SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE NEUCHATEL
Directeurs : Professeurs Félix Fiala et Roger Bader

UTILISATION D'UNE MÉTRIQUE SINGULIÈRE DANS L'ÉTUDE DES FORMES HARMONIQUES SUR UNE SURFACE DE RIEMANN

par

WERNER SÖRENSEN

INTRODUCTION

La théorie des fonctions et formes harmoniques dans un espace de Riemann a fait l'objet de nombreux travaux récents. Les progrès réalisés ont leur source dans la découverte d'une généralisation adéquate de l'opérateur laplacien Δ et dans le développement systématique de la théorie non seulement pour des formes différentielles mais pour une classe étendue de fonctionnelles linéaires (courants).

Les résultats obtenus dans ces travaux ne sont pas applicables immédiatement à la théorie des fonctions et différentielles harmoniques sur une surface de Riemann, puisqu'une telle surface n'est pas en elle-même munie d'une structure d'espace métrique.

Dans le présent travail, nous associons à la surface S l'une de ses différentielles abéliennes de première espèce Φ, exprimée en coordonnées locales par $\Phi = dz$ et nous introduisons sur S la métrique attachée à cette forme en posant $ds^2 = dz \cdot d\bar{z}$. Moyennant quelques précautions rendues nécessaires par les singularités que présente cette métrique aux points en lesquels $\Phi = 0$, nous pouvons transposer le formalisme développé dans les théories susmentionnées et étudier les formes harmoniques sur S comme solutions de l'équation $\Delta \mu = 0$. Précisons d'ailleurs que les notions de fonction harmonique ou de champ harmonique de degré 1 sont indépendantes de la métrique introduite.

Dans l'étude de l'équation $\Delta \mu = \psi$, nous n'avons fait usage d'aucun résultat général concernant l'existence et l'unicité de la solution. Au contraire, nous avons prouvé l'existence de celle-ci en vérifiant qu'une forme explicitement indiquée satisfait aux conditions requises. En d'autres termes, notre procédé fournit, dans le cas des surfaces de Riemann envisagées, à la fois l'existence de l'opérateur de Green-de Rahm et la forme explicite de son noyau.

Le chapitre premier est consacré au rappel des notions fondamentales et expose les modifications qu'il convient de leur apporter pour tenir compte des singularités de la métrique. Pour l'essentiel, ces notions sont empruntées à l'ouvrage de G. DE RHAM : *Variétés différentiables* (Paris, Hermann, 1955).

Le chapitre II présente l'étude de l'équation $\Delta\mu = \psi$ dans le cas d'une surface de Riemann compacte (close). Nous y définissons par son noyau métrique un opérateur G dont nous vérifions qu'il jouit des propriétés de l'opérateur de Green-de Rham. Cet opérateur permet d'exprimer comme courant (solution d'un problème de Cousin) la « différentielle harmonique avec singularités » admettant des parties singulières données.

Le chapitre III reprend l'examen de l'équation $\Delta\mu = \psi$ dans le cas d'un domaine relativement compact à frontière très régulière. Nous y indiquons le noyau de l'opérateur de Green-de Rham correspondant aux diverses propriétés à la frontière qu'on peut exiger de la solution. Dans l'application faite au problème de Cousin, le langage utilisé permet de formuler de manière naturelle la condition qu'il convient d'imposer à la donnée des parties singulières lorsqu'elles ne sont pas en nombre fini.

Il m'est agréable, enfin, d'exprimer ici ma gratitude à M. R. BADER pour l'aide efficace et amicale qu'il m'a prodiguée tout au long de ce travail.

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS FONDAMENTALES

1.1 *Introduction d'une métrique sur* S. *Forme adjointe. Produit scalaire*

Sur toute surface de Riemann S, d'ordre de connexion supérieur à 1, il existe une différentielle abélienne Φ, régulière sur S et à intégrale de Dirichlet finie (NEVANLINNA, 1941).

Soit $\Phi = dz$ l'expression de Φ en coordonnées locales. En posant $ds^2 = dz \cdot d\bar{z}$, on définit une métrique sur S, singulière aux points isolés en lesquels $\Phi = 0$. Pour abréger, nous appellerons ces points les points Φ et nous désignerons par S_Φ l'espace de Riemann obtenu en excluant les points Φ de la surface S.

A toute forme C^∞, φ, de degré 0, 1, ou 2 correspond, tout d'abord sur S_Φ une forme adjointe $*\varphi$ dont l'expression en coordonnées locales est la suivante :

$$\varphi_0 = f(p), \qquad *\varphi_0 = f(p) \cdot \left|\frac{dz}{dt}\right|^2 \cdot \frac{i}{2} dt \wedge d\bar{t},$$

$$\varphi_1 = a \cdot dt + \bar{a} \cdot d\bar{t}, \qquad *\varphi_1 = i(-adt + \bar{a} \cdot d\bar{t}),$$

$$\varphi_2 = \mathrm{A}\, dt \wedge d\bar{t}, \qquad *\varphi_2 = -2i \cdot \mathrm{A} \cdot \left|\frac{dz}{dt}\right|^{-2}.$$

On note immédiatement que pour une forme de degré 1, la forme adjointe est indépendante de la métrique particulière introduite.

Le définition de $*\psi$ sur S_Φ est étendue à S par continuité, ce qui est toujours possible pour $*\varphi_0$ et $*\varphi_1$, mais en général pas pour $*\varphi_2$, dont les coefficients deviennent singuliers aux points Φ.

Nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'espace des formes C^∞ sur S, par $\mathcal{E}_0$ le sous-espace des formes dont l'adjointe est encore C^∞ sur S. $\mathcal{E}_0$ comprend donc toutes les formes C^∞ de degrés 0 et 1, ainsi que les formes de degré 2 qui sont l'adjointe d'une fonction C^∞. Nous désignerons par $\mathfrak{D}$ l'espace des formes C^∞ dont le support est compact et nous poserons $\mathfrak{D}_0 = \mathcal{E}_0 \cap \mathfrak{D}$.

A deux formes homogènes de même degré φ et ψ, on associe leur produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi \wedge {*\psi}$$

défini quand l'intégrale envisagée converge. On vérifie immédiatement les formules

$$(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi) \text{ et } ({*\varphi}, {*\psi}) = (\varphi, \psi).$$

1.2 *Différentielles d'ordre* n. *Sous-espaces* $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{A}_n$. *Champs harmoniques*

Nous désignerons par d l'opérateur de différentiation extérieure. d fait correspondre à une forme de degré k une forme de degré $k+1$, dont l'expression en coordonnées locales est donnée par :

$$d\varphi_0 = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial f}{\partial \bar{t}} \cdot d\bar{t}, \qquad d\varphi_1 = \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial \bar{t}}\right) dt \wedge d\bar{t}, \qquad d\varphi_2 = 0.$$

La forme φ est dite fermée lorsque $d\varphi = 0$.

