}04240$$

	logarithmes	nombres	fractions	produits
$\frac{\alpha}{1+\alpha}$	$\bar{1}{,}04240$	0,11026	$\frac{1}{4}$	0,02756
$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2$	$\bar{2}{,}08480$	0,01216	$\frac{1}{5}$	0,00243
$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^3$	$\bar{3}{,}12720$	0,00134	$\frac{1}{6}$	0,00022
$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^4$	$\bar{4}{,}16960$	0,00014 8	$\frac{1}{7}$	0,00002
$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^5$	$\bar{5}{,}21200$	0,00001 6	$\frac{1}{8}$	0,00000
$\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^6$	$\bar{6}{,}25440$	0,00000 2	$\frac{1}{9}$	0,00000
				0,03024
			$\frac{1}{3}$	$=0{,}33333$
			Σ	$=0{,}36357$

$$\Sigma=\frac{1}{3}+0{,}03024=0{,}36357$$

$$\log \Sigma=\bar{1}{,}56058$$

$$M' \begin{cases} \log M=2{,}02645 \\ \log\frac{1+\frac{\alpha}{2}}{1+\alpha}=\bar{1}{,}97538 \\ \log \Sigma=\bar{1}{,}56058 \end{cases}$$

$$\log M'=1{,}56241=\log 36{,}51$$

$$\begin{aligned} m &= 577{,}16 \text{ gr.} \\ M' &= 36{,}51 \text{ »} \\ \text{poussée} &= 0{,}01 \text{ »} \\ \mathfrak{M} &= 613{,}68 \text{ gr.} \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi, pour la masse entraînée, 613gr,68; le tiers de la masse du ressort étant 35gr,43, on obtiendrait par la formule habituelle 612gr,60. Notre formule ne donne donc qu'une différence de 1 gr. environ.

La quantité la moins bien connue dans les calculs qui précèdent est certainement le module d'allongement k; nous en avons donné une valeur moyenne. Mais, connaissant la durée d'oscillation T et la masse entraînée $\mathfrak{M}$, on peut calculer k par la formule

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{kg}} \quad \text{où } g = 980{,}6 \text{ cm. sec.}^{-2}$$

et on trouve $k = 18{,}767$ gr. cm.$^{-1}$.

Lorsqu'on fait le calcul avec le tiers de la masse du ressort, on obtient pour k : 18,733.

On pouvait prévoir que cette valeur serait un peu plus faible que la valeur obtenue par la mesure statique. Nous nous sommes, en effet, servis pour notre calcul de l'équation (6)

$$(6) \qquad k = \frac{A \sin^2 \vartheta_0}{a^2 l}.$$

Une mesure statique correspond, au contraire, à la formule complète :

$$(3 \text{ bis}) \quad k_1 = \frac{F}{z - z_0} = k \frac{z - \dfrac{\sin \vartheta_0}{\sin \vartheta} z_0}{z - z_0} + \frac{B}{l a^2}(\sin^2 \vartheta_0 - \sin^2 \vartheta) \frac{z}{z - z_0}.$$

La mesure que nous avons faite nous a donné :

$$k_1 = \frac{F}{z - z_0} = \frac{99{,}987 \text{ gr.}}{5{,}31 \text{ cm.}} = 18{,}83 \text{ gr. cm.}^{-1}.$$

Nous pourrions, en partant de la valeur donnée par la première définition, calculer la valeur de k_1 correspondant à la seconde, et alors comparer le résultat de nos calculs à la valeur expérimentale : $k_1 = 18{,}83$. Nous utiliserons pour cela l'équation (3 bis).

Il faut, tout d'abord, déterminer le coefficient B.

Pour cela on se sert de l'équation (5), p. 114, et il faut déterminer le couple de torsion N. C'est ce qu'on fait en déplaçant les surcharges sur la tige transversale et en mesurant : 1) leurs distances, c et c', à l'axe du ressort, et 2) les durées d'oscillation T et T', autour de ce même axe. On a :

$$N = 4\pi^2 \frac{I - I'}{T^2 - T'^2} = 4\pi^2 \cdot 2 \frac{m(c^2 - c'^2)}{T^2 - T'^2}.$$

En faisant: $m = 159^{gr},32$; $c = 28^{cm},20$; $c' = 10^{cm},02$; $T = 20,077$ secondes; $T' = 10,534$ sec., on trouve $\log N = 1,48449$.

