Estimation de l'erreur commise dans la méthode de M.W.E. Milne pour l'intégration d'un système de n équations différentielles du premier ordre

ESTIMATION DE L'ERREUR COMMISE DANS LA MÉTHODE DE M. W. E. MILNE POUR L'INTÉGRATION D'UN SYSTÈME DE *n* ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

par

WILLY RICHTER

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

M. W. E. MILNE (1949) [1] a donné une méthode très commode d'intégration numérique de l'équation différentielle du premier ordre [2]. Ce procédé s'étend immédiatement au système de n équations différentielles du premier ordre [3]. Nous nous proposons ici de déterminer une borne supérieure de l'erreur commise dans ce dernier cas.

La méthode de MILNE, que nous exposons au chapitre premier (§ 1 à § 4), fournit une solution approchée du problème suivant : Étant donné le système

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = f_\lambda\Big(x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ldots, y_n(x)\Big),\ \lambda = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

calculer

$$y_\lambda(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{X} > 0,$$

en connaissant

$$y_\lambda(0). \tag{2}$$

Désignant par

$$h = \frac{\mathrm{X}}{r}, \tag{3}$$

r, entier, positif, le *pas* d'intégration, l'auteur calcule tout d'abord, par itération, des valeurs approchées de $y_\lambda(-h)$, $y_\lambda(h)$ et de $y_\lambda(2h)$.

En les joignant à $y_\lambda(0)$, nous les appelons les *valeurs de départ* et nous distinguons les *premières ordonnées*, calculées pour les valeurs

$$k = \pm h \tag{4}$$

de l'argument, de la *seconde ordonnée*, calculée pour la valeur $x = 2h$.

En possession de ces quatre valeurs pour chaque fonction y_λ, l'auteur continue l'intégration « pas à pas [4] », dans l'esprit de la méthode d'ADAMS. Nous nommons *continuation du réseau* cette seconde partie du calcul qui conduit aux valeurs approchées de

$$y_\lambda(\varrho h), \qquad \varrho = 3, 4, \ldots, r.$$

Nous précisons aussi au chapitre premier (§ 1) les hypothèses faites sur les fonctions f_λ et leurs dérivées partielles jusqu'au quatrième ordre y compris, dans un certain domaine E. Nous suivons ici BIEBERBACH (1951, hyp. (1) à (4)) en introduisant les *hypothèses* B. Une des consé-

[1] Les millésimes indiqués entre parenthèses renvoient à la BIBLIOGRAPHIE, p. 43.

[2] L'auteur a publié sa méthode sous une première forme (1926), puis lui a apporté des modifications (1941) reprises en (1949).

[3] MILNE (1949, art. 41, p. 141) : « The extension of the foregoing methods to the case of simultaneous equations is almost obvious. Each step in the process of integration is carried out independently for each equation just as though it were a single equation except for the substitution into the equations. »

[4] « Step-by-step ». MILNE, *op. cit.*, p. 131.

quences (1,6) de ces dernières est que chaque fonction f_λ satisfait une condition de Lipschitz d'exposant 1 dans E :

$$|f_\lambda(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_\lambda(x, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)| \leqq \mathrm{M}n \cdot \max_\mu |y_\mu - y_\mu^*|$$

où M est une constante dont le sens est précisé par (1,5). L'intérêt des hypothèses B réside en particulier dans le fait qu'elles permettent d'estimer l'*erreur de quadrature* de chaque formule d'intégration utilisée.

Le chapitre II est consacré, pour les premières ordonnées d'une part, pour la seconde ordonnée d'autre part, à rechercher :

a) une condition suffisante de convergence des itérations qui permettent de calculer ces ordonnées,

b) une borne supérieure de l'erreur commise dans le calcul de la ν-ième valeur approchée.

Des considérations, valables aussi bien pour les premières ordonnées que pour la seconde, conduisent au résultat suivant (théorème I du § 5 et théorème III du § 9) :

La convergence des itérations est assurée [1] *dans les deux cas dès que l'on a :*

$$q = \frac{h\mathrm{M}n}{3} < 1 .$$

En désignant au § 7 par η_ν l'erreur absolue maximum [2] commise dans le calcul de la ν-ième valeur approchée des premières ordonnées, nous constatons (7,4) qu'elle satisfait une inégalité aux différences de la forme :

$$\eta_\nu \leqq c_1 \eta_{\nu-1} + c_2 , \qquad c_1, c_2, \text{ constantes}. \tag{5}$$

La solution générale de l'équation

$$u_\nu = c_1 u_{\nu-1} + c_2$$

nous fournit (théorème II) l'estimation désirée de η_ν ; nous montrons alors au § 8, par la relation (8,6), que

$$\eta_\nu < aq^5, \qquad (\nu \geqq 3,\ a = a_0 + a_1 q + \ldots + a_\mu q^\mu + \ldots) .$$

Ceci nous permet de conclure, d'une manière un peu vague, que pour h « petit », il suffit de s'arrêter, dans les applications, à la quatrième valeur approchée dans le calcul des premières ordonnées.

Quant à l'erreur absolue maximum [3] ζ_ν commise dans le calcul de la seconde ordonnée, nous voyons au § 11 qu'elle satisfait une inégalité (11,3) de structure identique à celle de (5). Le théorème IV fournit alors, comme précédemment le théorème II, la borne supérieure cherchée.

[1] En réalité, notre condition suffisante de convergence peut être obtenue, pour $n = 1$, en spécialisant celle que donne M. J. L. Massera (1942, p. 127), dans l'étude d'une classe très générale de formules d'intégration.

[2] Nous la définissons en (6,1).

[3] Cf. déf. (10,3).

Nous donnons au théorème V une estimation un peu plus grossière que celle du théorème IV mais plus commode pour les applications. Ici aussi, les relations (10,2) et (11,5) nous montrent que

$$\zeta_\nu \leqq \beta q^5, \qquad \nu \geqq 1,$$

β étant de la même forme que α, ce qui nous permet de dire qu'une approximation « suffisante » est obtenue, pour h « petit », lorsqu'on se contente de calculer deux valeurs approchées de la seconde ordonnée.

L'erreur commise dans la continuation du réseau est étudiée au chapitre III. Ainsi que le montrent les formules (4,1) et (4,2) du chapitre premier, MILNE se contente de calculer une première valeur de

$$y_\lambda(\varrho h), \qquad \varrho \geqq 3,$$

qu'il appelle « predictor » et de la corriger (« corrector ») au moyen de la formule de SIMPSON. En ce qui concerne l'erreur commise, l'auteur forme [1] la différence D des deux valeurs ainsi calculées. En examinant le reste des deux formules d'intégration utilisées, il conclut en admettant que si $\frac{D}{29}$ est négligeable, la valeur « corrigée » est correcte.

Nous appelons *valeur définitive* de $y_\lambda(\varrho h)$, $\varrho \geqq 3$, la valeur corrigée et nous désignons par ω_ϱ une certaine borne (valable pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$) de l'erreur [2] commise dans le calcul correspondant. Nous obtenons alors au § 12 la relation (12,5) :

$$\omega_\varrho \leqq 4q(1+2q)\,\omega_{\varrho-1} + (1+q+4q^2)\,\omega_{\varrho-2} + 8q^2\omega_{\varrho-3}$$
$$+ q\omega_{\varrho-4} + 2(1+28q)\,R, \qquad \varrho \geqq 3,$$

où 2R est une borne supérieure de l'erreur de quadrature de la formule de SIMPSON. Von MISES et MASSERA entre autres, ont rencontré une inégalité analogue en estimant l'erreur commise dans la méthode d'ADAMS. Le premier de ces auteurs a montré (von MISES, 1930) que l'on obtient une majorante d'une grandeur correspondant à notre ω_ϱ en envisageant une solution particulière de l'équation aux différences tirée de (12,5). En appliquant sa méthode dans notre cas, nous obtenons en (15,2) une borne que nous pouvons quelque peu améliorer ainsi que nous le montrons au théorème VI du § 15. Nous l'appelons Ω''_ϱ. Mais auparavant, au § 14, une variante de la méthode de von MISES due à MASSERA (1942, p. 130) nous fournit, appliquée à notre ω_ϱ, une autre borne que nous désignons par Ω'_ϱ.

L'expression de Ω'_ϱ n'étant pas identique à celle de Ω''_ϱ, nous précisons par le théorème VII du § 16 dans quel cas l'une des estimations est plus fine que l'autre.

[1] MILNE, *op. cit.*, p. 137-138, rem. 1 : « ... we note that the error of (1) is roughly 28 times the error of (2) and in the opposite direction. So if E_1 is the error of (1), E_2 the error of (2), and $D = E_2 - E_1$, we have $E_2 = \frac{D}{29}$ approximately. ... so long as $\frac{D}{29}$ is not significant we assume that the value given by (2) is correct. »

[2] Cf. déf. (12,2).

Nous montrons enfin au § 17 qu'une borne de l'erreur commise dans le calcul de y_λ (X) est donnée par :

$$\omega_r < Ce^{4MnX} - Q ,$$

C et Q étant des expressions de la forme :

$$q^4 (c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \ldots + c_\mu q^\mu + \ldots) .$$

Nous en concluons que, pour h « petit », ω_r est grossièrement proportionnelle à h^4 et que, si le pas est réduit de moitié, la borne d'erreur est divisée par 16 [1].

Remarquons ici que dans toutes les estimations que nous donnons interviennent les erreurs de quadrature des formules d'intégration. Elles dépendent dans notre cas soit de $|f''_\lambda|$, soit de $|f^{\mathrm{IV}}_\lambda|$. Pour donner une borne supérieure de ces dernières grandeurs en E, il nous a suffi d'appliquer les formules établies par BIEBERBACH (1951, form. (33)) dans le cas où les hypothèses B sont satisfaites.

Nous envisageons au chapitre IV (§ 18) un exemple étudié par l'abbé MOIGNO (1844), puis par A. N. KRYLOFF (1935), à savoir l'intégration de :

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0,$$

sur le segment : $0 \leqq x \leqq 1 = X$.

Cet exemple est intéressant pour deux raisons : Ici, en effet, $y^{(\mu)}(0)$ n'existe pas pour $\mu \geqq 2$. La méthode de MILNE exigeant la connaissance de $y''(0)$, ainsi que le montrent les formules (2,1), (2,2) et (3,1), la condition initiale (2) sera remplacée, par exemple, par la donnée de y (0,1) supposée calculée par une autre méthode. D'autre part, l'application des formules de BIEBERBACH nécessite quelques précautions si l'on veut éviter d'obtenir des bornes d'erreur si grandes qu'elles en perdent leur sens.

Ceci dit, cet exemple se prête fort bien à l'intégration par la méthode de MILNE. Les résultats, affectés des bornes d'erreur commises en arrondissant sont reportés dans les tableaux I à IV du § 18 (p. 31 et 32). Nous appliquons ensuite notre estimation d'erreur à cet exemple.

Nous apportons quelques précisions en appendice et, en particulier, nous comparons (app. III, p. 40) la méthode de MILNE à celle de KUTTA pour $n = 1$. Dans l'étude des *premières ordonnées*, nous concluons que, si M est petit, la méthode de MILNE donne vraisemblablement une approximation meilleure que celle de KUTTA tout en exigeant plus de calculs. Au contraire, si M est grand, nous constatons que la méthode de KUTTA peut être plus avantageuse. Dans la *continuation du réseau*, il est clair que la méthode de MILNE demande moins de calculs que celle de KUTTA.

[1] On trouve une indication de ce résultat dans : *Marchant Methods* (1944, p. 10, note 2) : « Inasmuch as the error terms contain h^5, the error of any increment in y will be proportional to the 5th power of h, but as more increments are required to cover any interval in x, the error of the complete integration varies according to the 4th power of h. From this, it is seen that halving h reduces the error to 1/16, quartering... » Mais cette remarque n'a pas été reprise par MILNE qui écrit (1949, p. 138, rem. 2) : « Cutting the interval in half, will divide the error by about 32. »

CHAPITRE PREMIER

LA MÉTHODE DE MILNE

§ 1. *Position du problème - Hypothèses de* Bieberbach *Calculs préliminaires*

Pour intégrer le système (1) avec les conditions initiales (2) de 0 à $X = rh$, nous admettons [1] que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

Hypothèses B.