Avec DE RHAM (1955), nous introduisons et désignons par δ l'opérateur de codifférentiation défini par $\delta = -{*d*}$. δ fait correspondre à une forme de degré k une forme de degré $k-1$ dont l'expression en coordonnées locales est donnée par :

$$\delta \varphi_0 = 0, \qquad \delta \varphi_1 = -2\left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial \bar{t}}\right) \cdot \left|\frac{dz}{dt}\right|^{-2},$$

$$\delta \varphi_2 = 2 \left|\frac{dz}{dt}\right|^{-2} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial t} - A \frac{d^2 z}{dt^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1}\right) dt + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{t}} - A \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{t}^2}\left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}\right)^{-1}\right) d\bar{t}\right].$$

La forme φ est dite cofermée lorsque $\delta\varphi = 0$.

Tandis que $d\varphi$ est associé à φ indépendamment de la métrique, $\delta\varphi$ en dépend au contraire essentiellement. A cause de la singularité signalée de ${*\psi_2}$, les formes $\delta\varphi_1 = -{*(d*\varphi_1)}$ et $\delta\varphi_2 = -{*d*\varphi_2}$ ont des coefficients singuliers aux points Φ et ne sont donc pas des formes C^∞ sur S. Nous désignerons par $\mathcal{E}_1$ le sous-espace des formes de $\mathcal{E}_0$ dont les différentielles premières $d\varphi$ et $\delta\varphi$ appartiennent encore à $\mathcal{E}_0$.

Plus généralement, nous considérerons les différentielles d'ordre n d'une forme φ, obtenues en lui appliquant n fois alternativement les opérateurs d et δ. Nous appellerons $\mathcal{E}_n$ l'espace des formes dont les différentielles d'ordre $\leq n$ appartiennent à $\mathcal{E}_0$. Les formes de $\mathcal{E}_n$ qui sont à support compact constituent le sous-espace $\mathcal{D}_n = \mathcal{E}_n \cap \mathcal{D}$. Enfin, nous désignerons par $\mathfrak{A}_n$ le sous-espace de $\mathcal{E}_n$ comprenant les formes dont les différentielles d'ordre $\leqq n$ sont de norme finie. On remarque que pour des formes de degré 0, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$. Cela entraîne que pour des formes de degré 1, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \neq \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ tandis que pour des formes de degré 2, $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 \neq \mathcal{E}_2$.

Si φ et ψ sont des formes homogènes, le degré de ψ étant égal à celui de $d\varphi$, on a

$$d(\varphi \wedge {}^*\psi) = d\varphi \wedge {}^*\psi - \delta\psi \wedge {}^*\varphi.$$

Intégrons les deux membres sur un domaine Ω, de frontière régulière Ω', et appliquons à l'intégrale du membre de gauche la formule de Stokes

$$\int_\Omega da = \int_{\Omega'} a$$

Nous obtenons, en notant $(\varphi, \psi)_\Omega$ le produit scalaire étendu à Ω

I $$(d\varphi, \psi)_\Omega = (\varphi, \delta\psi)_\Omega + \int_{\Omega'} \varphi \wedge {}^*\psi.$$

Cette formule fondamentale montre que :

L'opérateur δ est transposé métrique (DE RHAM, 1955) de d sur l'espace $\mathfrak{D}_1$.

En effet, si φ et ψ sont à support compact, on peut choisir pour Ω un domaine contenant les supports de φ et ψ. Les produits scalaires étendus à Ω sont alors les produits scalaires tout court et l'intégrale sur Ω' est nulle. Il n'est pas nécessaire de supposer $\psi \in \mathfrak{D}_2$ car ${}^*\delta\psi$ est régulier pour tout $\psi \in \mathfrak{D}_1$.

On appelle champ harmonique (SPENCER, 1953) une forme appartenant à $\mathcal{E}_0$ et qui est à la fois fermée et cofermée : $\varphi \in \mathcal{E}_0$, $d\varphi = 0$, $\delta\varphi = 0$.

Les champs harmoniques de degré 0 sont les constantes. Pour le degré 2, ce sont les multiples constants de $\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$, puisque l'adjointe d'un champ harmonique est évidemment un champ harmonique. Pour le degré 1, on peut écrire localement $\varphi_1 = df$, puisqu'un champ harmonique est fermé, donc localement exact. La condition $\delta\varphi_1 = \delta df = 0$ exprime, comme nous le verrons au N° 1.3 que f est une fonction harmonique. Les champs harmoniques de degré 1 s'identifient donc aux différentielles harmoniques habituellement considérées en théorie des fonctions. On peut observer d'ailleurs directement que l'espace des champs harmoniques ne dépend pas de la métrique introduite, puisque les expressions de $d\varphi_1$ et $d\,{}^*\varphi_1$ n'en dépendent pas.

1.3 Opérateur laplacien. Formule de Green. Formes harmoniques

L'opérateur qu'il faut considérer comme la généralisation adéquate du laplacien est, selon DE RHAM (1954), l'opérateur

$$\Delta = d\delta + \delta d.$$

L'expression de $\Delta\varphi$ est particulièrement simple sur S_Φ lorsqu'on se sert des coordonnées locales z, $\bar{z}$:

$$\Delta\varphi_0 = -4\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial\bar{z}}, \qquad \Delta\varphi_1 = \Delta a\cdot dz + \Delta\bar{a}\cdot d\bar{z}, \qquad \Delta\varphi_2 = \Delta A\cdot dz\wedge d\bar{z}.$$

Les formes obtenues sont en général singulières aux points Φ, pour les trois degrés. Elles définissent par continuité des formes C^∞ sur S lorsque $\varphi\in\mathcal{E}_1$, mais cette condition n'est pas nécessaire. Calculons en effet $\Delta\varphi_1$ en coordonnées t, $\bar{t}$:

$$\Delta\varphi_1 = -4\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial\bar{t}}\cdot\left|\frac{dz}{dt}\right|^{-2}\right)dt - 4\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial t}\cdot\left|\frac{dz}{dt}\right|^{-2}\right)d\bar{t}.$$

Plaçons-nous en un point Φ, où $dz = t^n dt$. En écrivant que la partie singulière de $\Delta\varphi_1$ est nulle, on trouve pour le coefficient $a(t,\bar{t})$

$$a(t,\bar{t}) = f(t) + t^n\cdot\bar{t}\cdot g(\bar{t}) + t^{n+1}\cdot\bar{t}^{n+1}\cdot h(t,\bar{t}),$$

où $f(t)$, $g(\bar{t})$ et $h(t,\bar{t})$ sont des fonctions C^∞. On en tire

$$*d\varphi_1 = -2i\left[\frac{\bar{k}(t)}{t^n} - \frac{k(\bar{t})}{\bar{t}^n}\right] + \dots \qquad \delta\varphi_1 = -2\left[\frac{\bar{k}(t)}{t^n} + \frac{k(\bar{t})}{\bar{t}^n}\right] + \dots$$

où $k(\bar{t}) = g(\bar{t}) + \bar{t}g'(\bar{t})$ et où les termes non écrits sont réguliers. Donc $\varphi_1\notin\mathcal{E}_1$ bien que $\Delta\varphi_1$ soit C^∞. Démontrons que :

Pour qu'une forme α dont $\Delta\alpha$ est C^∞ appartienne à $\mathcal{E}_1$, il faut et il suffit que

$$\int_\Phi \delta\alpha\wedge *\varphi - \varphi\wedge *d\alpha = 0, \qquad \text{pour } \varphi\in\mathcal{E}_0$$

($\int_\Phi$ désigne la limite d'intégrales sur des cercles de rayon ε centrés aux points Φ. Cette limite ne dépend pas de l'uniformisante locale choisie).