Dès lors, en vertu de l'équation (5), on a : $B = \dfrac{lN - A\cos^2\vartheta_0}{\sin^2\vartheta_0}$ ce qui donne : $\log B = 4,48056$ en gr. cm^2.

Il faut ensuite calculer les deux termes :

$$k\,\frac{z - \dfrac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta}z_0}{z - z_0} \qquad \text{et} \qquad \frac{B}{a^2 l}(\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta)\frac{z}{z - z_0}$$

où nous faisons :

$$\begin{aligned} k &= 18,767 \text{ gr. cm.}^{-1} \\ z_0 &= 48,45 \text{ cm.} \\ l &= 990,5 \text{ cm.} \\ a &= 1,126 \text{ cm.} \\ \sin\vartheta &= \frac{z}{l}; \quad \sin\vartheta_0 = \frac{z_0}{l}. \\ z - z_0 &= 5,31 \text{ cm.} \end{aligned}$$

On trouve ainsi :

$$k\,\frac{z - \dfrac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta}z_0}{z - z_0} = 18,724$$

$$\frac{B}{a^2 l}(\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta)\frac{z}{z - z_0} = 0,122$$

$$k_1 \;.\;.\;. = 18,846$$

On sait que la valeur trouvée expérimentalement est 18,83.

L'écart qui subsiste entre ces valeurs s'explique par diverses raisons. La mesure statique de k avait été faite pour d'autres valeurs de z, un peu inférieures à celles qui sont entrées dans nos calculs; comme k croît faiblement avec z, nous devions obtenir une valeur trop grande, et c'est en effet le cas.

Remarquons cependant que la méthode statique employée pour mesurer k_1 donne difficilement une appromixation supérieure à 1 $^0/_{00}$. Nous ne pensons pas avoir dépassé cette approximation dans notre mesure. C'est pourquoi l'écart que nous venons de constater, inférieur à 1 $^0/_{00}$, nous permet de considérer le résultat de nos calculs comme satisfaisant.

L'important est d'obtenir une valeur plus approchée au moyen de la formule proposée pour le calcul de la masse entraînée. Avec la formule habituelle, c'est-à-dire en ajoutant à la masse suspendue, le tiers de la masse du ressort, on obtient pour k_1 18,813 gr. cm.$^{-1}$. L'erreur relative est donc numériquement la même que précédemment, mais elle est de sens contraire, et ceci est en contradiction avec la prévision qu'on pouvait faire : on obtient une valeur trop petite, c'est une trop grande qu'on devait attendre. Notre formule donne donc un meilleur résultat que l'addition du tiers de la masse du ressort.

Il peut paraître inutile d'attacher une certaine importance à des erreurs de l'ordre de celle que nous nous sommes efforcé de réduire. Mais il ne faut pas oublier que les ressorts sont, à justes titres, très utilisés dans l'enseignement où il est important d'atteindre une précision souvent visiblement insuffisante avec la formule ordinaire.

De plus, les ressorts permettent de mesurer avec quelque certitude le module de Poisson qui est une des constantes importantes de la théorie de l'élasticité, toujours délicate à déterminer.

On a : $\frac{B}{A} = 1 + \sigma$. Or, le calcul de la masse entraînée entre dans la détermination de A aussi bien que de B, comme on l'a vu dans l'exemple étudié.

Dans notre cas, l'acier du ressort a pour module :

$$\sigma = 0{,}27997 \backsim 0{,}28.$$

Enfin, nous nous permettons de faire observer que la formule proposée pourrait s'appliquer à d'autres corps élastiques, car son calcul n'est basé sur aucune propriété appartenant exclusivement au ressort spiral cylindrique. Il n'est donc pas impossible qu'il se présente d'autres cas où elle soit applicable.

Nos mesures ont été faites à l'Institut de physique de l'Université de Neuchâtel. Qu'il nous soit permis de remercier ici, publiquement, son directeur, M. le prof. A. Jaquerod, pour le bienveillant intérêt qu'il ne cesse de témoigner à ses anciens étudiants.

Manuscrit reçu le 1er août 1932.
Dernières épreuves corrigées le 1er mai 1933.