Dans le domaine fermé E défini par :

$$\left.\begin{array}{l} x \,\langle\!\langle -h,\, rh = X \rangle \\ y_\lambda \,\langle\!\langle y_\lambda(0) - a\,, \qquad y_\lambda(0) + a\rangle\,, \qquad a > 0\,,^{2} \end{array}\right\} \qquad (1,1)$$

les fonctions f_λ sont continues [3]. (1,2)
De plus (Bieberbach, 1951) :

$$|f_\lambda| \leqq N\,, \qquad N > 0\,. \qquad (1,3)$$

En outre, pour i et j_μ tels que :

$$1 \leqq i + \sum_{\mu=1}^{n} j_\mu \leqq 4\,,$$

nous supposons que, dans E, les dérivées :

$$\frac{\partial^{i + \sum\limits_{\mu=1}^{n} j_\mu} f_\lambda}{\partial x^i\, \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}} \text{ existent et sont continues ;} \qquad (1,4)$$

enfin, nous admettons que, dans E,

$$\left| \frac{\partial^{i + \sum\limits_{\mu=1}^{n} j_\mu} f_\lambda}{\partial x^i\, \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_n^{j_n}} \right| \leqq \frac{M}{N^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} j_\mu - 1}}\,, \qquad M > 0\,. \qquad (1,5)$$

[1] Milne (1949, p. 131) : « It is assumed that the function f satisfies all requirements necessary to insure the existence of a unique, continuous, differentiable solution of the form y = function of x throughout the interval under consideration. »
[2] Nous donnons en appendice (p. 38) une estimation de a.
[3] Rappelons que, tout au long de ce travail, on a : $\lambda = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Il suit de (1,1), (1,2), (1,4) et (1,5) que les fonctions f_λ satisfont chacune une condition de LIPSCHITZ d'exposant 1, dans E, car :

$$
\begin{aligned}
& |f_\lambda(x, y_1, \ldots\ldots\ldots, y_n) - f_\lambda(x, y_1^*, \ldots\ldots\ldots, y_n^*)| \\
\leqq\ & |f_\lambda(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) - f_\lambda(x, y_1^*, y_2, \ldots\ldots, y_n)| \\
+\ & |f_\lambda(x, y_1^*, y_2, y_3, \ldots, y_n) - f_\lambda(x, y_1^*, y_2^*, y_3, \ldots, y_n)| \\
+\ & \cdots \\
+\ & |f_\lambda(x, y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*, y_n) - f_\lambda(x, y_1^*, \ldots, y_{n-1}^*, y_n^*)| \\
\leqq\ & \mathrm{M} \cdot \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu - y_\mu^*| \leqq \mathrm{M}n \cdot \max_\mu |y_\mu - y_\mu^*| \,. \qquad (1,6)
\end{aligned}
$$

Calculs préliminaires

Dans la méthode de MILNE, on calcule tout d'abord

$$y_\lambda'(0) = f_\lambda(0, y_1(0), \ldots, y_n(0)),$$

puis on dérive les deux membres de (1), ce qui conduit à $y_\lambda''(x)$ et à $y_\lambda''(0)$.

§ 2. *Valeurs de départ - Calcul des premières ordonnées*

Nous définissons par récurrence, pour $k = \pm h$:

$$
\mathrm{Y}_{\lambda\nu}(k) \begin{cases} = y_\lambda(0) + k y_\lambda'(0) + \dfrac{k^2}{2} y_\lambda''(0)\,, & \nu = 1\,, \qquad (2,1) \\[2ex] = y_\lambda(0) + \dfrac{2}{3} k y_\lambda'(0) + \dfrac{k^2}{4} y_\lambda''(0) & \\[2ex] \quad + \dfrac{k}{24}\Big[7\mathrm{F}_{\lambda,\nu-1}(k) + \mathrm{F}_{\lambda,\nu-1}(-k)\Big], & \nu \geqq 2, \qquad (2,2) \end{cases}
$$

avec :

$$\mathrm{F}_{\lambda\nu}(x) = f_\lambda(x, \mathrm{Y}_{1\nu}(x), \ldots, \mathrm{Y}_{n\nu}(x)), \quad x = \pm h, \quad \nu \geqq 1. \qquad (2,3)$$

Il suit immédiatement de (2,3) et (1,6) que l'on a, pour $x = \pm k$:

$$|\mathrm{F}_{\lambda\nu}(x) - \mathrm{F}_{\lambda,\nu-1}(x)| \leqq \mathrm{M}n \cdot \max_\lambda |\mathrm{Y}_{\lambda\nu}(x) - \mathrm{Y}_{\lambda,\nu-1}(x)|, \ \nu \geqq 2, \qquad (2,4)$$

et :

$$|y_\lambda'(x) - \mathrm{F}_{\lambda\nu}(x)| \leqq \mathrm{M}n \cdot \max_\lambda |y_\lambda(x) - \mathrm{Y}_{\lambda\nu}(x)|, \qquad \nu \geqq 1. \qquad (2,5)$$

Après avoir calculé $\mathrm{Y}_{\lambda 1}(k)$ à l'aide de (2,1), on poursuit l'itération en utilisant (2,2) et (2,3) ; on s'arrête lorsque ν a atteint une valeur p telle que la différence

$$\mathrm{Y}_{\lambda,\,p+1}(k) - \mathrm{Y}_{\lambda,\,p}(k)$$

soit suffisamment petite pour ne pas affecter[1] la dernière décimale de l'expression de $Y_{\lambda p}(k)$. Supprimant l'indice p de la dernière itérée, nous désignons par $Y_\lambda(k)$ les *valeurs définitives* des premières ordonnées et nous posons :

$$F_\lambda(k) = f_\lambda\big(k, Y_1(k), \dots, Y_n(k)\big), \; k = \pm h. \tag{2,6}$$

Il est clair que nous avons alors, en vertu de (2,5) :

$$\begin{aligned} |y'_\lambda(k) - F_\lambda(k)| &\leqq Mn \cdot \max_\lambda |y_\lambda(k) - Y_\lambda(k)| \\ &\equiv Mn \cdot \max_\lambda |y_\lambda(k) - Y_{\lambda p}(k)|. \end{aligned} \tag{2,7}$$

§ 3. *Valeurs de départ - Calcul de la seconde ordonnée*

Le calcul de la seconde ordonnée par approximations successives se conduit en définissant, de nouveau par récurrence :

$$Z_{\lambda\nu} \begin{cases} = y_\lambda(0) - \dfrac{2h}{3} y'_\lambda(0) - 2h^2 y''_\lambda(0) + \dfrac{2h}{3}\Big[5F_\lambda(h) - F_\lambda(-h)\Big], \; \nu = 1, & (3,1) \\ = y_\lambda(0) + \dfrac{h}{3}\Big[y'_\lambda(0) + 4F_\lambda(h)\Big] + \dfrac{h}{3} G_{\lambda,\,\nu-1} \qquad , \; \nu \geqq 2, & (3,2) \end{cases}$$

avec

$$G_{\lambda\nu} = f_\lambda\big(2h, Z_{1\nu}, \dots, Z_{n\nu}\big), \qquad \nu \geqq 1. \tag{3,3}$$

En vertu de (1,6) et de (3,3), nous avons immédiatement :

$$|G_{\lambda\nu} - G_{\lambda,\,\nu-1}| \leqq Mn \cdot \max_\lambda |Z_{\lambda\nu} - Z_{\lambda,\,\nu-1}|, \qquad \nu \geqq 2, \tag{3,4}$$

ainsi que :

$$|y'_\lambda(2h) - G_{\lambda\nu}| \leqq Mn \cdot \max_\lambda |y_\lambda(2h) - Z_{\lambda\nu}|, \qquad \nu \geqq 1. \tag{3,5}$$

Le calcul de $Z_{\lambda 1}$ effectué, on poursuit l'itération au moyen de (3,2) et de (3,3) en s'arrêtant lorsque ν a atteint une valeur s telle que la différence

$$Z_{\lambda,\,s+1} - Z_{\lambda,\,s}$$

soit assez petite pour ne pas affecter[2] la dernière décimale de $Z_{\lambda s}$. En supprimant l'indice s, nous désignerons par Z_λ la *valeur définitive* de la seconde ordonnée et nous poserons :

$$G_\lambda = f_\lambda\big(2h, Z_1, \dots, Z_n\big). \tag{3,6}$$

[1] MILNE, *op. cit.*, p. 135-136 : « The process is repeated until no change occurs. »
[2] MILNE, *op. cit.*, p. 136 : « Next a trial value of y_2 is calculated by ..., and checked and rechecked by SIMPSON's rule until no change occurs. »

§ 4. *Continuation du réseau*

Pour $\varrho = 3, 4, \ldots, r$, nous définissons par récurrence :

$$W_\lambda^* (\varrho h) = W_\lambda\Big((\varrho - 4) h\Big) + \frac{4h}{3}\Big[2 H_\lambda\Big((\varrho - 3) h\Big) - H_\lambda\Big((\varrho - 2) h\Big) + 2 H_\lambda\Big((\varrho - 1) h\Big)\Big], \tag{4,1}$$

et

$$W_\lambda (\varrho h) = W_\lambda\Big((\varrho - 2) h\Big) + \frac{h}{3}\Big[H_\lambda\Big((\varrho - 2) h\Big) + 4 H_\lambda\Big((\varrho - 1) h\Big)\Big] + \frac{h}{3} H_\lambda^* (\varrho h), \tag{4,2}$$

avec :

$$H_\lambda (\varrho h) = f_\lambda\Big(\varrho h, W_1 (\varrho h), \ldots, W_n (\varrho h)\Big), \quad \varrho \geqq -1, \tag{4,3}$$

puis :

$$H_\lambda^* (\varrho h) = f_\lambda\Big(\varrho h, W_1^* (\varrho h), \ldots, W_n^* (\varrho h)\Big), \quad \varrho \geqq 3. \tag{4,4}$$

Nous complétons ces définitions pour : $-1 \leqq \varrho \leqq 2$ par :

$$W_\lambda (k) = Y_\lambda (k), \; W_\lambda (0) = y_\lambda (0), \; W_\lambda (2h) = Z_\lambda, \tag{4,5}$$

de sorte que nous avons, par (2,6) et (3,6) :

$$H_\lambda (k) = F_\lambda (k), \; H_\lambda (0) = y_\lambda' (0), \; H_\lambda (2h) = G_\lambda. \tag{4,6}$$

Nous tirons immédiatement de (1,6) et (4,3) :

$$| y_\lambda' (\varrho h) - H_\lambda (\varrho h) | \leqq Mn \cdot \max_\lambda | y_\lambda (\varrho h) - W_\lambda (\varrho h) | \tag{4,7}$$

et, en envisageant (4,4) :

$$| y_\lambda' (\varrho h) - H_\lambda^* (\varrho h) | \leqq Mn \cdot \max_\lambda | y_\lambda (\varrho h) - W_\lambda^* (\varrho h) | \tag{4,8}$$

relations qui, selon (4,5) et (4,6), sont valables, la première pour $\varrho \geqq -1$, la seconde pour $\varrho \geqq 3$. Nous appelons [1] $W_\lambda (\varrho h)$ la *valeur définitive* de y_λ pour $x = \varrho h$; en particulier, à l'extrémité du segment, la valeur définitive de $y_\lambda (X)$ sera $W_\lambda (X)$.

[1] Milne, *op. cit.*, p. 137 : « This is taken as the correct value of y_3 (see Remark 1 below). » Cf. notre note infrapaginale 1, p. 8, où nous citons l'essentiel de cette remarque.

Id : « ... getting y_4 ..., which is taken as correct. In this way, we proceed, using ... to get the trial value of y, then calculating y'..., then obtaining the corrected y by ... . »

CHAPITRE II

VALEURS DE DÉPART

A. Premières ordonnées

§ 5. *Convergence des itérations*

En rappelant que, selon (4), $k = \pm h$, envisageons les $2n$ suites :

$$Y_{\lambda\nu}(k) \qquad (\nu > 1,\ \nu \to \infty) \tag{5,1}$$

et posons :

$$\frac{hMn}{3} = q\,. \tag{5,2}$$

Théorème I

> Les hypothèses B étant satisfaites, si
>
> $$q < 1, \tag{5,3}$$
>
> chacune des $2n$ suites (5,1) sera convergente.

Démonstration

Ecrivons en effet (2,2) pour $(\nu + 1)$ et ν. Soustrayant membre à membre, nous obtenons en passant aux valeurs absolues :

$$|Y_{\lambda,\nu+1}(k) - Y_{\lambda\nu}(k)| \leqq \frac{h}{24}\Big[7\,|F_{\lambda\nu}(k) - F_{\lambda,\nu-1}(k)| + |F_{\lambda\nu}(-k) - F_{\lambda,\nu-1}(-k)|\Big], \qquad \nu \geqq 2\,.$$

Posons alors :

$$\overset{\pm}{\Delta}_\nu = \max_\lambda |Y_{\lambda,\nu+1}(\pm k) - Y_{\lambda\nu}(\pm k)|, \qquad \nu \geqq 1,$$

puis :

$$\Delta_\nu = \max(\Delta^+_\nu, \Delta^-_\nu), \qquad \nu \geqq 1\,.$$

Nous obtenons, en vertu de (2,4) et de (5,2) :

$$\Delta_\nu \leqq \frac{h}{24}\Big[7\,Mn\,\Delta^+_{\nu-1} + Mn\,\Delta^-_{\nu-1}\Big] \leqq q\Delta_{\nu-1} \leqq q^{\nu-1}\Delta_1\,.$$

Dès que $q < 1$, on voit donc que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu$ est convergente.

C.Q.F.D.