La condition est évidemment nécessaire. Pour voir qu'elle est suffisante, plaçons-nous dans le cas d'un point Φ_i en lequel dz a un zéro simple. Au voisinage de ce point, nous avons

$$*da = -2i\left[\frac{\bar{k}}{t} - \frac{k}{\bar{t}}\right] + \dots \qquad \delta a = -2\left[\frac{\bar{k}}{t} + \frac{k}{\bar{t}}\right] + \dots$$

où k est une constante, les termes non écrits étant réguliers. Formons

$$\vartheta = f\cdot(dt + d\bar{t}), \qquad \vartheta' = f\cdot i(-dt + d\bar{t}),$$

où f est une fonction C^∞, égale à 1 dans un voisinage de Φ_i, dont le support compact ne renferme pas d'autre point Φ et se trouve dans le domaine du système de coordonnées t, $\bar{t}$. Nous avons

$$\int_\Phi \delta a \wedge *\vartheta - \vartheta \wedge *da = 8\pi(k + \bar{k}), \qquad \int_\Phi \delta a \wedge *\vartheta' - \vartheta' \wedge *da = 8\pi i(k - \bar{k}).$$

Ces deux intégrales devant être nulles, puisque $\vartheta, \vartheta' \in \mathfrak{E}_1$, on a $k = 0$, ce qui entraîne la régularité de $*da$ et δa au point Φ_i. Le cas où dz présente un zéro multiple n'offre pas de difficulté supplémentaire. Ces considérations peuvent être répétées pour chaque point Φ ; la condition imposée entraîne donc bien $a \in \mathfrak{E}_1$.

Dans la formule fondamentale I du N° 1.2, posons d'abord $\varphi = \delta a$ et $\psi = \beta$ puis $\varphi = \beta$ et $\psi = da$, où $a \in \mathfrak{E}_1$. Il vient

$$(d\delta a, \beta)_\Omega = (\delta a, \delta\beta)_\Omega + \int_{\Omega'} \delta a \wedge *\beta, \qquad (\delta da, \beta)_\Omega = (da, d\beta)_\Omega - \int_{\Omega'} \beta \wedge *da.$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$\text{II} \qquad (\Delta a, \beta)_\Omega = (da, d\beta)_\Omega + (\delta a, \delta\beta)_\Omega + \int_{\Omega'} \delta a \wedge *\beta - \beta \wedge *da.$$

Enfin, en permutant les rôles de a et β, puis en soustrayant membre à membre, on obtient la formule de Green

$$\text{III} \quad (\Delta a, \beta)_\Omega = (a, \Delta\beta)_\Omega + \int_{\Omega'} a \wedge *d\beta - \beta \wedge *da + \delta a \wedge *\beta - \delta\beta \wedge *a.$$

En prenant pour a et β des formes de $\mathfrak{D}_1$ dont le support est contenu à l'intérieur de Ω, on voit que :

L'opérateur Δ est son propre transposé métrique sur $\mathfrak{D}_1$.

L'hypothèse $a, \beta \in \mathfrak{D}_1$ suffit en effet pour assurer la continuité des intégrands dans les produits scalaires $(\Delta a, \beta)$ et $(a, \Delta\beta)$.

Nous appellerons forme harmonique une forme appartenant à $\mathcal{E}_1$ et vérifiant sur S_Φ l'équation $\Delta\varphi=0$.

Pour le degré 0, la condition $\Delta\varphi_0=\delta df=0$ équivaut à $d*df=0$. Or cette expression est indépendante de la métrique introduite : les formes harmoniques de degré 0 s'identifient aux fonctions harmoniques habituellement étudiées en théorie des fonctions.

Pour le degré 2, les formes harmoniques sont les adjointes des fonctions harmoniques, puisque $*\Delta=\Delta*$.

Pour le degré 1, bornons-nous ici à insister sur le fait que la condition $\Delta\varphi=0$ sur S_Φ n'entraîne pas $\varphi\in\mathcal{E}_1$. Nous donnerons aux N^{os} 2.3 et 3.4 des exemples de formes C^∞ sur S, vérifiant l'équation $\Delta\varphi=0$ sur S_Φ mais n'appartenant pas à $\mathcal{E}_1$. Nous les appellerons formes pseudo-harmoniques.

1.4 Topologie sur les espaces de formes. Notion de courant

Un ensemble $\mathfrak{M}$ de formes φ est dit localement borné au point p si, dans un voisinage compact de p, les dérivées partielles d'ordre $\leqq k$ des coefficients des formes φ sont bornées, quel que soit k.

$\mathfrak{M}$ est borné dans $\mathcal{E}$ s'il est localement borné en tout point p. Il est dit borné dans $\mathcal{D}$ s'il est borné dans $\mathcal{E}$ et si les formes ont en outre leur support compris dans un compact fixe[1].

$\mathfrak{M}$ est borné dans $\mathcal{A}$ si l'ensemble des normes des φ est borné.

$\mathfrak{M}$ sera dit borné dans $\mathcal{E}_n$ (ou $\mathcal{D}_n$) si les formes φ appartiennent à $\mathcal{E}_n$ et si $\mathfrak{M}$ est borné dans $\mathcal{E}$ (ou $\mathcal{D}$).

$\mathfrak{M}$ sera dit borné dans $\mathcal{A}_n$ s'il est borné dans $\mathcal{E}_n$ et si les différentielles d'ordre $\leqq n$ des formes φ sont de norme bornée.

De Rham nomme courant une fonctionnelle linéaire (T, φ) sur $\mathcal{D}$, continue dans le sens suivant : $|(T, \varphi)|$ reste borné sur tout ensemble de formes borné dans $\mathcal{D}$. Dans notre cas, il convient de remplacer $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}_0$.

L'espace vectoriel des courants, dual de $\mathcal{D}_0$ est noté $\mathcal{D}_0'$. Nous désignerons de même par $\mathcal{D}_n'$ l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur $\mathcal{D}_n$.

Exemple 1. Toute forme α à coefficients localement sommables définit un courant T si l'on pose

$$(T, \varphi)=(\alpha, \varphi), \qquad \text{pour } \varphi\in\mathcal{D}_0.$$

Un courant T sera dit C^∞ s'il existe une forme C^∞, α, telle que $(T, \varphi)=(\alpha, \varphi)$ pour $\varphi\in\mathcal{D}_0$.

[1] Ces définitions sont empruntées à l'ouvrage de G. de Rham, Var. diff. p. 43.