§ 6. *Erreur commise dans la première approximation*

Dans les hypothèses (1,2) et (1,4), on a :

$$y_\lambda(k) = y_\lambda(0) + k y'_\lambda(0) + \frac{k^2}{2} y''_\lambda(0) + \frac{k^3}{6} y'''_\lambda(\vartheta_\lambda k), \qquad 0 \leqq \vartheta_\lambda \leqq 1,$$

de sorte que nous tirons immédiatement de (2,1) :

$$y_\lambda(k) - Y_{\lambda 1}(k) = \frac{k^3}{6} y'''_\lambda(\vartheta_\lambda k).$$

Si nous posons :

$$\eta_\nu = \max_\lambda |y_\lambda(k) - Y_{\lambda\nu}(k)|, \qquad \nu \geqq 1, \tag{6,1}$$

nous pouvons écrire :

$$\eta_1 \leqq \frac{h^3}{6} \cdot \max_{\lambda, \theta_\lambda} |y'''_\lambda(\theta_\lambda h)|, \qquad 0 \leqq |\theta_\lambda| \leqq 1,$$

ou encore, en vertu de (1) :

$$\eta_1 \leqq \frac{h^3}{6} \cdot \max_{\lambda, \mathrm{E}} |f''_\lambda|. \tag{6,2}$$

§ 7. *Erreur commise dans la ν-ième approximation*

Supposons que les hypothèses (1,2) et (1,4) sont vérifiées. Selon deux formules utilisées par Milne, *op. cit.*, p. 135, form. (3) et (4), nous pouvons écrire [1] :

$$y_\lambda(k) = y_\lambda(0) + \frac{2k}{3} y'_\lambda(0) + \frac{k^2}{4} y''_\lambda(0) + \frac{k}{24}\left[7y'_\lambda(k) + y'_\lambda(-k)\right] - \frac{k^5}{180} y^{\mathrm{V}}_\lambda(\overset{\pm}{\theta}_\lambda k), \quad 0 \leqq |\overset{\pm}{\theta}_\lambda| \leqq 1,$$

de sorte que nous aurons en vertu de la définition (2,2) et pour $\nu \geqq 2$:

$$y_\lambda(k) - Y_{\lambda\nu}(k) = \frac{k}{24}\left[7\Big(y'_\lambda(k) - F_{\lambda,\nu-1}(k)\Big) + y'_\lambda(-k) - F_{\lambda,\nu-1}(-k)\right] - \frac{k^5}{180} y^{\mathrm{V}}_\lambda(\overset{\pm}{\theta}_\lambda k). \tag{7,1}$$

[1] Le reste s'obtient en appliquant la méthode exposée par Milne, *op. cit.*, p. 108-116.

Posons, pour tout $\xi \prec \langle -h, rh \rangle$:

$$R = \max_{\lambda} \frac{h^5}{180} \mid y_\lambda^{\mathrm{V}}(\xi) \mid = \max_{\lambda, \mathrm{E}} \frac{h^5}{180} \mid f_\lambda^{\mathrm{IV}} \mid . \tag{7,2}$$

Théorème II

Si les hypothèses du théorème I sont satisfaites, on a :

$$\eta_\nu \leqq \eta_1 \cdot q^{\nu-1} + \frac{R}{1-q}(1 - q^{\nu-1}), \qquad \nu \geqq 1. \tag{7,3}$$

Démonstration

En prenant les valeurs absolues des deux membres de (7,1), nous obtenons en vertu de (2,5) et de (7,2) :

$$\begin{aligned} \mid y_\lambda(k) - Y_{\lambda\nu}(k) \mid \leqq \frac{hMn}{24} \Big[& 7 \max_{\lambda} \mid y_\lambda(k) - Y_{\lambda,\nu-1}(k) \mid \\ & + \max_{\lambda} \mid y_\lambda(-k) - Y_{\lambda,\nu-1}(-k) \mid \Big] + R, \ \nu \geqq 2, \end{aligned}$$

d'où, d'après nos définitions (5,2) et (6,1), pour $k = \pm h$:

$$\eta_\nu \leqq q\, \eta_{\nu-1} + R, \qquad \nu \geqq 2. \tag{7,4}$$

Envisageons alors l'équation aux différences :

$$u_{\nu+1} - q u_\nu = R, \qquad \nu \geqq 1. \tag{7,5}$$

Le polynôme caractéristique $z - q$ de l'équation homogène admet l'unique racine $z = q$, où q est plus petit que 1, en vertu de (5,3). D'autre part, l'équation complète (7,5) est satisfaite par la solution particulière :

$$u^* = \frac{R}{1-q}.$$

La solution générale de (7,5) est par suite

$$u_\nu = \omega q^\nu + \frac{R}{1-q}, \qquad \nu \geqq 1. \tag{7,6}$$

Nous déterminerons ω en posant

$$u_1 = \eta_1 \tag{7,7}$$

et faisant $\nu = 1$ dans (7,6), soit :

$$\omega = \frac{\eta_1}{q} - \frac{1}{q} \cdot \frac{R}{1-q},$$

de sorte que

$$u_\nu = \eta_1 \cdot q^{\nu-1} + \frac{R}{1-q}(1 - q^{\nu-1}), \qquad \nu \geqq 1. \tag{7,8}$$

D'ailleurs, avec (7,7), il est clair que

$$\eta_\nu \leqq u_\nu \qquad (\nu \geqq 1);$$

car, si cette relation existe, (7,4) et (7,5) donnent successivement :

$$\eta_{\nu+1} \leqq q\eta_\nu + R \leqq qu_\nu + R = u_{\nu+1}, \qquad \nu \geqq 1.$$

En considérant (7,8), cette dernière remarque nous permet d'établir (7,3).
Le théorème II est démontré.

§ 8. *Application pratique du théorème II*

Dans (7,3) interviennent η_1, q et R, soit par conséquent, selon (6,2) et (7,2) :

$$\max_{\lambda,E} |f''_\lambda| \text{ et } \max_{\lambda,E} |f^{IV}_\lambda|.$$

En faisant les hypothèses B, en particulier (1,3) et (1,5), BIEBERBACH (1951, 2e et 4e form. (33)) a donné une estimation de ces grandeurs :

$$|f''_\lambda| \leqq MN(n+1)(n+1+nM) = S \tag{8,1}$$

$$\begin{aligned} |f^{IV}_\lambda| &\leqq MN(n+1)\left[(n+1)^3 + 11n(n+1)^2 M + 11n^2(n+1)M^2 + n^3M^3\right] \\ &= S\left[(n+1)^2 + 10n(n+1)M + n^2M^2\right] = T. \end{aligned} \tag{8,2}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\eta_1 \leqq \frac{h^3}{6} \cdot S = \frac{9}{2} q^3 \cdot \frac{S}{M^3n^3}, \tag{8,3}$$

selon (6,2) et (5,2), puis, en vertu de (7,2) :

$$R = \frac{h^5}{180} \cdot T = \frac{27}{20} \cdot q^5 \cdot \frac{T}{M^5n^5}. \tag{8,4}$$

Ainsi, le théorème II s'exprimera par :

$$\eta_\nu \leqq \frac{9}{2} \cdot q^{\nu+2} \cdot \frac{S}{M^3n^3} + \frac{27}{20} \cdot \frac{q^5}{1-q} \cdot \frac{T}{M^5n^5}(1 - q^{\nu-1}), \qquad \nu \geqq 1. \tag{8,5}$$

Il suit immédiatement de cette dernière relation que, en général, on n'améliorera pas sensiblement η_ν en allant au delà de $\nu = 4$. Si nous posons enfin :

$$\eta = \frac{9}{2} \cdot q^5 \cdot \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{M}^3 n^3} + \frac{27}{20} \cdot \frac{q^5}{1-q} \cdot \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{M}^5 n^5}, \tag{8,6}$$

nous aurons :

$$\eta_\nu < \eta = a q^5, \qquad \nu \geqq 3, \tag{8,7}$$

a étant de la forme : $a = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu q^\mu$.

B. Seconde ordonnée

§ 9. *Convergence des itérations*

Soit les n suites :

$$\mathrm{Z}_{\lambda\nu}, \qquad \nu > 1, \nu \to \infty. \tag{9,1}$$

Théorème III

> Si les hypothèses du théorème I sont satisfaites, les n suites (9,1) sont convergentes.

La démonstration est parfaitement analogue à celle du théorème I : au lieu de (2,2), on envisage (3,2), puis (3,4) au lieu de (2,4) en remarquant que seul le terme $\frac{h}{3}\,\mathrm{G}_{\lambda\nu}$ dépend de ν, puisque $\mathrm{F}_\lambda(h)$ est, pour un h donné, une constante définie par (2,6).

§ 10. *Erreur commise dans la première approximation*

D'après une formule que donne Milne, *op. cit.*, p. 135, form. (5), on peut écrire, lorsque (1,2) et (1,4) sont satisfaites [1] :

$$y_\lambda(2h) = y_\lambda(0) - \frac{2h}{3} y'_\lambda(0) - 2h^2 y''_\lambda(0)$$
$$+ \frac{2h}{3}\left[5y'_\lambda(h) - y'_\lambda(-h)\right] + \frac{7}{45} h^5 y^{\mathrm{V}}_\lambda(\xi), \ \xi \prec \langle -h, 2h \rangle,$$

[1] Cf. aussi notre note infrapaginale, p. 15.

de sorte que l'on conclut immédiatement de l'examen de (3,1) que :

$$y_\lambda(2h) - Z_{\lambda 1} = \frac{2h}{3}\left[5\left(y_\lambda'(h) - F_\lambda(h)\right) - \left(y_\lambda'(-h) - F_\lambda(-h)\right)\right]$$
$$+ \frac{7}{45} h^5 y_\lambda^{\mathrm{v}}(\xi).$$

On obtient alors, en vertu de (2,7) et de (7,2) :

$$|y_\lambda(2h) - Z_{\lambda 1}| \leqq 4hMn \cdot \max_\lambda |y_\lambda(k) - Y_\lambda(k)| + 28R.$$

D'ailleurs, nous avons posé : $Y_{\lambda p}(k) = Y_\lambda(k)$, de sorte que :

$$\max_\lambda |y_\lambda(k) - Y_\lambda(k)| \equiv \max_\lambda |y_\lambda(k) - Y_{\lambda p}(k)| = \eta_p < \eta,\ p \geqq 3, \quad (10,1)$$

en vertu de (6,1) et de (8,7) .

Il vient donc en définitive par (5,2), pour $p \geqq 3$,

$$\zeta_1 < 12q\eta + 28R,^{1} \quad (10,2)$$

si nous posons :

$$\zeta_\nu = \max_\lambda |y_\lambda(2h) - Z_{\lambda\nu}|, \qquad \nu \geqq 1. \quad (10,3)$$

§ 11. *Erreur commise dans la ν-ième approximation*

Si les hypothèses (1,2) et (1,4) sont satisfaites, on peut écrire la formule de Simpson avec son reste, soit :

$$y_\lambda(2h) = y_\lambda(0) + \frac{h}{3}\left[y_\lambda'(0) + 4y_\lambda'(h)\right] + \frac{h}{3} y_\lambda'(2h)$$
$$- \frac{1}{90} h^5 y_\lambda^{\mathrm{v}}(2\vartheta_\lambda h), \qquad 0 \leqq \vartheta_\lambda \leqq 1.$$

Il suit de cette relation et de la définition (3,2) que, pour $\nu \geqq 2$,

$$y_\lambda(2h) - Z_{\lambda\nu} = \frac{4h}{3}\left[y_\lambda'(h) - F_\lambda(h)\right] + \frac{h}{3}\left[y_\lambda'(2h) - G_{\lambda,\nu-1}\right]$$
$$- \frac{h^5}{90} y_\lambda^{\mathrm{v}}(2\vartheta_\lambda h). \quad (11,1)$$

[1] Les relations (10,2), (11,2), (11,4), (11,5) et (12,2) sont valables pour $p < 3$ à condition d'entendre par η une majorante de η_p, par exemple : $\eta_1 \cdot q^{p-1} + \dfrac{R}{1-q}$.

Théorème IV

Les hypothèses du théorème I étant vérifiées, on a :

$$\zeta_\nu \leqq \zeta_1 q^{\nu-1} + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}\,(1 - q^{\nu-1}), \qquad \nu \geqq 1. \tag{11,2}$$

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du théorème II :

De (11,1), nous tirons en effet par (2,7), (3,5) et (7,2) :

$$|y_\lambda(2h) - \mathrm{Z}_{\lambda\nu}| \leqq \frac{4h}{3}\,\mathrm{M}n \cdot \max_\lambda |y_\lambda(h) - \mathrm{Y}_\lambda(h)|$$
$$+ \frac{h}{3}\,\mathrm{M}n \cdot \max_\lambda |y_\lambda(2h) - \mathrm{Z}_{\lambda,\nu-1}| + 2\mathrm{R}, \qquad \nu \geqq 2,$$

d'où, d'après (10,3), (10,1) et (5,2) :

$$\zeta_\nu < 4q\eta + q\zeta_{\nu-1} + 2\mathrm{R}, \qquad \nu \geqq 2. \tag{11,3}$$

Nous envisageons alors l'équation

$$u_{\nu+1} - qu_\nu = 2\,(2q\eta + \mathrm{R}), \qquad \nu \geqq 1,$$

dont la solution générale est :

$$u_\nu = \omega q^\nu + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}, \qquad \nu \geqq 1.$$

En posant : $u_1 = \zeta_1$, nous déterminons ω, soit :

$$\omega = \frac{\zeta_1}{q} - \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{q\,(1-q)}$$

et :

$$u_\nu = \zeta_1 \cdot q^{\nu-1} + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}\,(1 - q^{\nu-1}), \quad \nu \geqq 1.$$

Nous établissons ensuite, par induction complète, que :

$$\zeta_\nu < u_\nu, \qquad \nu \geqq 2.$$

C. Q. F. D.

Théorème V

Les conditions du théorème I étant remplies, on a :

$$\zeta_\nu < 2\,(4q\eta + 13\mathrm{R})\,q^{\nu-1} + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}, \quad \nu \geqq 1. \tag{11,4}$$

Démonstration

En substituant à ζ_1, dans (11,2), sa borne (10,2), nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}\zeta_\nu &< (12q\eta + 28\mathrm{R})\, q^{\nu-1} + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}\,(1 - q^{\nu-1}) \\ &= (8q\eta + 26\mathrm{R})\, q^{\nu-1} + 2\,(2q\eta + \mathrm{R})\left(\frac{1-q^{\nu-1}}{1-q} + q^{\nu-1}\right) \\ &= 2\,(4q\eta + 13\mathrm{R})\, q^{\nu-1} + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}\,(1 - q^{\nu}), \qquad \nu \geqq 1,\end{aligned}$$

et nous démontrons le théorème V.

Corollaire

Posons :

$$\zeta = 2\,(4q\eta + 13\mathrm{R})\, q + \frac{2\,(2q\eta + \mathrm{R})}{1-q}. \tag{11,5}$$

η et R contenant q^5, on a donc, en tenant compte de (10,2) :

$$\zeta_\nu < \zeta \qquad (\nu \geqq 2)\,; \qquad \zeta_\nu \leqq \beta q^5, \qquad (\nu \geqq 1), \tag{11,6}$$

β étant de la forme : $\beta = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu q^\mu$.

Remarque

Dans la pratique, on calculera successivement : S, T, η_1, R, η *et* ζ, à l'aide de : (8,1), (8,2), (8,3), (8,4), (8,6) et (11,5).

CHAPITRE III

CONTINUATION DU RÉSEAU

§ 12. *Erreur* ω_ϱ *commise dans la valeur définitive*

Si les hypothèses (1,2) et (1,4) sont vérifiées, nous pouvons écrire (MILNE, *op. cit.*, p. 135, form. (1))[1] :

[1] Il s'agit de celle des formules « ouvertes » qui correspond à la formule de SIMPSON. Le reste s'obtient par exemple par la méthode citée plus haut (cf. note infrapaginale, p. 15) ou encore par celle indiquée par STEFFENSEN (1925).

$$y_\lambda(\varrho h) = y_\lambda\Big((\varrho-4)h\Big) + \frac{4h}{3}\Big\{2y'_\lambda\Big((\varrho-3)h\Big) - y'_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big)$$

$$+ 2y'_\lambda\Big((\varrho-1)h\Big)\Big\} + \frac{28}{90}h^5 y^{\mathrm{V}}_\lambda(\xi_\lambda), \qquad \xi_\lambda \prec \langle(\varrho-4)h, \varrho h\rangle, \quad (12,1)$$

d'où, en vertu de (4,1) :

$$y_\lambda(\varrho h) - \mathrm{W}^*_\lambda(\varrho h) = y_\lambda\Big((\varrho-4)h\Big) - \mathrm{W}_\lambda\Big((\varrho-4)h\Big)$$

$$+ \frac{4h}{3}\Big\{2\Big[y'_\lambda\Big((\varrho-3)h\Big) - \mathrm{H}_\lambda\Big((\varrho-3)h\Big)\Big] - y'_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big)$$

$$+ \mathrm{H}_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big) + 2\Big[y'_\lambda\Big((\varrho-1)h\Big) - \mathrm{H}_\lambda\Big((\varrho-1)h\Big)\Big]\Big\}$$

$$+ \frac{28}{90}h^5 y^{\mathrm{V}}_\lambda(\xi_\lambda), \qquad \varrho \geqq 3.$$

En posant :

$$\omega_\varrho \begin{cases} = \eta & , \quad \varrho = \pm 1, \\ = 0 & , \quad \varrho = 0, \\ = \zeta & , \quad \varrho = 2, \\ = \max\limits_\lambda |y_\lambda(\varrho h) - \mathrm{W}_\lambda(\varrho h)|, & \quad \varrho \geqq 3, \end{cases} \qquad (12,2)$$

et rappelant, selon (4,5), que η et ζ sont respectivement des majorantes de :

$$|y_\lambda(k) - \mathrm{Y}_\lambda(k)| \equiv |y_\lambda(k) - \mathrm{W}_\lambda(k)|, \qquad k = \pm h,$$

et de :

$$|y_\lambda(2h) - \mathrm{Z}_\lambda| \equiv |y_\lambda(2h) - \mathrm{W}_\lambda(2h)|,$$

nous avons successivement par (4,7), (7,2) et (5,2) :

$$|y_\lambda(\varrho h) - \mathrm{W}^*_\lambda(\varrho h)| \leqq \omega_{\varrho-4} + \frac{4h}{3}\Big(2\mathrm{M}n\omega_{\varrho-3} + \mathrm{M}n\omega_{\varrho-2} + 2\mathrm{M}n\omega_{\varrho-1}\Big) + 56\mathrm{R}$$

$$= \omega_{\varrho-4} + 8q\omega_{\varrho-3} + 4q\omega_{\varrho-2} + 8q\omega_{\varrho-1} + 56\mathrm{R}, \ \varrho \geqq 3. \qquad (12,3)$$

Dans les mêmes conditions, la formule de SIMPSON s'écrit avec son reste :

$$y_\lambda(\varrho h) = y_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big) + \frac{h}{3}\Big\{y'_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big) + 4y'_\lambda\Big((\varrho-1)h\Big) + y'_\lambda(\varrho h)\Big\}$$

$$- \frac{h^5}{90}y^{\mathrm{V}}_\lambda(\xi_\lambda), \qquad \xi_\lambda \prec \langle(\varrho-2)h, \varrho h\rangle. \qquad (12,4)$$

Nous en tirons, en vertu de (4,2) :

$$y_\lambda(\varrho h) - W_\lambda(\varrho h) = y_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big) - W_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big) + \frac{h}{3}\Big\{y'_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big)$$
$$- H_\lambda\Big((\varrho-2)h\Big) + 4\Big[y'_\lambda\Big((\varrho-1)h\Big) - H_\lambda\Big((\varrho-1)h\Big)\Big]$$
$$+ y'_\lambda(\varrho h) - H^*_\lambda(\varrho h)\Big\} - \frac{h^5}{90} y^{\mathrm{V}}_\lambda(\xi_\lambda), \qquad \varrho \geqq 3,$$

soit, par (4,7), (4,8) et (7,2) :

$$\omega_\varrho \leqq \omega_{\varrho-2} + \frac{h}{3}\Big\{Mn\omega_{\varrho-2} + 4Mn\omega_{\varrho-1} + Mn \cdot \max_\lambda |\, y_\lambda(\varrho h) - W^*_\lambda(\varrho h)\,|\Big\}$$
$$+ 2R, \qquad \varrho \geqq 3.$$

En remplaçant enfin $|\, y_\lambda(\varrho h) - W^*_\lambda(\varrho h)\,|$ par sa majorante (12,3) et rappelant que $\dfrac{hMn}{3} = q$, nous avons :

$$\omega_\varrho \leqq (1+q)\,\omega_{\varrho-2} + 4q\omega_{\varrho-1} + q\,(\omega_{\varrho-4} + 8q\omega_{\varrho-3} + 4q\omega_{\varrho-2} + 8q\omega_{\varrho-1}$$
$$+ 56R) + 2R,$$

et finalement :

$$\omega_\varrho \leqq 4q\,(1+2q)\,\omega_{\varrho-1} + (1+q+4q^2)\,\omega_{\varrho-2} + 8q^2\omega_{\varrho-3} + q\omega_{\varrho-4}$$
$$+ 2\,(1+28q)\,R, \qquad \varrho \geqq 3. \qquad (12,5)$$

§ 13. *Etude d'une équation aux différences*

Envisageons l'équation

$$u_\varrho - 4q\,(1+2q)\,u_{\varrho-1} - (1+q+4q^2)\,u_{\varrho-2} - 8q^2u_{\varrho-3} - qu_{\varrho-4}$$
$$= 2\,(1+28q)\,R. \qquad (13,1)$$

Son polynôme caractéristique

$$P(z) = z^4 - 4q\,(1+2q)\,z^3 - (1+q+4q^2)\,z^2 - 8q^2z - q \qquad (13,2)$$

admet, d'après la règle de Descartes, exactement une racine positive :

$$z_1 = 1 + 3q + \frac{17}{2}q^2 - \frac{7}{2}q^3 + \frac{235}{8}q^4 \ldots$$

En substituant à z le trinôme : $1 + 3q + aq^2$ dans $P(z)$, nous obtenons :

$$P(1+3q+aq^2) = (2a-17)\,q^2 + (16\,a - 129)\,q^3 + (5a^2 - 10\,a - 279)\,q^4$$
$$+ (23\,a^2 - 168\,a - 216)\,q^5 + 2\,a\,(2\,a^2 - 5\,a - 108)\,q^6$$
$$+ 8\,a^2\,(a-9)\,q^7 + a^3\,(a-8)\,q^8.$$

Selon que nous posons $a = 8$ ou $a = 9$, nous avons :

$$P(1 + 3q + 8q^2) = -q^2 - q^3 - 39q^4 - 88q^5 - 320q^6 - 512q^7 < 0$$

ou :

$$P(1 + 3q + 9q^2) = q^2 + 15q^3 + 36q^4 + 135q^5 + 162q^6 + 729q^8 > 0,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$1 + 3q + 8q^2 < z_1 < 1 + 3q + 9q^2 = Z. \tag{13,3}$$

Il résulte d'ailleurs d'une proposition connue (cf. par exemple PERRON, 1933), que :

$$z_1 \geqq |z_i| \qquad (i = 2,3,4).$$

La solution générale de (13,1) est de la forme :

$$u_\varrho = \sum_{i=1}^{4} c_i z_i^\varrho - Q, \qquad c_i = \text{constante}, \; i = 1,2,3,4, \tag{13,4}$$

en posant :

$$Q = -\frac{2(1 + 28q)R}{P(1)} = \frac{2(1 + 28q)R}{6q + 20q^2}. \tag{13,5}$$

Ainsi que von MISES (1930) l'a montré, il nous suffira cependant d'envisager une solution particulière convenable de (13,1) pour obtenir une majorante de ω_ϱ. Nous le ferons de deux manières, celle indiquée par MASSERA et celle, originale, de von MISES.

§ 14. *Majorante de ω_ϱ. Lemme. Méthode de* MASSERA

En mettant dans (13,4) : $c_1 = K$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, envisageons la solution particulière

$$u_\varrho = K z_1^\varrho - Q, \qquad K = \text{const.}, \tag{14,1}$$

de l'équation (13,1).

Lemme

> Si, pour $\varrho = \nu, \nu - 1, \nu - 2, \nu - 3$, on a :
>
> $$\omega_\varrho \leqq u_\varrho, \tag{14,2}$$
>
> cette relation est valable pour tout $\varrho \geqq \nu - 3$.

Démonstration

Car, si nous posons :

$$\sigma_\varrho = \omega_\varrho - u_\varrho,$$

nous aurons, $\sigma_\varrho \leqq 0$ pour $\varrho = \nu\,, \nu - 1\,, \nu - 2\,, \nu - 3\,,$ de sorte qu'en vertu de (12,5) et de (13,1), nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}\sigma_{\nu+1} &= \omega_{\nu+1} - u_{\nu+1} \\ &\leqq 4q\,(1 + 2q)\,\sigma_\nu + (1 + q + 4q^2)\,\sigma_{\nu-1} + 8q^2\sigma_{\nu-2} + q\sigma_{\nu-3} \leqq 0\,.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Méthode de MASSERA

MASSERA (1942, p. 130) détermine K de façon que (14,2) soit satisfaite pour les quatre valeurs de départ, c'est-à-dire que :

$$\left.\begin{aligned}\omega_{-1} = \omega_1 &\leqq \frac{\mathrm{K}}{z_1} - \mathrm{Q}\,, \\ \omega_0 \;= 0 \;&\leqq \mathrm{K} - \mathrm{Q}\,, \\ \omega_1 \;&\leqq \mathrm{K}z_1 - \mathrm{Q}\,, \\ \omega_2 \;&\leqq \mathrm{K}z_1^2 - \mathrm{Q}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (14,3)$$

Ces quatre inégalités se réduisent au système :

$$\left\{\begin{aligned}\omega_1 &\leqq \frac{\mathrm{K}}{z_1} - \mathrm{Q}\,, \\ \omega_2 &\leqq \mathrm{K}z_1^2 - \mathrm{Q}\,,\end{aligned}\right.$$

puisque $z_1 > 1$, système qui est satisfait par

$$\mathrm{K} = \max_{\varrho = 0, -1, 1, 2} \frac{\omega_\varrho + \mathrm{Q}}{z_1^\varrho} = \max\left((\omega_1 + \mathrm{Q})\,z_1\,, \frac{\omega_2 + \mathrm{Q}}{z_1^2}\right). \qquad (14,4)$$

Si donc nous posons :

$$\boxed{\Omega'_\varrho \left\{\begin{aligned}&= (\omega_1 + \mathrm{Q})\,z_1^{\varrho+1} - \mathrm{Q}\,, \qquad \text{si} : \omega_2 + \mathrm{Q} \leqq (\omega_1 + \mathrm{Q})\,z_1^3 \\ &= (\omega_2 + \mathrm{Q})\,z_1^{\varrho-2} - \mathrm{Q}\,, \qquad \text{si} : \omega_2 + \mathrm{Q} \geqq (\omega_1 + \mathrm{Q})\,z_1^3\end{aligned}\right.} \qquad \begin{aligned}(14,5)\\(14,6)\end{aligned}$$

le lemme (14,2) est applicable et :

$$\omega_\varrho \leqq \Omega'_\varrho\,, \qquad \varrho \geqq -1\,,$$

le signe d'égalité se présentant pour $\varrho = -1$ dans (14,5) et pour $\varrho = 2$ dans (14,6). La majorante cherchée est donc donnée par (14,5) et (14,6).