Exemple 2. Appelons semi-méroharmonique[1] une forme β C^∞ sur $S-p$, dont les coefficients présentent en p une partie singulière de fonction méromorphe. Une telle forme définit un courant T si l'on pose

$$(T, \varphi) = vp(\beta, \varphi), \qquad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{D}_0,$$

vp désignant la valeur principale au sens de Cauchy. Moyennant une partition de l'unité, on peut supposer le support de φ compact, compris dans le domaine du système t, $\bar{t}$. Le calcul de (β, φ) conduit à des intégrales de fonctions de la forme $\dfrac{1}{t^{m+1}} \cdot f$ et $\dfrac{1}{\bar{t}^{m+1}} \cdot g$, où f et g sont des fonctions C^∞. Les formules

$$\int\limits_{|t| \geqq \varepsilon} \frac{1}{t^{m+1}} \cdot f(t, \bar{t})\, dt \wedge d\bar{t} = \frac{1}{m\,!} \int\limits_{|t| \geqq \varepsilon} \frac{1}{t} \frac{\partial^m f}{\partial t^m} \cdot dt \wedge d\bar{t},$$

$$\int\limits_{|t| \geqq \varepsilon} \frac{1}{\bar{t}^{m+1}} \cdot g(t, \bar{t})\, dt \wedge d\bar{t} = \frac{1}{m\,!} \int\limits_{|t| \geqq \varepsilon} \frac{1}{\bar{t}} \frac{\partial^m g}{\partial \bar{t}^m} \cdot dt \wedge dt,$$

montrent l'existence de $vp\ (\beta, \varphi)$ et la continuité de $T = vp\,\beta$.

Exemple 3. Posons

$$(T, \varphi) = 0 \text{ si } \varphi \text{ est de degré 0 ou 2,}$$

$$(T, \varphi) = \left[\frac{\partial^n \bar{a}}{\partial t^n} + \frac{\partial^n a}{\partial \bar{t}^n}\right]_p \text{ si } \varphi = a \cdot dt + \bar{a}\, d\bar{t},$$

T est évidemment une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathfrak{D}_0$. On dit que le courant T a pour support le point p parce que $(T, \varphi) = 0$ pour toute forme φ dont le support appartient à $S-p$.

Remarque : Il est immédiat que deux formes C^∞ α et α' ne définissent le même courant que si elles sont identiques.

1.5 Différentielles d'un courant. Exemples

Par définition, la différentielle dT d'un courant T sera la fonctionnelle linéaire de $\mathfrak{D}_1'$ définie par

$$(dT, \varphi) = (T, \delta\varphi), \qquad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{D}_1.$$

La continuité de dT résulte du fait que si φ varie dans une partie bornée de $\mathfrak{D}_1$, $\delta\varphi$ reste dans une partie bornée de $\mathfrak{D}_0$.

[1] Cf. la notion de forme semi-méromorphe dans L. SCHWARTZ, 1953.

On définit de même la codifférentielle $\delta \mathrm{T}$ d'un courant T en posant

$$(\delta \mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, d\varphi), \qquad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{D}_1.$$

La définition des différentielles d'ordre n, comme fonctionnelles linéaires de $\mathfrak{D}'_n$ est complètement analogue.

Exemple 1. Si $\mathrm{T}=\alpha$ est une forme de $\mathcal{E}_0$, on peut identifier les différentielles $d\mathrm{T}$ et $\delta\mathrm{T}$ du courant avec celles $d\alpha$ et $\delta\alpha$ de la forme.

$$(d\mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, \delta\varphi)=(\alpha, \delta\varphi)=(d\alpha, \varphi),$$

$$(\delta\mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, d\varphi)=(\alpha, d\varphi)=(\delta\alpha, \varphi).$$

Exemple 2. Si $\mathrm{T}=vp\beta$ est semi-méroharmonique, il faut distinguer les différentielles $d\mathrm{T}$ et $\delta\mathrm{T}$ des fonctionnelles $vpd\beta$ et $vp\delta\beta$.

$$(d\mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, \delta\varphi)=vp(\beta, \delta\varphi)=vp(d\beta, \varphi)-\int_p \beta\wedge{*\varphi},$$

$$(\delta\mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, d\varphi)=vp(\beta, d\varphi)=vp(\delta\beta, \varphi)+\int_p \varphi\wedge{*\beta}.$$

On obtient donc les différentielles $d\mathrm{T}$ et $\delta\mathrm{T}$ en ajoutant à $vpd\beta$ et $vp\delta\beta$ des courants de support ponctuel p :

$$d\mathrm{T}=vpd\beta+\mathrm{U}_p, \text{ où } (\mathrm{U}_p, \varphi)=-\int_p \beta\wedge{*\varphi},$$

$$\delta\mathrm{T}=vp\delta\beta+\mathrm{V}_p, \text{ où } (\mathrm{V}_p, \varphi)=+\int_p \varphi\wedge{*\beta}.$$

Exemple 3. Si $\mathrm{T}=\alpha$ est une forme de $\mathcal{E}_1$, on peut identifier le laplacien $\Delta\mathrm{T}$ du courant et celui $\Delta\alpha$ de la forme. Par définition

$$(\Delta\mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, \Delta\varphi)=(\alpha, \Delta\varphi).$$

Par conséquent

$$(\Delta\mathrm{T}, \varphi)=(\Delta\alpha, \varphi), \qquad \text{puisque } \alpha\in\mathcal{E}_1 \text{ et } \varphi\in\mathfrak{D}_2.$$

Exemple 4. Si $\mathrm{T}=vp\beta$ est semi-méroharmonique, on obtient le laplacien $\Delta\mathrm{T}$ du courant en ajoutant à la fonctionnelle $vp\Delta\beta$ le courant W_p de support ponctuel p :

$$(\mathrm{W}_p, \varphi)=\int_p \varphi\wedge{*d\beta}-\beta\wedge{*d\varphi}+\delta\varphi\wedge{*\beta}-\delta\beta\wedge{*\varphi},$$

$$(\Delta\mathrm{T}, \varphi)=(\mathrm{T}, \Delta\varphi)=vp(\beta, \Delta\varphi)=vp(\Delta\beta, \varphi)+(\mathrm{W}_p, \varphi).$$

Un courant T sera dit fermé, cofermé ou harmonique selon que $d\mathrm{T}=0$ dans $\mathfrak{D}_1'$, $\delta\mathrm{T}=0$ dans $\mathfrak{D}_1'$, $\varDelta\mathrm{T}=0$ dans $\mathfrak{D}_2'$. Signalons ici sans démonstration l'important théorème de régularité des courants harmoniques : un courant harmonique dans un domaine Ω est égal à une forme C^∞ dans Ω (voir DE RHAM, 1955, p. 149).