§ 15. *Majorante de* ω_ϱ. *Méthode de* VON MISES

Selon le procédé de von MISES (1930), nous poserons :

$$\omega = \max\,(\omega_1\,, \omega_2) \qquad (15,1)$$

et nous satisferons les quatre relations (14,3) en donnant à K la valeur $(\omega + Q)\, z_1$, de sorte que nous aurons, en vertu du lemme du § 14 :

$$\omega_\varrho \leqq u_\varrho = (\omega + Q)\, z_1^{\varrho+1} - Q\,, \qquad \varrho \geqq -1\,. \tag{15,2}$$

Mais la majorante que nous nous proposons de donner pour ω_ϱ ne sera utilisée que pour $\varrho \geqq 3$. Aussi, nous pouvons améliorer ce résultat en renonçant à satisfaire l'ensemble des inégalités (14,3). L'exposant de z_1 est alors ramené de $(\varrho + 1)$ à $(\varrho - 1)$, ainsi que le montre la proposition suivante :

Théorème VI

Si les hypothèses du théorème I sont vérifiées, on a :

$$\omega_\varrho \leqq \Omega''_\varrho\,, \qquad \varrho \geqq 1\,, \tag{15,3}$$

en posant :

$$\Omega''_\varrho = \omega z_1^{\varrho-1} + Q\,(z_1^{\varrho-1} - 1)\,. \tag{15,4}$$

Démonstration

Il est en effet clair que nous ne pouvons conclure, ni pour $\varrho = -1$, ni pour $\varrho = 0$, car :

$$\frac{\omega}{z_1} > \frac{\omega}{z_1^2} > 0\,,\ \text{tandis que : } Q\left(\frac{1}{z_1^2} - 1\right) < Q\left(\frac{1}{z_1} - 1\right) < 0\,.$$

Mais, pour $\varrho = 1$, nous avons : $\omega_1 \leqq \omega = \Omega''_1$ et pour $\varrho = 2$: $\omega_2 < \omega z_1 + Q\,(z_1 - 1) = \Omega''_2$.

Pour $\varrho = 3$, l'inégalité (12,5) devient par (13,5) et (15,1) :

$$\begin{aligned}\omega_3 &\leqq 4q\,(1 + 2q)\,\omega_2 + (1 + q + 4q^2)\,\omega_1 + q\omega_1 + Q\,(6q + 20q^2)\\ &\leqq \omega\,(1 + 6q + 12q^2) + Q\,(1 + 6q + 20q^2 - 1)\,.\end{aligned} \tag{15,5}$$

Mais, selon (13,3), $z_1^2 > 1 + 6q + 25q^2 + \ldots$, de sorte que :

$$\omega_3 < \omega\, z_1^2 + Q\,(z_1^2 - 1) = \Omega''_3\,. \tag{15,6}$$

Enfin, pour $\varrho = 4$, nous aurons d'une manière analogue en tenant compte de (15,6) :

$$\begin{aligned}\omega_4 &< 4q\,(1 + 2q)\Big(\omega z_1^2 + Q\,(z_1^2 - 1)\Big) + (1 + q + 4q^2)\,\omega_2 + 8q^2\omega_1\\ &\quad + Q\,(6q + 20q^2) \leqq \omega\Big(4q\,(1 + 2q)\,z_1^2 + 1 + q + 4q^2 + 8q^2\Big)\\ &\quad + Q\Big(4q\,(1 + 2q)\,z_1^2 + 2q + 12q^2\Big)\,.\end{aligned} \tag{15,7}$$

Le coefficient de ω donne successivement :

$$\begin{aligned}
&4q(1+2q)z_1^2 + 1 + q + 4q^2 + 8q^2 \\
&\quad < 4q(1+2q)z_1^2 + (1+q+4q^2)z_1 + 8q^2 \\
&\quad < \frac{1}{z_1}\Big(z_1^4 - \mathrm{P}(z_1)\Big) = z_1^3, \qquad (15{,}8)
\end{aligned}$$

en vertu de (13,2), z_1 étant racine de $\mathrm{P}(z)$. D'autre part, le coefficient de Q en (15,7) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&4q(1+2q)z_1^2 + 2q + 12q^2 \\
&\quad = 4q(1+2q)z_1^2 + 1 + 2q + 4q^2 + 8q^2 - 1 \\
&\quad < 4q(1+2q)z_1^2 + (1+q+4q^2)z_1 + 8q^2 - 1 < z_1^3 - 1,
\end{aligned}$$

en vertu de (13,3) et de (15,8).

La relation annoncée est donc démontrée pour $\varrho = 1, 2, 3, 4$.
Dès lors, nous pouvons considérer

$$\Omega''_\varrho = \omega z_1^{\varrho-1} + \mathrm{Q}\,(z_1^{\varrho-1} - 1)$$

comme une solution particulière de (13,1) obtenue en faisant

$$\mathrm{K} = \frac{\omega + \mathrm{Q}}{z_1}$$

dans (14,1). Le lemme du § 14 est applicable et la relation (15,3) est établie pour $\varrho \geqq 1$, le signe d'égalité ne se présentant que pour $\varrho = 1$, lorsque, de plus, $\omega_1 \geqq \omega_2$.

Le théorème VI est démontré.

Remarque

Il est naturel de se demander si l'exposant de z_1 en (15,4) ne peut être encore diminué [1]. Nous montrons (appendice II, p. 39) qu'il faut alors remplacer z_1 par une quantité plus grande. Plus exactement, nous démontrons que :

$$\omega_\varrho \leqq \omega \mathrm{U}^{\varrho-2} + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}^{\varrho-2} - 1), \qquad \varrho \geqq 2, \qquad (15{,}9)$$

en posant :

$$\mathrm{U} = 1 + 6q + 12q^2, \qquad \mathrm{V} = 1 - \mathrm{P}(1) = 1 + 6q + 20q^2. \qquad (15{,}10)$$

[1] On trouve cette idée dans un mémoire de WEISSINGER (1950) ; en appliquant à notre problème la formule (2,11) de cet auteur, nous obtenons : $\omega_\varrho \leqq \omega \mathrm{V}^{\varrho-2} + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}^{\varrho-2} - 1)$, $\varrho \geqq 2$.

§ 16. *Comparaison des majorantes obtenues au* § 14 *et au* § 15

On ne peut affirmer, en général, que l'une des bornes Ω'_ϱ, Ω''_ϱ est inférieure à l'autre ; on peut toutefois préciser les cas où l'on a : $\Omega''_\varrho \geqq \Omega'_\varrho$ ou au contraire $\Omega''_\varrho < \Omega'_\varrho$.

Théorème VII

> Les hypothèses du théorème VI étant vérifiées, on a, pour $\varrho \geqq 1$,
>
> $$\Omega''_\varrho \geqq \Omega'_\varrho, \qquad \text{si : } \omega_2 + Q \geqq (\omega_1 + Q)\, z_1^2, \tag{16,1}$$
>
> $$\Omega''_\varrho < \Omega'_\varrho, \qquad \text{si : } \omega_2 + Q < (\omega_1 + Q)\, z_1^2, \tag{16,2}$$
>
> les signes d'égalité allant ensemble.

Démonstration

Nous distinguons quatre cas :

1er cas. Supposons : $\omega_2 + Q \geqq (\omega_1 + Q)\, z_1^3$, d'où : $\omega_2 > \omega_1$ et, en vertu de (15,4), puis de (14,6) :

$$\Omega''_\varrho = (\omega_2 + Q)\, z_1^{\varrho-1} - Q > (\omega_2 + Q)\, z_1^{\varrho-2} - Q = \Omega'_\varrho .$$

2e cas. Supposons : $(\omega_1 + Q)\, z_1^3 > \omega_2 + Q \geqq (\omega_1 + Q)\, z_1^2$, soit : $\omega_2 > \omega_1$ et, par (15,4) et (14,5) :

$$\Omega''_\varrho = (\omega_2 + Q)\, z_1^{\varrho-1} - Q \geqq (\omega_1 + Q)\, z_1^{\varrho+1} - Q = \Omega'_\varrho .$$

3e cas. Supposons : $(\omega_1 + Q)\, z_1^2 > \omega_2 + Q > \omega_1 + Q$, d'où : $\omega_2 > \omega_1$, soit, selon (15,4) et (14,5) :

$$\Omega''_\varrho = (\omega_2 + Q)\, z_1^{\varrho-1} - Q < (\omega_1 + Q)\, z_1^{\varrho+1} - Q = \Omega'_\varrho .$$

4e cas. Supposons enfin $\omega_1 \geqq \omega_2$, soit : $(\omega_1 + Q)\, z_1^3 > \omega_2 + Q$ et, d'après (15,4) et (14,5) :

$$\Omega''_\varrho = (\omega_1 + Q)\, z_1^{\varrho-1} - Q < (\omega_1 + Q)\, z_1^{\varrho+1} - Q = \Omega'_\varrho$$

C. Q. F. D.

§ 17. *Application pratique du théorème VII*

1. Dans Ω'_ϱ comme dans Ω''_ϱ, on pourra remplacer z_1 par sa majorante

$$Z = 1 + 3q + 9q^2 ,$$

puisque l'on a $\varrho \geqq 3$ et que l'exposant minimum de z_1 est alors : $\varrho - 2 \geqq 1$.

2. Les bornes tirées de (14,5), (14,6) et (15,4) sont toutes de la forme :

$$CZ^{\varrho} - Q, \tag{17,1}$$

la constante C étant définie par :

$$C \begin{cases} = \max\left((\omega_1 + Q)\,Z, \dfrac{\omega_2 + Q}{Z^2}\right), & \text{si : } \omega_2 + Q \geqq (\omega_1 + Q)\,Z^2, \quad (17,2) \\[2ex] = \max\left(\dfrac{\omega_1 + Q}{Z}, \dfrac{\omega_2 + Q}{Z}\right), & \text{si : } \omega_2 + Q < (\omega_1 + Q)\,Z^2, \quad (17,3) \end{cases}$$

d'après le théorème VII.

3. D'autre part,

$$Z^{\varrho} = (1 + 3q + 9q^2)^{\varrho} = \left(1 + \frac{(3q + 9q^2)\,\varrho}{\varrho}\right)^{\varrho} < e^{(3q + 9q^2)\,\varrho},$$

de sorte que :

$$\omega_{\varrho} < Ce^{(3q + 9q^2)\,\varrho} - Q. \tag{17,4}$$

4. A l'extrémité de l'intervalle fermé, nous aurons donc :

$$\omega_r < Ce^{(3q + 9q^2)\,r} - Q < Ce^{12qr} - Q = Ce^{4h\mathrm{M}nr} - Q = Ce^{4\mathrm{M}n\mathrm{X}} - Q, \tag{17,5}$$

en vertu de (5,2) et de (3).

5. Notons que si $q < \dfrac{1}{r}$, la borne précédente peut être quelque peu améliorée par :

$$\omega_r < Ce^{(3q + 9q^2)\,r} - Q < Ce^{3qr + 9q^2r^2} - Q = Ce^{\mathrm{M}n\mathrm{X}\,(1 + \mathrm{M}n\mathrm{X})} - Q. \tag{17,6}$$

6. Enfin, nous avons vu que si l'on calcule quatre valeurs approchées des premières ordonnées et deux de la seconde, on peut écrire :

$$\eta^p < \eta = \omega_1 = \alpha q^5,\ p = 4, \qquad \zeta_s < \zeta = \omega_2 \leqq \beta q^5,\ s = 2,$$

α et β étant de la forme :

$$a_0 + a_1 q + \ldots + a_{\mu} q^{\mu} + \ldots \tag{17,7}$$

D'autre part, en vertu de (8,4) et de (13,5), $Q = \gamma q^4$, γ étant aussi de la forme (17,7). Il suit de là et de (17,2), (17,3), que $C = \delta q^4$, δ étant encore de la forme (17,7).

On peut donc dire que si h est « petit », l'erreur ω_r sera grossièrement proportionnelle à h^4, bien que l'erreur de quadrature des formules d'intégration (12,1) et (12,4) soit de l'ordre de h^5. Si il est nécessaire [1] de remplacer le pas h par le pas $\dfrac{h}{2}$, on diminue l'erreur, grossièrement, dans le rapport de 16 à 1.

[1] MILNE, *op. cit.*, p. 138, rem. 2 : « If the error $E_2 = D/29$ proves to be larger than desired accuracy permits, it is necessary to shorten the interval *h*. Cutting the interval in half will divide the error by about 32. »

Cf. à propos de cette dernière affirmation notre note infrapaginale, p. 9.

CHAPITRE IV

EXEMPLE

§ 18. Etant donné :

$$y' = f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad y(0) = 0, \tag{18,1}$$

calculer $y(1)$.

On ne peut intégrer (18,1) au moyen des fonctions élémentaires ; mais la solution particulière cherchée est (KRYLOFF, 1935) :

$$y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7}\sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{7}{4}} + \frac{1}{7} x^2 + \frac{1}{49}\sqrt{\frac{2}{3}}\, x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{1715} x^{\frac{5}{2}} - \ldots ; \tag{18,2}$$

d'autre part, on a (MOIGNO, 1844) :

$$y = \vartheta \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x \sqrt{\vartheta^2 \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3} \vartheta x^{\frac{3}{2}}}, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1 . \tag{18,3}$$

Dès que $\mu > 1$, la dérivée $y^{(\mu)}(x)$ n'existe que pour $x > 0$. Les formules (2,1), (2,2) et (3,1) sont dès lors inapplicables si, partant de $y(0)$, on veut utiliser la méthode de MILNE. Avec KRYLOFF, nous tirons $y(0{,}1)$ de (18,2) et nous partons de la nouvelle condition initiale :

$$y(0{,}1) = 0{,}030\,90 . \tag{18,4}$$

Un changement de variable évident : $\xi = x - 0{,}1$ est alors à opérer dans l'application des formules des § 2, § 3 et § 4. Nous utiliserons le pas $h = 0{,}025$ de $x = 0{,}1$ à $x = 0{,}3$, puis, de $x = 0{,}3$ à $x = 1$, le pas $h' = 2h = 0{,}05$.

Nous obtenons tout d'abord [1] :

$$y'(0{,}1) = 0{,}492\,011\,72\ (+\ 0{,}5)\ , y''(0{,}1) = 2{,}980\,617\,28\ (+\ 0{,}4)$$

puis, en arrondissant systématiquement à la huitième décimale, les valeurs portées dans les tableaux I à IV. Dans le calcul des valeurs de départ, nous avons cessé les itérations lorsque la cinquième décimale ne changeait plus.

Par (18,3), MOIGNO a obtenu :

$$1{,}188\,79 < y(1) < 1{,}376\,87 ,$$

et KRYLOFF :

$y(1) = 1{,}291\,14$, par la méthode de RUNGE et $y(1) = 1{,}291\,37$ par celle d'ADAMS.

[1] Dans tous nos résultats, les nombres indiqués entre parenthèses donnent les bornes des erreurs commises en arrondissant, exprimées en unités de la dernière décimale.

Ainsi, 2,136 423 23 ($\pm$ 2,8) signifie : 2,136 423 23 $\pm$ 2,8 $\cdot 10^{-8}$ et 0,492 011 72 (+ 0,5) représente un nombre compris entre 0,492 011 720 et 0,492 011 725.

Intégration de $x = 0{,}1$ à $x = 0{,}3$. Pas : $h = 0{,}025$

Tableau I : Valeurs de départ

ν	Premières ordonnées				Seconde ordonnée	
	Y_ν (0,075)	F_ν (0,075)	Y_ν (0,125)	F_ν (0,125)	Z_ν (0,150)	G_ν (0,150)
1	0,019 531 15 (± 0,4)	0,413 615 17 (± 2,4)	0,044 131 73 (+ 0,7)	0,563 628 93 (± 1,2)	0,059 042 55 (— 0,1)	0,630 285 06 (± 0,4)
2	0,019 562 47 (— 0,3)	0,413 727 17 (± 2,1)	0,044 106 55 (+ 1,2)	0,563 569 00 (± 1,7)	0,059 038 08 (± 0,2)	0,630 275 86 (± 0,9)
3	*0,019 563 22 (± 0,5)*	0,413 729 85 (± 2,8)	*0,044 106 23 (± 1,2)*	0,563 568 22 (± 3)	*0,059 038 00 (— 0,6)*	0,630 275 69 (± 1,2)

Les *valeurs de départ définitives* sont *en italique*.

Tableau II : Continuation du réseau

x	$W^*(x)$	$H^*(x)$	Valeurs définitives $W(x)$	Valeurs définitives $H(x)$	$D \cdot 10^8$
0,175	0,075 596 77 (± 1)	0,693 278 68 (± 2,5)	0,075 589 14 (± 1,7)	0,693 264 80 (± 3,4)	763
0,200	0,093 679 68 (± 0,7)	0,753 284 95 (± 2,2)	0,093 676 50 (± 0,9)	0,753 279 76 (± 2,2)	318
0,225	0,113 234 43 (± 1,9)	0,810 844 89 (± 3,1)	0,113 232 71 (± 2,1)	0,810 842 33 (± 3,6)	172
0,250	0,134 202 48 (— 0,9)	0,866 336 56 (± 0,8)	0,134 201 38 (± 1,1)	0,866 335 07 (± 2)	110
0,275	0,156 535 38 (± 2,6)	0,920 049 94 (± 5,5)	0,156 534 65 (± 2,5)	0,920 049 02 (± 3,8)	73
0,300	0,180 191 42 (± 1,6)	0,972 212 15 (± 2,3)	0,180 190 91 (± 1,6)	0,972 211 55 (± 2,4)	51

Intégration de $x = 0{,}3$ à $x = 1$. Pas : $h' = 0{,}05$

TABLEAU III : Valeurs de départ tirées des tableaux I et II

x	W (x)	H (x)
0,15	0,059 038 00 (— 0,6)	0,630 275 69 (± 1,2)
0,20	0,093 676 50 (± 0,9)	0,753 279 76 (± 2,2)
0,25	0,134 201 38 (± 1,1)	0,866 335 07 (± 2)
0,30	0,180 190 91 (± 1,6)	0,972 211 55 (± 2,4)

TABLEAU IV : Continuation du réseau

			Valeurs définitives		
x	W* (x)	H* (x)	W (x)	H (x)	$D' \cdot 10^8$
0,35	0,231 347 84 (± 1,7)	1,072 594 30 (± 2,2)	0,231 330 97 (± 1,7)	1,072 576 76 (± 2,3)	1687
0,40	0,287 383 97 (± 1,7)	1,168 537 59 (± 1,9)	0,287 375 18 (± 1,9)	1,168 529 39 (± 1,9)	879
0,45	0,348 128 38 (± 1,9)	1,260 844 44 (± 2,1)	0,348 123 28 (± 2,2)	1,260 840 12 (± 2,2)	510
0,50	0,413 411 20 (± 2,5)	1,350 077 39 (± 2,3)	0,413 407 97 (± 2,4)	1,350 074 88 (± 2,4)	323
0,55	0,483 088 86 (± 2,9)	1,436 665 79 (± 2,2)	0,483 086 70 (± 2,8)	1,436 664 24 (± 2,6)	216
0,60	0,557 037 44 (± 3,1)	1,520 946 08 (± 2,3)	0,557 035 93 (± 3,2)	1,520 945 07 (± 2,6)	151
0,65	0,635 148 32 (± 3,5)	1,603 187 70 (± 2,9)	0,635 147 24 (± 3,4)	1,603 187 02 (± 3,1)	108
0,70	0,717 325 13 (± 3,7)	1,683 610 52 (± 2,8)	0,717 324 32 (± 4)	1,683 610 04 (± 2,9)	81
0,75	0,803 481 58 (± 3,8)	1,762 396 74 (± 2,7)	0,803 480 97 (± 3,8)	1,762 396 40 (± 2,6)	61
0,80	0,893 539 72 (± 4,5)	1,839 699 49 (± 3)	0,893 539 24 (± 4,4)	1,839 699 24 (± 3,3)	48
0,85	0,987 428 72 (± 4,7)	1,915 648 93 (± 2,9)	0,987 428 34 (± 4,3)	1,915 648 74 (± 2,8)	38
0,90	1,085 083 72 (± 5,3)	1,990 356 82 (± 2,9)	1,085 083 42 (± 5,1)	1,990 356 67 (± 3,2)	30
0,95	1,186 445 18 (± 5,4)	2,063 920 07 (± 3,7)	1,186 444 93 (± 4,8)	2,063 919 96 (± 2,9)	25
1,00	1,291 457 96 (± 5,9)	2,136 423 32 (± 2,7)	1,291 457 75 (± 5,5)	2,136 423 23 (± 2,8)	21

Estimation de l'erreur commise

Détermination de M *et de* N

Les dérivées partielles de $y = f(u_1, u_2) = \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}$ sont en valeur absolue :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_\varkappa} = \frac{1}{2} u_\varkappa^{-\frac{1}{2}}, \left|\frac{\partial^\mu f}{\partial u_\varkappa^\mu}\right| = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mu - 3)}{2^\mu} u_\varkappa^{\frac{1-2\mu}{2}}, \ \varkappa = 1{,}2, \mu > 1, \\ \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial u_1^\mu \, \partial u_2^\nu} = 0, \qquad \mu, \nu \geqq 1. \end{aligned}\right\} \quad (18{,}5)$$

La fonction $y(x)$ croît avec x sur le segment $\langle 0{,}075 \, , \, 1 \rangle$, puisque $y'(x) > 0$. On aura donc des bornes supérieures de $\left|\frac{\partial^\mu f}{\partial u_\varkappa^\mu}\right|$ en mettant en (18,5) : $u_1 = x = 0{,}075$ et $u_2 = y = y(0{,}075)$. Par (18,3), il vient : $y(0{,}075) > 0{,}013\,693\,6$ et l'on peut déterminer M et N selon (1,5) par :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} < 1{,}830 \leqq \mathrm{MN}, && \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| < 12{,}22 \leqq \mathrm{MN}, \\ &\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} < 244{,}8 \leqq \mathrm{MN}, && \left|\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right| < 8172 \leqq \mathrm{MN}, \end{aligned} \quad (18{,}6)$$

d'une part, puis par

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial y} < 4{,}279 \leqq \mathrm{M}, && \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right| < 156{,}3 \leqq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}} \\ &\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} < 1{,}714 \cdot 10^4 \leqq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}^2}, && \left|\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right| < 3{,}129 \cdot 10^6 \leqq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}^3}, \end{aligned} \quad (18{,}7)$$

d'autre part, tandis que (18,3) donne enfin, par (1,3) :

$$f(x, y) \leqq y'(1) < 2{,}173\,5 \leqq \mathrm{N}. \quad (18{,}8)$$

Le système d'inégalités (18,6), 18,7), (18,8) est satisfait dès que : $\mathrm{N} = 2{,}174$, $\mathrm{M} = 3{,}129 \cdot 10^6 (2{,}174)^3$. Il est clair que M est beaucoup trop grand pour avoir une utilité pratique pour le calcul de h par (5,3) ou pour celui de S et de T par (8,1) et (8,2) respectivement. Nous évitons cette difficulté [1] en faisant les remarques suivantes :

1. Pour assurer la convergence des itérations (théorèmes I et III), il suffit que :

$$\frac{h \cdot \max\limits_{\mathrm{E}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}{3} < 1,$$

soit, d'après (18,7) : $h < 0{,}7$. Le pas 0,025 convient donc.

[1] Une difficulté du même ordre se présente si l'on estime l'erreur de la méthode de Runge-Kutta. Bieberbach, *op. cit.*, (1) et (5), suppose en effet : $h\mathrm{M} \leqq 1$.

2. Quant au calcul de S et de T, les formules (8,1) et (8,2) de BIEBERBACH se simplifient dans notre cas, puisque, selon (18,5) :

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = 0\,, \qquad \mu\,, \nu \geqq 1\,.$$

Posons en effet :

$$\left|\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right| \leqq A_\mu\,, \qquad \left|\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right| \leqq B_\mu\,, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4, \tag{18,9}$$

soit, selon BIEBERBACH (1951, form. (26) et (25), p. 240) :

$$\left.\begin{aligned}
\left|\frac{df}{dx}\right| &\leqq A_1 + B_1 N = \Gamma_1\,,\\
\left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right| &\leqq A_2 + B_2 N^2 + B_1 \Gamma_1 = \Gamma_2\,,\\
\left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right| &\leqq A_3 + B_3 N^3 + 3 B_2 \Gamma_1 N + B_1 \Gamma_2 = \Gamma_3\,,\\
\left|\frac{d^4 f}{dx^4}\right| &\leqq A_4 + B_4 N^4 + 6 B_3 \Gamma_1 N^2 + 4 B_2 \Gamma_2 N + 3 B_2 \Gamma_1^2 + B_1 \Gamma_3 = \Gamma_4\,.
\end{aligned}\right\} \tag{18,10}$$

Dans nos estimations, Γ_2 et Γ_4 remplacent respectivement S et T et nous évitons ainsi de passer par M.

3. Nous avons vu que f croît avec x, au contraire des $\left|\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right|$ et des $\left|\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right|$, $(\mu = 1, 2, 3, 4)$. Nous obtiendrons une estimation plus fine de l'erreur commise en fractionnant le segment $\langle 0{,}075,\ 1 \rangle$. Pour les premières ordonnées, seul le segment $\langle 0{,}075\,,\ 0{,}125 \rangle$ entre en considération.