Bornons-nous à établir que :

Si une forme C^∞, α, définit un courant harmonique, cette forme est harmonique.

a) Soit $\varphi\in\mathfrak{D}$ une forme dont le support ne contient pas de point Φ. L'application de la formule de Green montre que

$$(\varDelta\,\alpha,\,\varphi)=(\alpha,\,\varDelta\,\varphi)=0, \qquad \text{puisque } \varphi\in\mathfrak{D}_2.$$

On en déduit que $\varDelta\,\alpha=0$ en tout point de S_Φ.

b) Montrons que $\alpha\in\mathcal{E}_1$. Il suffit de remarquer que les formes $\vartheta=f\cdot(dt+d\bar{t})$ et $\vartheta'=f\cdot i\,(-dt+d\bar{t})$ envisagées au N° 1.3 appartiennent à $\mathfrak{D}_2$ puisque $d\vartheta=\delta\vartheta=d\vartheta'=\delta\vartheta'=0$ au voisinage de Φ. Donc $(\alpha,\varDelta\,\vartheta)=0$ et $(\alpha,\varDelta\,\vartheta')=0$. L'application de la formule de Green, compte tenu de $\varDelta\,\alpha=0$ fournit immédiatement les relations

$$\int_\Phi \delta\alpha\wedge{*}\vartheta-\vartheta\wedge{*}d\alpha=0, \qquad \int_\Phi \delta\alpha\wedge{*}\vartheta'-\vartheta'\wedge{*}d\alpha=0.$$

Nous avons remarqué au N° 1.3 que celles-ci entraînent $\alpha\in\mathcal{E}_1$.

CHAPITRE II

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $\varDelta\mu=\psi$ SUR UNE SURFACE DE RIEMANN COMPACTE (CLOSE)

2.1 *Généralités. Identité des formes et champs harmoniques*

Dans le cas où S est une surface compacte (de genre $p>0$), on peut préciser sur quelques points les notions introduites au chapitre précédent :

a) On sait que sur une surface compacte de genre p, une différentielle abélienne de première espèce s'annule en $2p-2$ points (WEYL, 1947). Il y a donc un nombre fini $2p-2$ de points Φ. Nous supposerons pour simplifier que ces points sont distincts, c'est-à-dire que Φ n'a que des zéros simples.

b) La distinction entre $\mathcal{E}_n$ et $\mathfrak{D}_n$ disparaît, puisque toute forme sur S est à support compact.

c) Le produit scalaire de deux formes C^∞, α et β, existe toujours, pourvu que l'une d'elles appartienne à $\mathcal{E}_0$.

Les formules d'intégration du N° 1.2 prennent une forme intéressante lorsqu'on les applique pour $\Omega = S$, puisqu'alors la frontière est nulle. On obtient :

$$\begin{aligned} &(d\varphi, \psi) = (\varphi, \delta\psi), && \text{si } \psi \in \mathcal{E}_0, \\ &(\Delta\varphi, \psi) = (d\varphi, d\psi) + (\delta\varphi, \delta\psi), && \text{si } \varphi, \psi \in \mathcal{E}_1, \\ &(\Delta\varphi, \psi) = (\varphi, \Delta\psi), && \text{si } \varphi, \psi \in \mathcal{E}_1. \end{aligned}$$

Appliquons la seconde pour $\varphi = \psi \in \mathcal{E}_1$. Elle devient

$$(\Delta\varphi, \varphi) = (d\varphi, d\varphi) + (\delta\varphi, \delta\varphi),$$

si bien que $\varphi \in \mathcal{E}_1$ et $\Delta\varphi = 0$ impliquent $d\varphi = 0$ et $\delta\varphi = 0$. Autrement dit:

Sur une surface compacte, toute forme harmonique est un champ harmonique.

2.2 Espace des champs harmoniques. Opérateur C

Examinons séparément pour les degrés 0, 1, 2 les solutions du système $d\varphi = 0$ et $\delta\varphi = 0$.

1) $d\varphi_0 = 0$ entraîne, $\varphi_0 =$ constante.

Les champs harmoniques de degré 0 sont les fonctions constantes.

2) Dans le domaine attaché au système de coordonnées $t, \bar{t}$, où

$$\varphi_1 = a(t, \bar{t})\, dt + \bar{a}(t, \bar{t})\, d\bar{t},$$

les conditions $d\varphi_1 = 0$ et $\delta\varphi_1 = 0$ entraînent, d'après les formules du N° 1.2

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{t}} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = 0.$$

Donc $a(t, \bar{t})$ est une fonction analytique de t seulement : $a(t, \bar{t}) = f(t)$.

Par suite $$\varphi_1 = 2\,\Re f(t)\, dt.$$

Un champ harmonique de degré 1 est la partie réelle d'une différentielle abélienne de première espèce, et réciproquement. Il en résulte que :

Les champs harmoniques de degré 1 forment un espace vectoriel de dimension réelle $2p$.

3) $\delta\varphi_2 = 0$ entraîne, $d*\varphi_2 = 0$ d'où $*\varphi_2 =$ constante.

Les champs harmoniques de degré 2 sont les multiples de $\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$.

Désignons par c_i les éléments d'une base orthonormée (inhomogène) de l'espace des champs harmoniques. Constituons la forme double

$$c\,(p,\,q) = \sum_{i=1}^{2p+2} c_i\,(p) \cdot c_i\,(q),$$

et l'opérateur C dont $c(p, q)$ est le noyau métrique :

$$C\varphi = \bigl(c\,(p,\,q),\, \varphi\,(q)\bigr).$$

On vérifie immédiatement que $(C\varphi, c_i) = (\varphi, c_i)$. Par suite

$$(C\varphi, f) = (\varphi, f),$$

pour tout champ harmonique f. Cette formule montre que l'opérateur C reproduit les champs harmoniques (BERGMANN, 1950) : $Cf = f$. Elle caractérise $C\varphi$ comme projection orthogonale de φ sur l'espace des champs harmoniques. L'opérateur C ne dépend donc pas de la base c_i choisie pour former le noyau $c(p, q)$.

L'opérateur C jouit des propriétés suivantes[1] :

1) $C' = C$ C est son propre transposé métrique. En effet

$$(C\varphi, \psi) = (\varphi, C\psi) = \sum (\varphi, c_i) \cdot (\psi, c_i).$$

2) $*C = C*$ C permute avec $*$. En effet

$$*C\varphi = \sum *c_i\,(p) \cdot \bigl(c_i\,(q),\, \varphi\,(q)\bigr),$$

$$= \sum *c_i\,(p) \cdot \bigl(*c_i\,(q),\, *\varphi\,(q)\bigr) = C*\varphi.$$

La dernière égalité résulte du fait que les $*c_i$ forment une base orthonormée s'il en est ainsi des c_i.

3) $dC = \delta C = 0$ et $C\delta = Cd = 0$.

Les premières égalités sont vraies par définition. Les secondes en découlent puisque $C\delta$ et Cd sont transposés métriques de dC et δC respectivement.

[1] Cf. les propriétés de l'opérateur H dans l'ouvrage de G. DE RHAM, p. 155.

2.3 Espace des formes pseudo-harmoniques

Nous appellerons pseudo-harmonique toute forme appartenant à $\mathcal{E}_0$ et vérifiant l'équation $\Delta\varphi = 0$ sur S_Φ. Toute forme harmonique est donc pseudo-harmonique, mais nous allons voir que l'inverse est faux, au moins pour le degré 1. (Pour les degrés 0 et 2, on a $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1$ et par suite, toute forme pseudo-harmonique est harmonique.)