Estimation de l'erreur commise dans le calcul des premières ordonnées

De (18,3), nous tirons pour $x = 0{,}125 : f(x, y) < 0{,}598\,8 = N$, puis de (18,6), (18,7) et (18,9), soit pour $x = 0{,}075 : A_1 = 1{,}830$, $A_2 = 12{,}22$, $A_3 = 244{,}8$, $A_4 = 8172$, $B_1 = 4{,}279$, $B_2 = 156{,}3$, $B_3 = 1{,}714 \cdot 10^4$, $B_4 = 3{,}129 \cdot 10^6$ d'où, par (18,10) :

$$|f''| \leqq \Gamma_2 = 87{,}06\,, \quad |f^{\mathrm{IV}}| \leqq \Gamma_4 = 6{,}378\ .\ 10^5\,.$$

Les formules (8,3) et (8,4) donnent alors : $\eta_1 \leqq 2{,}269 \cdot 10^{-4}$ et $R = 3{,}462 \cdot 10^{-5}$. D'ailleurs $q = 3{,}565\,833 \ldots \cdot 10^{-2}$, en vertu de (5,2), ce qui nous permet enfin d'écrire, selon (7,3) :

$$\eta_3 < \eta_1 q^2 + \frac{R}{1-q} < 0{,}029 \cdot 10^{-5} + 3{,}590 \cdot 10^{-5} = 3{,}619 \cdot 10^{-5}\,.$$

Cette première estimation peut être améliorée. Nous avons, en effet (tableau I, p. 31) :

$$Y(0{,}075) = 0{,}019\,563\,22 \pm 0{,}5 \cdot 10^{-8}\,,$$
$$Y(0{,}125) = 0{,}044\,106\,23 \pm 1{,}2 \cdot 10^{-8}\,,$$

soit : $y\,(0{,}075) > 0{,}019\,527$, $\qquad y\,(0{,}125) < 0{,}044\,143$.

Par (18,5), nous obtenons alors de nouvelles valeurs des B_μ :

$$B_1 = 3{,}579\,,\ B_2 = 91{,}65\,,\ B_3 = 7043\,,\ B_4 = 9{,}014 \cdot 10^5$$

et nous prenons pour les A_μ des valeurs plus fines :

$$A_1 = 1{,}826\,,\ A_2 = 12{,}18\,,\ A_3 = 243{,}6\,,\ A_4 = 8116\,, \qquad (18{,}11)$$

avec $N = 0{,}563\,67$. Nous tirons alors de (18,10) : $|f''| \leqq \Gamma_2 = 55{,}07$, $|f^{\text{IV}}| \leqq \Gamma_4 = 1{,}745 \cdot 10^5$, puis, de la même façon que précédemment (p. 34) :

$$\eta_1 \leqq 1{,}435 \cdot 10^{-4}\,, \qquad R = 9{,}477 \cdot 10^{-6}\,, \qquad q = 0{,}029\,825\,,$$

$$\eta_3 < \eta_1 q^2 + \frac{R}{1-q} < 0{,}012\,8 \cdot 10^{-5} + 0{,}976\,2 \cdot 10^{-5} = 0{,}989\,0 \cdot 10^{-5}\,.$$

Nous poserons :

$$\eta = 0{,}989 \cdot 10^{-5} \qquad (18{,}12)$$

L'erreur commise dans le calcul des premières ordonnées : $Y(0{,}075)$, $Y(0{,}125)$ est inférieure à 10^{-5} .

On a donc, en tenant compte des erreurs faites en arrondissant :

$$y\,(0{,}075) = 0{,}019\,563\,22 \pm 989{,}5 \cdot 10^{-8}\,,$$
$$y\,(0{,}125) = 0{,}044\,106\,23 \pm 990{,}2 \cdot 10^{-8}$$

d'où, pour les B_μ :

$$B_1 = 3{,}577\,, \quad B_2 = 91{,}46\,, \quad B_3 = 7018\,, \quad B_4 = 8{,}971 \cdot 10^5 \qquad (18{,}13)$$

Estimation de l'erreur commise dans le calcul de la seconde ordonnée

Nous envisageons maintenant le segment $\langle 0{,}075\,,\,0{,}15 \rangle$. Tandis que les $\left|\dfrac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right|$, $\left|\dfrac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right|$ prennent leur plus grande valeur en $x = 0{,}075$ $f(x, y)$ sera maximum en $x = 0{,}15$. De (18,3), nous tirons :

$$f(x, y) < 0{,}672\,93 = N.$$

Mettant cette valeur en (18,10), ainsi que les valeurs des A_μ et des B_μ données respectivement par (18,11) et (18,13), nous avons :

$$|f^{IV}| \leqq \Gamma_4 = 3{,}069 \cdot 10^5, \quad \text{puis, par (8,4) :} \quad R = 1{,}666 \cdot 10^{-5}.$$

Quant à η, nous le trouvons en (18,12) et nous obtenons :

$$q = \frac{hB_1}{3} = 0{,}029\,808\,33 \ldots . \tag{18,14}$$

L'estimation désirée nous est alors fournie par (11,4) :

$$\zeta_3 < 2\,(4q\eta + 13\,R)\,q^2 + \frac{2\,(2q\eta + R)}{1-q},$$

soit :

$$\zeta_3 < 0{,}038\,7 \cdot 10^{-5} + 3{,}555\,7 \cdot 10^{-5} = 3{,}594\,4 \cdot 10^{-5}.$$

Cette première estimation peut être améliorée. Nous avons en effet : $Z\,(0{,}15) = 0{,}059\,038\,00 - 0{,}6 \cdot 10^{-8}$, soit : $y\,(0{,}15) < 0{,}059\,074$, d'où $N = 0{,}630\,36$, $|f^{IV}| \leqq \Gamma_4 = 2{,}476\,87 \cdot 10^5$, $R = 1{,}344\,7 \cdot 10^{-5}$, puis :

$$\zeta_3 < 0{,}031\,3 \cdot 10^{-5} + 2{,}893\,8 \cdot 10^{-5} = 2{,}925\,1 \cdot 10^{-5} = \zeta. \tag{18,15}$$

> L'erreur commise dans le calcul de la seconde ordonnée $Z\,(0{,}15)$ est inférieure à $3 \cdot 10^{-5}$.

On a donc, en tenant compte des erreurs d'arrondissement :

$$y\,(0{,}15) = 0{,}059\,038\,00 \pm 2925{,}1 \cdot 10^{-8} - 0{,}6 \cdot 10^{-8} > 0{,}059\,008. \tag{18,16}$$

Ce résultat sera utilisé plus loin.

Estimation de l'erreur commise dans la continuation du réseau, de $x = 0{,}175$ à $x = 0{,}3$

Nous utiliserons ici (17,1) avec, selon le cas, (17,2) ou (17,3).

Commençons par calculer une valeur de R valable sur le segment $\langle 0{,}075\,, 0{,}3 \rangle$. Les A_μ sont donnés par (18,11), les B_μ par (18,13) et N s'obtient en envisageant (18,3), soit : $y\,(0{,}3) < 0{,}209\,35$, $f\,(x,y) < 1{,}005\,31 = N$, de sorte que $|f^{IV}| \leqq \Gamma_4 = 1{,}242\,43 \cdot 10^6$ et $R = 6{,}743\,8 \cdot 10^{-5}$. De (13,5) et (18,14), nous tirons ensuite $Q = 1{,}258\,7 \cdot 10^{-3}$. Il s'agit alors de comparer $(\omega_1 + Q)\,Z^2$ à $(\omega_2 + Q)$. Z est une majorante de z_1 donnée par (13,3) : $Z = 1{,}097\,421\,831$. D'ailleurs, $\omega_1 = \eta$ et $\omega_2 = \zeta$, que nous trouvons respectivement en (18,12) et (18,15). Il vient alors :

$$(\omega_1 + Q)\,Z^2 = 126{,}86 \cdot 10^{-5}\,(1{,}097\,421\,831)^2 > \omega_2 + Q = 128{,}80 \cdot 10^{-5}.$$

Il convient donc d'utiliser ici Ω''_ϱ en posant, selon (17,3) :

$C = \frac{\omega_2 + Q}{Z} = \frac{128{,}80 \cdot 10^{-5}}{Z}$ dans (17,1), ce qui conduit à :

$$\omega_\varrho < 128{,}80 \cdot 10^{-5} (1{,}097\,421\,831)^{\varrho-1} - 1{,}258\,7 \cdot 10^{-3} .$$

Pour $x = 0{,}3$, $\varrho = 8$, soit : $\omega_8 < 1{,}210\,6 \cdot 10^{-3}$.

Cette première estimation peut être améliorée. Nous avons en effet : W (0,3) $= 0{,}180\,190\,91 \pm 1{,}6 \cdot 10^{-8}$, soit : $y\,(0{,}3) < 0{,}181\,402$, d'où $N = 0{,}973\,637$, $|f^{IV}| \leqq \Gamma_4 = 1{,}106\,53 \cdot 10^6$, $R = 6{,}006\,21 \cdot 10^{-5}$, $Q = 1{,}121\,02 \cdot 10^{-3}$ et enfin :

$$\omega_\varrho < 115{,}028 \cdot 10^{-5} (1{,}097\,421\,831)^{\varrho-1} - 1{,}121\,02 \cdot 10^{-3} . \tag{18,17}$$

Pour $x = 0{,}3$, $\varrho = 8$, soit :

$$\omega_8 < 1{,}084\,04 \cdot 10^{-3} . \tag{18,18}$$

L'erreur commise dans le calcul de W (0,3) est inférieure à $1{,}1 \cdot 10^{-3}$.

On a donc, en tenant compte des erreurs faites en arrondissant : $y\,(0{,}3) = 0{,}180\,190\,91 \pm 108\,404 \cdot 10^{-8} \pm 1{,}6 \cdot 10^{-8}$.

D'ailleurs, l'estimation de ω_ϱ ($\varrho = 3, 4, \ldots, 8$) peut être améliorée en procédant *de proche en proche*, soit en calculant N, A_μ, B_μ, Γ_μ, R et q tout d'abord pour le segment $\langle 0{,}075 , 1{,}75 \rangle$ ($\varrho = 3$), puis pour le segment $\langle 0{,}1 , 0{,}2 \rangle$ ($\varrho = 4$) et ainsi de suite et en substituant en (12,5).

Estimation de l'erreur commise pour $x = 1$.

Partant des valeurs : W (0,15) , W (0,2) , W (0,25) et W (0,3) du tableau III, p. 32, nous avons continué l'intégration avec le pas $h' = 0{,}05$. Ces valeurs de départ sont affectées d'erreurs bornées respectivement par ω_2 , ω_4 , ω_6 , ω_8 . Nous poserons maintenant : $\omega_{2\varrho} = \omega'_{\varrho'}$, puis : $\omega' = \max\limits_{\varrho'=1,2,3,4} \omega'_{\varrho'}$; la relation (18,17) montre immédiatement que $\omega' = \omega_8$. Désignons par q', Z', R' et Q' les valeurs que prennent q, Z, R et Q calculées sur le segment $\langle 0{,}15 , 1 \rangle$, lorsqu'on remplace dans leurs expressions respectives le pas $h = 0{,}025$ par le nouveau pas $h' = 2\,h = 0{,}05$.

En appliquant maintenant la méthode de la solution particulière majorante de von Mises à (12,5), nous obtenons [1] :

$$\omega'_{\varrho'} < (\omega' + Q')\, Z'^{\varrho'} - Q' , \qquad \varrho' \geqq 1 . \tag{18,19}$$

[1] Ce résultat n'est pas susceptible d'une amélioration analogue à celle qui conduit au théorème VI.

Nous calculons successivement :
$A_1 = 1{,}292$, $A_2 = 4{,}306$, $A_3 = 43{,}07$, $A_4 = 717{,}3$, valeurs obtenues par (18,5) pour $x = 0{,}15$, $B_1 = 2{,}058\,8$, $B_2 = 17{,}45$, $B_3 = 443{,}7$, $B_4 = 1{,}878\,9 \cdot 10^4$, tirées de (18,5) pour $y\ (0{,}15) > 0{,}059\,008$, selon (18,16) ; puis, en tenant compte de (18,8) et (18,10) : $|f^{\text{IV}}| \leqq \Gamma_4 = 5{,}206 \cdot 10^5$, $R' = 9{,}040\,7 \cdot 10^{-4}$, $q' = 0{,}034\,313\,333 \cdots$, $Q' = 1{,}545\,7 \cdot 10^{-2}$, $Z' = 1{,}113\,542$. Nous avons d'ailleurs en vertu de (18,18) : $\omega' = \omega_8 < 1{,}085 \cdot 10^{-3}$, d'où : $\omega' + Q' < 1{,}654\,2 \cdot 10^{-2}$.

Pour $x = 1$, $\varrho' = 18$, (18,19) donne enfin :

$$\begin{aligned}\omega'_{18} &< 1{,}654\,2 \cdot 10^{-2}\ (1{,}113\,542)^{18} - 1{,}545 \cdot 10^{-2} \\ &< 0{,}114\,65 - 0{,}015\,45 = \mathbf{0{,}099\,20}.\end{aligned}$$

Il nous faut bien reconnaître que cette borne est grande. Interprété à la lettre, ce résultat signifierait que la valeur calculée pour $x = 1$ par la méthode de Milne n'est pas plus précise que celle donnée par l'abbé Moigno. Mais, ici de nouveau, nous aurions pu calculer ω'_5 , ω'_6 , etc., de proche en proche à l'aide de (12,5) et améliorer ainsi cette estimation.

Par exemple, le fractionnement de la fin du réseau en deux segments : $\langle 0{,}15\ ,\ 0{,}6 \rangle$ et $\langle 0{,}45\ ,\ 1 \rangle$, conduit, par des calculs analogues, à :

$$\omega'_7 < 0{,}007\,369, \qquad y\ (0{,}45) > 0{,}340\,754,$$

$$\omega'_{10} < 0{,}011\,892, \qquad y\ (0{,}6) < 0{,}568\,928,$$

puis : $\omega'_{18} < 0{,}024\,311$,

soit : $y\ (1) = 1{,}291\,457\,75 \pm 0{,}024\,311 \pm 5{,}5 \cdot 10^{-8}$,

d'où : $1{,}267\,14 < y\ (1) < 1{,}315\,77$.

Il convient de dire que d'autres exemples se prêtent beaucoup mieux à l'estimation que le nôtre [1]. Si nous ne les avons pas développés ici, c'est précisément parce que l'application de nos formules ne présente alors aucune difficulté.

APPENDICE I

Estimation de a *(1,1)*

Afin que les hypothèses B soient vérifiées dans le domaine E, il suffit de prendre a égal à :

$$\max\Big(|Y_{\lambda\nu}(k) - y_\lambda(0)|, |Z_{\lambda\nu} - y_\lambda(0)|, |W_\lambda(\varrho h) - y_\lambda(0)|, |W^*_\lambda(\varrho h) - y_\lambda(0)|\Big),$$
$$k = \pm h, \qquad \nu \geqq 1, \qquad \varrho = 3{,}4, \ldots, r.$$

[1] Cf. par exemple : Milne (1926), (1949, p. 136-138) et *Marchant Methods* (1944, p. 3-6).

A cet effet, nous voyons immédiatement que :

$$
\begin{array}{ll}
|\mathrm{Y}_{\lambda\nu}(k) - y_\lambda(0)| \leqq \eta_\nu + h\mathrm{N}, & \nu \geqq 1, \\
|\mathrm{Z}_{\lambda\nu} - y_\lambda(0)| \leqq \zeta_\nu + 2h\mathrm{N}, & \nu \geqq 1, \\
|\mathrm{W}_\lambda(\varrho h) - y_\lambda(0)| \leqq \omega_\varrho + \varrho h\mathrm{N}, & \varrho \geqq 3,4, \ldots, r, \\
|\mathrm{W}^*_\lambda(\varrho h) - y_\lambda(0)| \leqq |\mathrm{W}^*_\lambda(\varrho h) - y_\lambda(\varrho h)| + \varrho h\mathrm{N}, & \varrho = 3,4, \ldots, r.
\end{array}
$$

D'ailleurs, en vertu de (12,3), on a :

$$|\mathrm{W}^*_\lambda(\varrho h) - y_\lambda(\varrho h)| \leqq (1 + 20q)\,\omega_\varrho + 56\mathrm{R}, \qquad \varrho = 3,4, \ldots, r.$$

Si nous posons :

$$\varepsilon = \max(\eta_\nu, \zeta_\nu, 21\omega_\varrho), \qquad \nu \geqq 1, \qquad \varrho = 3,4, \ldots, r,$$

nous aurons une borne inférieure de a en :

$$\varepsilon + 56\mathrm{R} + rh\mathrm{N} = \varepsilon + 56\mathrm{R} + \mathrm{XN} < a.$$

Les quantités q, ε, R s'expriment en fonction de h, M, N et n au moyen de (5,2), (8,3), (8,6), (8,4) .

APPENDICE II

Démonstration de la relation (15,9)

Nous démontrons ici que l'on a :

$$\omega_\varrho \leqq \omega \mathrm{U}^{\varrho-2} + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}^{\varrho-2} - 1) = \Omega'''_\varrho, \qquad \varrho \geqq 2, \qquad (15,9)$$

avec :

$$\mathrm{U} = 1 + 6q + 12q^2, \qquad \mathrm{V} = 1 + 6q + 20q^2, \qquad \omega = \max(\omega_1, \omega_2).$$

En effet, pour $\varrho = -1, 0, 1$, nous ne pouvons rien dire de la validité de (15,9), puisque alors : $\omega \mathrm{U}^{\varrho-2} > 0$, $\mathrm{Q}\,(\mathrm{V}^{\varrho-2} - 1) < 0$.

Mais pour $\varrho = 2$, nous avons : $\omega_2 \leqq \omega = \Omega'''_2$ et pour $\varrho = 3$: $\omega_3 \leqq \Omega'''_3$, en vertu de (15,5).

Quant à $\varrho = 4$, l'inégalité (12,5) devient, par (13,5) et (15,1) :

$$
\begin{aligned}
\omega_4 \leqq\; & 4q\,(1 + 2q)\Big(\omega \mathrm{U} + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V} - 1)\Big) \\
& + (1 + q + 4q^2 + 8q^2)\,\omega + \mathrm{Q}\,(6q + 20q^2) \\
& < \omega\Big(4q\,(1 + 2q)\,\mathrm{U} + \mathrm{U}\Big) + \mathrm{Q}\Big(4q\,(1 + 2q)\,(\mathrm{V} - 1) + \mathrm{V} - 1\Big) \\
& < \omega \mathrm{U}^2 + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V} - 1)\,(\mathrm{V} + 1) = \Omega'''_4.
\end{aligned}
$$

Enfin, pour $\varrho = 5$, nous obtenons de façon analogue :

$$\begin{aligned}
\omega_5 &< 4q\,(1+2q)\left(\omega\mathrm{U}^2 + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}^2-1)\right) \\
&\quad + (1+q+4q^2)\left(\omega\mathrm{U} + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}-1)\right) + (8q^2+q)\,\omega + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}-1) \\
&= \omega\left(4q\,(1+2q)\,\mathrm{U}^2 + (1+q+4q^2)\,\mathrm{U} + q + 8q^2\right) \\
&\quad + \mathrm{Q}\left(4q\,(1+2q)\,(\mathrm{V}^2-1) + (1+q+4q^2)\,(\mathrm{V}-1) + \mathrm{V} - 1\right) \\
&< \omega\mathrm{U}\left(4q\,(1+2q)\,\mathrm{U} + 1 + 2q + 12q^2\right) \\
&\quad + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}-1)\left(4q\,(1+2q)\,\mathrm{V} + 1 + 5q + 12q^2 + 1\right) \\
&< \omega\mathrm{U}^2\,(1+4q+8q^2) + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}-1)\,(\mathrm{V}^2+\mathrm{V}+1) \\
&< \omega\,\mathrm{U}^3 + \mathrm{Q}\,(\mathrm{V}^3-1) = \Omega_5'''.
\end{aligned}$$

En admettant que la relation annoncée est vraie pour $\varrho = \nu$, $\nu - 1$, $\nu - 2$, $\nu - 3$, on démontre immédiatement par induction complète qu'elle est vraie pour tout $\varrho \geqq \nu - 3$.

Il suffit à cet effet de rappeler que, pour $z > z_1$, le polynôme P (z) défini en (13,2) est positif et que l'on a : $\mathrm{V} > \mathrm{U} > 1 + 3q + 9q^2 > z_1$, selon (15,10) et (13,3).

Le signe d'égalité ne peut jamais se présenter pour $\varrho > 3$.

APPENDICE III

Comparaison des méthodes de Milne *et de* Kutta *pour* $n = 1$

Premières ordonnées. Si y_h désigne la valeur approchée de $y\,(h)$ obtenue dans l'intégration de $y' = f\,(x, y)$ — en connaissant $y\,(0)$ — par la méthode de Kutta, on sait (Bieberbach, 1951, form. (35)) que :

$$|\,y\,(h) - y_h\,| \leqq \frac{h^5\mathrm{MN}}{540\cdot 16}\left(31800{,}75 + 46326\,\mathrm{M} + 10548\,\mathrm{M}^2 + 144\,\mathrm{M}^3\right) \tag{III,1}$$

si :

$$h\mathrm{M} \leqq 1. \tag{III,2}$$

En faisant l'hypothèse (III,2), c'est-à-dire :

$$q \leqq \frac{1}{3},$$

en (7,3), nous obtenons pour la méthode de MILNE, si $p = 3$:

$$|y(k) - Y_3(k)| \leqq \frac{h^5 MN}{540 \cdot 16}\left(1024 + 5632\,M + 3456\,M^2 + 448\,M^3\right), \quad \text{(III,3)}$$

où tous les termes entre crochets sont inférieurs à ceux de (III, 1), *à l'exception du terme en* M^3.

Comparons, d'autre part, le travail nécessité par le calcul de y_h et par celui de $Y_3(k)$.

A cet effet, nous utilisons la notion de *Horner*, introduite par M. le professeur A. OSTROWSKI (1940) de la façon suivante : *Le travail nécessaire pour le calcul de $f(x, y)$ ou de $f'(x, y)$ sera l'unité de travail calculatoire, ou un Horner.*

Alors que le calcul de y_h exige 4 Horners, celui de $Y_3(k)$ en nécessite 6, mais la méthode de KUTTA fournit une ordonnée, tandis que celle de MILNE en donne 2, car $k = \pm h$.

Donc, si M est petit, la méthode de MILNE donnera vraisemblablement de meilleurs résultats que celle de KUTTA, pour un travail un peu plus grand, mais fournira deux ordonnées.

Au contraire, si M croît, le terme en M^3 devenant prédominant, il se pourra que la borne (III, 1) soit inférieure à celle que donne (III, 3). De plus, $q = \frac{hM}{3}$ croîtra avec M et cela augmentera le nombre des itérations à effectuer dans le calcul des premières ordonnées [1]. La méthode de MILNE perdra vraisemblablement ici son avantage lorsque M sera grand.

Seconde ordonnée. On ne possède pas d'estimation pour la continuation du réseau dans la méthode de KUTTA. D'autre part, on a coutume de dire que cette méthode est préférable à celles qui s'apparentent à la méthode d'ADAMS lorsque le pas est grand, sans l'être cependant trop (cf. par exemple COLLATZ, 1951).

Nous comparons donc à (III, 1) la borne obtenue en prenant un pas $\frac{h}{2}$ dans la méthode de MILNE. Le tableau ci-dessous montre que, dès que $p + s \geqq 4$, la borne que nous avons pour la méthode de MILNE est inférieure à celle donnée par BIEBERBACH pour la méthode de KUTTA, *quel que soit* M.

[1] MILNE (1950) a montré que dans l'exemple suivant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y}{1+x}, \quad y(0) = 1,$$

sa méthode donne une approximation meilleure que celle de KUTTA. Mais on a ici : $M = \frac{50}{9}$ et il faut calculer 5 valeurs approchées des premières ordonnées, soit 10 Horners pour obtenir le résultat indiqué par l'auteur : $Y(0,1) = 1,6105$ avec quatre décimales exactes.

Méthode	Pas	p	s	Borne	Facteur commun	Coefficients de M^0	M	M^2	M^3	Nombre de Horners	Nombre d'ordonnées
Kutta	h	—	—	—	$\dfrac{h^5 MN}{540 \cdot 16}$	31800,75	46326	10548	144	4	1
Milne	h	3	—	η_3		1024	5632	3456	448	6	2
	$\frac{h}{2}$	2	1	ζ_1		540	3960	2220	210	6	3
	$\frac{h}{2}$	2	2	ζ_2		184	1012	626	83	7	3
	$\frac{h}{2}$	3	1	ζ_1		728	4004	4062	111	8	3

Nous nous bornerons à ajouter que dans la *continuation du réseau* le calcul de la valeur approchée de $y\ (\varrho h)$ exige 4 Horners dans la méthode de Kutta et 2 seulement dans celle de Milne.

BIBLIOGRAPHIE

BIEBERBACH, L. — (1951). On the Remainder of the RUNGE-KUTTA Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations (From communications to A. M. OSTROWSKI). *Z. angew. Math. Phys.* **2** : 233-248.

COLLATZ, L. — (1951). Numerische Behandlung von Differentialgleichungen : 41. *Berlin-Göttingen-Heidelberg.*

KRYLOFF, A. N. — (1935). Leçons sur le calcul approché. *Moscou,* 3e éd. : 425-431 (en russe).

Marchant Methods. — (1944). Starting values for MILNE-Method integration of ordinary differential equations of the first order. The Method of MILNE. (MM-260). (Sans indication d'auteur.) Marchant Calculating Machine Company, *Oakland, Cal.*

MASSERA, J. L. — (1942). Formulas en diferencias finitas con aplicacion a la resolucion aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden. *Pub. Inst. Mat. de la Fac. Ciencas Mat. de la Univ. Nacional del Litoral. Rosario.* **4** (3) : 99-166.
Ibid., Pub. Inst. Mat. y Estad. de la Fac. Ing. Montevideo. **1** (1).

MILNE, W. E. — (1926). Numerical integration of ordinary differential equations. *Am. Math. Monthly.* **33** : 455-460.

— (1941). Note on the numerical integration of differential equations. *Am. Math. Monthly* **48** : 52-53.

— (1949). Numerical calculus. *Princeton.*

— (1950). Note on the RUNGE-KUTTA Method. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, RP 2101, **44** : 549-550.

von MISES, R. — (1930). Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **10** : 88.

MOIGNO (Abbé). — (1844). Leçons de calcul différentiel et intégral. **2** (28e leç.) : 432-434.

OSTROWSKI, A. — (1940). Sur la convergence et l'estimation des erreurs dans quelques procédés de résolution des équations numériques. *Sbornik pasvja scenii pamjati* D. A. GRAVE. (Recueil publié à la mémoire du professeur D. A. GRAVE) : 233. *Moscou.*

PERRON, O. — (1933). Algebra **2** : 30. Theorie der algebraischen Gleichungen. *Berlin-Leipzig.*

STEFFENSEN, J. F. — (1925). Interpolationslære : 155-156. *Kobenhavn.*

WEISSINGER, J. — (1950). Eine verschärfte Fehlerabschätzung zum Extrapolationsverfahren von ADAMS. *Z. angew. Math. Mech.* **30** : 358.