Envisageons les $4p-4$ formes φ_k et $*\varphi_k (k=1, \dots, 2p-2)$ définies par

$$\varphi_k = (\Re\tau_k + i\Im\tau'_k)\cdot dz + (\Re\tau_k - i\Im\tau'_k)\cdot d\bar{z},$$

où τ_k et τ'_k sont des fonctions analytiques sauf au point Φ_k (en lequel $dz = t\cdot dt$), ont en ce point le pôle $\frac{1}{t}$, $\Re\tau_k$ et $\Im\tau'_k$ étant uniformes. Posons encore

$$\varphi_0 = dz + d\bar{z}.$$

Les $4p-2$ formes φ_k et $*\varphi_k$ ainsi constituées sont C^∞ sur S. Elles appartiennent donc à $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. D'autre part, les coefficients de dz et $d\bar{z}$ sont des fonctions harmoniques sur S_Φ. Par conséquent $\Delta\varphi_k = 0$ sur S_Φ : les formes φ_k et $*\varphi_k$ sont donc pseudo-harmoniques. Posons

$$\varphi_k = a_k\cdot dt + \bar{a}_k\cdot d\bar{t}.$$

On établit immédiatement la propriété suivante des coefficients a_k : Au point Φ_k, on a $a_j = 0$ si $j \neq k$ et $a_k = 1$. On en déduit :

Les $4p-2$ formes φ_k et $*\varphi_k (k=0, 1, \dots, 2p-2)$ sont linéairement indépendantes sur le corps des réels.

En effet, la forme pseudo-harmonique

$$\varphi = \sum_{k=0}^{2p-2} \lambda_k\varphi_k + \mu_k *\varphi_k = f\cdot dt + \bar{f}\cdot d\bar{t}$$

a au point Φ_j un coefficient f qui vaut $\lambda_j - i\mu_j$. Par suite, l'équation $\varphi = 0$ n'est possible que si $\lambda_j = \mu_j = 0$, d'abord pour $j \geqq 1$, puis pour $j = 0$.

Comme il n'existe pas plus de $2p$ champs harmoniques linéairement indépendants et que $4p-2 > 2p$ dès que $p > 1$, on en conclut que certaines au moins des formes pseudo-harmoniques φ_k et $*\varphi_k$ ne sont pas harmoniques. Notons d'ailleurs les formules suivantes, qu'on vérifie par un calcul simple :

$$*d\varphi_k = 2\,\mathfrak{I}\,\frac{dw_k}{dz}, \qquad \delta\varphi_k = -2\,\mathfrak{R}\,\frac{dw_k}{dz},$$

$$*d*\varphi_k = 2\,\mathfrak{R}\,\frac{dw_k}{dz}, \qquad \delta*\varphi_k = 2\,\mathfrak{I}\,\frac{dw_k}{dz},$$

où $dw_k = d\tau_k - d\tau'_k$ est une différentielle abélienne de première espèce. Démontrons maintenant que :

Les $4p-2$ formes φ_k et $*\varphi_k (k=0, 1, \ldots, 2p-2)$ constituent une base de l'espace des formes pseudo-harmoniques.

Rappelons d'abord la remarque faite au N° 1.3 quant aux coefficients d'une forme μ dont le laplacien $\Delta\mu$ est régulier sur S. Il en découle immédiatement que pour une telle forme, l'intégrale de Dirichlet

$$\mathrm{D}[\mu, \mu] = (d\mu, d\mu) + (\delta\mu, \delta\mu)$$

reste bornée. Elle vaut

$$\mathrm{D}[\mu, \mu] = (\Delta\mu, \mu) - \int_{\Phi} \delta\mu \wedge *\mu - \mu \wedge *d\mu.$$

On déduit de cette formule qu'une forme pseudo-harmonique dont les coefficients sont nuls en tous les points Φ est un champ harmonique.

Soit φ une forme pseudo-harmonique quelconque. Formons

$$\psi = \varphi - \sum_{k=1}^{2p-2} \lambda_k\,\varphi_k + \mu_k *\varphi_k = g \cdot dt + \bar{g} \cdot d\bar{t}.$$

Nous pouvons choisir λ_j et μ_j de manière à annuler g et $\bar{g}$ au point Φ_j. Par suite, ψ est un champ harmonique. La différentielle abélienne $\psi + i*\psi$ s'annule aux $2p-2$ points Φ_j : c'est donc un multiple (complexe) de dz. Donc $\psi = \lambda_0\,\varphi_0 + \mu_0 *\varphi_0$, où λ_0 et μ_0 sont réels. Donc

$$\varphi = \sum_{k=0}^{2p-2} \lambda_k\,\varphi_k + \mu_k *\varphi_k,$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

L'espace $\mathcal{H}$ des formes pseudo-harmoniques est donc un espace vectoriel de dimension réelle $4p-2$. Il se décompose orthogonalement en l'espace $\mathcal{H}_1$ des champs harmoniques, de dimension $2p$ et l'espace $\mathcal{H}_2$, de dimension $2p-2$, des formes pseudo-harmoniques orthogonales aux champs.

Dans l'espace $\mathcal{H}_2$, l'intégrale de Dirichlet $D[\mu, \mu]$ est une forme quadratique définie positive. Il est donc possible de construire une base de $\mathcal{H}_2$ dont les éléments h_i soient D-orthonormés : $D[h_i, h_j] = \delta_{ij}$. Constituons la forme double $h(p, q)$ et l'opérateur D définis par

$$h(p, q) = \sum_{i=1}^{2p-2} h_i(p) \cdot h_i(q),$$

$$D\mu = D[h(p, q), \mu(q)],$$

$D\mu$ est défini sur l'espace des formes μ de D-norme finie et ne dépend évidemment pas de la base choisie pour définir la forme $h(p, q)$. On a

$$Dh_i = D[h(p, q), h_i] = h_i,$$

D reproduit donc les formes de l'espace $\mathcal{H}_2$. Par suite $DD\mu = D\mu$.

On notera qu'une forme pseudo-harmonique h est nulle si mais seulement si $Ch = 0$ et $Dh = 0$.

2.4 *Solutions et pseudo-solutions de l'équation $\Delta\mu = \psi$*

Nous dirons qu'une forme μ est une pseudo-solution de l'équation $\Delta\mu = \psi$ si elle appartient à $\mathcal{E}_0$ et vérifie cette équation sur S_Φ. C'est une solution si elle appartient à $\mathcal{E}_1$.

Avant de discuter la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution, voici quelques remarques préliminaires :

a) Une pseudo-solution de l'équation est déterminée à une forme pseudo-harmonique près. Elle est donc univoquement caractérisée si l'on exige que $C\mu = 0$ et $D\mu = 0$. Nous désignerons cette pseudo-solution particulière par $\mu^{(0)}$. Si $\mu^{(0)}$ existe, on a

$$D[\mu^{(0)}, h] = 0, \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

b) Une solution $\mu^{(1)}$ de l'équation est déterminée à un champ harmonique près. Elle est donc univoquement caractérisée si l'on exige que $C\mu^{(1)} = 0$. Si $\mu^{(1)}$ existe, nous avons

$$D[\mu^{(1)}, h] = (\Delta\mu^{(1)}, h) - \int_\Phi \delta\mu^{(1)} \wedge * h - h \wedge * d\mu^{(1)},$$

d'où $$D[\mu^{(1)}, h] = (\psi, h), \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

Comme $D[\mu^{(1)}, h] = 0$ si h est un champ harmonique, on voit que la condition $C\psi = 0$ est nécessaire pour qu'il existe une solution.

c) Si la pseudo-solution $\mu^{(0)}$ et la solution $\mu^{(1)}$ existent, la différence $\mu^{(1)} - \mu^{(0)}$ est égale à la forme pseudo-harmonique

$$H\psi = \Big(h(p, q), \psi(q)\Big).$$

En effet $$C(\mu^{(1)} - \mu^{(0)}) = CH\psi = 0.$$

D'autre part $D(\mu^{(1)} - \mu^{(0)}) = D\Big[\mu^{(1)}, h(p, q)\Big] = \Big(\psi, h(p, q)\Big),$

d'où : $$D(\mu^{(1)} - \mu^{(0)}) = DH\psi = H\psi.$$

d) Réciproquement, si la pseudo-solution $\mu^{(0)}$ existe et si $C\psi = 0$, la forme $\mu = \mu^{(0)} + H\psi$ est solution de l'équation.

En effet $$D[H\psi, h] = (\psi, h),$$

pour $h \in \mathcal{H}_2$ quel que soit ψ et pour tout $h \in \mathcal{H}$ si $C\psi = 0$.

Donc $$D[\mu, h] = D[\mu^{(0)}, h] + D[H\psi, h] = (\psi, h), \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H},$$

d'où $$\int_{\Phi} \delta\mu \wedge {*h} - h \wedge {*d\mu} = 0, \qquad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

Si l'on prend $h = \varphi_k$ et $h = {*\varphi_k}$, l'intégrale en $\Phi_j \neq \Phi_k$ est automatiquement nulle et la condition écrite entraîne, comme au N° 1.3 que $\delta\mu$ et ${*d\mu}$ sont réguliers au point Φ_k. Ceci est valable pour tout point Φ_k. Donc $\mu = \mu^{(0)} + H\psi$ est une solution.

Nous allons démontrer maintenant le résultat fondamental :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\Delta\mu = \psi$ admette une solution est que $C\psi = 0$.

Nous avons vu déjà sous *b)* que la condition est nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, nous allons prouver qu'elle entraîne l'existence de la pseudo-solution $\mu^{(0)}$ en construisant explicitement celle-ci. D'après *d)* l'existence d'une solution sera ainsi démontrée.

2.5 *Construction de la pseudo-solution $\mu^{(0)}$ de l'équation $\Delta\mu = \psi$*

Soit $g(pp_0 ; qq_0)$ la fonction harmonique en p pour $p \neq q, q_0$, admettant en ces points les singularités $-\frac{1}{2\pi} \log qp$ et $+\frac{1}{2\pi} \log q_0 p$ et s'annulant pour $p = p_0$.

Constituons les formes doubles

$$k(p,q)=1_p\cdot 1_q+\frac{1}{2}(dz_p\,d\bar z_q+d\bar z_p\,dz_q)+\frac{i}{2}\cdot dz_p\wedge d\bar z_p\cdot\frac{i}{2}dz_q\wedge d\bar z_q,$$

$$\gamma_{p_0q_0}(p,q)=g(pp_0\,;\,qq_0)\cdot k(p,q).$$

Soit $\Gamma_{p_0q_0}$ l'opérateur admettant $\gamma_{p_0q_0}(p,q)$ pour noyau métrique,

$$\Gamma_{p_0q_0}\varphi=\Big(\gamma_{p_0q_0}(p,q),\,\varphi(q)\Big).$$

1) Pour tout $\varphi\in\mathcal{E}_0$, $\Gamma_{p_0q_0}\varphi$ est une forme C^∞ en tout point $p\neq q_0$, présentant en ce point la partie singulière $-\dfrac{1}{2\pi}\log q_0p\cdot\Big(k(p,q),\,\varphi(q)\Big)$.

En effet, les coefficients de la forme $\Gamma_{p_0q_0}\varphi$ sont de la forme $\int g(pp_0\,;\,qq_0)\cdot f(q)\,dt_q\wedge d\bar t_q$, où $f(q)$ est C^∞ et il est bien connu qu'il s'agit de fonctions C^∞ de p, sauf en $p=q_0$.

2) Pour tout $\varphi\in\mathcal{E}_0$, $\Gamma_{p_0q_0}(1-C)\varphi$ est une forme C^∞.
Cela tient au fait que $k(p,q)$ est un champ harmonique en q.

3) L'opérateur $(1-C)\,\Gamma_{p_0q_0}\,(1-C)$ ne dépend pas de p_0 et q_0.
En effet, nous avons

$$g(pp_1\,;\,qq_1)=g(pp_0\,;\,qq_0)+g(pp_0\,;\,q_0q_1)-g(p_1p_0\,;\,qq_1),$$

d'où

$$\Gamma_{p_1q_1}(1-C)\varphi=\Gamma_{p_0q_0}(1-C)\varphi+g(pp_0\,;\,q_0q_1)\cdot\Big(k(p,q),\,(1-C)\,\varphi(q)\Big),$$
$$-\Big(g(p_1p_0\,;\,qq_1)\cdot k(p,q),\,(1-C)\,\varphi(q)\Big).$$

Le deuxième terme est nul ; le troisième est un champ harmonique en p. Par conséquent

$$(1-C)\,\Gamma_{p_1q_1}(1-C)\,\varphi=(1-C)\,\Gamma_{p_0q_0}(1-C)\,\varphi.$$

Nous renoncerons donc à mentionner les indices p_0 et q_0.

4) L'opérateur $(1-C)\,\Gamma(1-C)$ est self-adjoint.
En effet, l'adjoint de cet opérateur est

$$(1-C)'\,\Gamma'\,(1-C)'=(1-C)\,\Gamma'\,(1-C).$$

Mais $\Gamma'_{p_0 q_0}$ a pour noyau $g(qp_0\,; pq_0)\cdot k(q, p)=g(pq_0\,; qp_0)\cdot k(p, q)$ à cause de la propriété de symétrie de $g(pp_0 qq_0)$ qui s'exprime par la formule

$$g(pp_0\,; qq_0)=g(qq_0\,; pp_0).$$

Par conséquent $\Gamma'_{p_0 q_0}=\Gamma_{q_0 p_0}$ et cette propriété résulte de la précédente.

5) Pour toute forme $C^\infty \psi$ à support compact sur S_Φ, on a

$$(1-C)\,\Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi=\psi-C\psi.$$

Par définition $\qquad \Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi=\Big(\gamma_{p_0 q_0}(q, p), \Delta\psi(q)\Big).$

En appliquant la formule de Green au domaine obtenu en excluant de la surface deux petits cercles de rayon ε centrés en p et q_0, nous trouvons à la limite, puisque $\Delta\gamma=0$,

$$\Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi=\int_{p,\,q_0}\psi\wedge{}^*d\gamma-\gamma\wedge{}^*d\psi+\delta\psi\wedge{}^*\gamma-\delta\gamma\wedge{}^*\psi.$$

Un calcul classique montre que la limite de l'intégrale existe et vaut

$$\Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi=\psi(p)-J'\psi(p),$$

où

$$J'\psi(p)=f(q_0), \qquad \text{si } \psi \text{ est de degré } 0,$$

$$J'\psi(p)=a(q_0)\,dz_p+\bar{a}(q_0)\cdot d\bar{z}_p, \qquad \text{si } \psi \text{ est de degré } 1,$$

$$J'\psi(p)=A(q_0)\cdot dz_p\wedge d\bar{z}_p, \qquad \text{si } \psi \text{ est de degré } 2.$$

Dans les trois cas, $J'\psi$ est donc un champ harmonique.

Par suite $\qquad (1-C)\,\Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi=\psi-C\psi.$

6) Pour toute forme $\varphi\in\mathcal{E}_0$, on a sur S_Φ l'égalité

$$\Delta\,\Gamma_{p_0 q_0}(1-C)\,\varphi=\varphi-C\varphi.$$

Soit en effet ψ une forme C^∞ quelconque à support compact sur S_Φ. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\Big(\Delta\,\Gamma_{p_0 q_0}(1-C)\,\varphi, \psi\Big) &=\Big(\Gamma_{p_0 q_0}(1-C)\,\varphi, \Delta\psi\Big)=\Big((1-C)\,\varphi, \Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi\Big),\\ &=\Big(\varphi, (1-C)\,\Gamma'_{p_0 q_0}\Delta\psi\Big)=\Big(\varphi, (1-C)\,\psi\Big),\\ &=\Big((1-C)\,\varphi, \psi\Big).\end{aligned}$$

Cette relation prouve l'égalité des formes $\Delta\Gamma_{p_0 q_0}(1-C)\varphi$ et $(1-C)\varphi$ sur la surface S_Φ.

Il résulte de cette dernière propriété que l'équation $\Delta\mu=\varphi-C\varphi$ admet toujours la pseudo-solution

$$\mu=(1-C)\,\Gamma(1-C)\,\varphi.$$

On vérifie immédiatement que $D\mu=0$. La pseudo-solution ainsi construite est donc $\mu^{(0)}$. Ajoutons à $\mu^{(0)}$ la forme pseudo-harmonique

$$H(1-C)\,\varphi=(1-C)\,H(1-C)\,\varphi.$$

On obtient $\mu^{(1)}$, l'unique solution orthogonale aux champs harmoniques :

$$\mu^{(1)}=G\varphi=(1-C)\,(\Gamma+H)\,(1-C)\,\varphi.$$

Nous appellerons l'opérateur G ainsi construit opérateur de Green-de Rahm (Sörensen, Bader, 1957) ; nous allons en indiquer les propriétés essentielles.

2.6 Propriétés de l'opérateur de Green-de Rham

(de Rham, 1955)

a) L'opérateur G permute avec $*$: $G*=*G$.

Partons de l'équation

$$\Delta G\varphi=\varphi-C\varphi.$$

Prenons l'adjointe des deux membres et tenons compte des relations $\Delta*=*\Delta$ et $C*=*C$. Il vient

$$\Delta*G\varphi=*\varphi-C*\varphi.$$

Par ailleurs $$C*G\varphi=*CG\varphi=0.$$

Or la seule solution de l'équation $\Delta\mu=*\varphi-C*\varphi$ qui soit orthogonale aux champs harmoniques est $G*\varphi$. Donc $*G\varphi=G*\varphi$.

b) L'opérateur G permute avec d : $Gd=dG$.

Partons de l'équation $\Delta G\varphi=\varphi-C\varphi$. Différentions les deux membres et tenons compte des relations $d\Delta=\Delta d=d\delta d$ et $dC=0$. Il vient

$$\Delta dG\varphi=d\varphi.$$

Par ailleurs $CdG\varphi=0$. Or la seule solution de l'équation $\Delta\mu=d\varphi$ qui soit orthogonale aux champs harmoniques est $Gd\varphi$. Donc $Gd\varphi=dG\varphi$.

Il résulte des propriétés *a)* et *b)* que l'opérateur G permute avec tout symbole de différentiation, pour autant que les expressions obtenues aient un sens. Notons en particulier :

$$G\Delta\varphi = \Delta G\varphi = \varphi - C\varphi, \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{E}_2,$$

$$dG_1 d\varphi_0 = 0, \qquad \delta G_1 \delta\varphi_2 = 0, \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{E}_1,$$

$$dG_1 \delta\varphi_2 = \varphi_2 - C\varphi_2, \qquad \delta G_1 d\varphi_0 = \varphi_0 - C\varphi_0, \qquad \text{pour} \quad \varphi \in \mathcal{E}_1.$$

Démontrons par exemple ces dernières formules

$$dG_1\delta\varphi_2 = G_2 d\delta\varphi_2 = G_2\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - C\varphi_2,$$

$$\delta G_1 d\varphi_0 = G_0\delta d\varphi_0 = G_0\Delta\varphi_0 = \varphi_0 - C\varphi_0.$$

c) L'opérateur G est son propre transposé métrique : $G' = G$.

Car $\qquad (\Delta G\varphi, G\psi) = (\varphi - C\varphi, G\psi) = (\varphi, G\psi),$

et $\qquad (\Delta G\psi, G\varphi) = (\psi - C\psi, G\varphi) = (\psi, G\varphi).$

Mais $\qquad (\Delta G\varphi, G\psi) = (\Delta G\psi, G\varphi),$

puisque $G\varphi$, $G\psi \in \mathcal{E}_1$ et que Δ est son propre transposé métrique sur $\mathcal{E}_1$.

Donc $\qquad (\varphi, G\psi) = (G\varphi, \psi).$

e) L'opérateur G transforme une partie bornée de $\mathcal{E}_0$ en une partie bornée de $\mathcal{E}_2$.

On sait que si $L(p, q)$ est une forme C^∞ sauf sur la diagonale $p = q$, où $L(p, q)$ est le produit de $\log r$ par une forme C^∞, l'ensemble des formes $\Lambda\varphi = \big(L(p, q), \varphi(q)\big)$ est borné dans $\mathcal{E}$ s'il en est ainsi de l'ensemble des formes φ. (Pour la démonstration, voir DE RHAM, p. 138, lemme 4.)

Il en résulte immédiatement que si l'ensemble des formes φ est borné dans $\mathcal{E}$, il en est de même des formes $G\varphi$. Vérifions que $G\varphi \in \mathcal{E}_2 \cdot G\varphi$ est par construction une forme de $\mathcal{E}_1$; il ne reste qu'à constater que ses différentielles secondes restent régulières. Pour le degré 0, il n'y a que $\delta d G\varphi = \Delta G\varphi = \varphi - C\varphi$ qui est C^∞. Pour le degré 1, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Pour le degré 2, il n'y a que $d\delta G\varphi = \Delta G\varphi = \varphi - C\varphi$ qui est C^∞.

2.7 *Les courants* CT *et* GT

La définition des opérateurs C et G peut être étendue aux courants si l'on pose

$$(\mathrm{CT}, \varphi) = (\mathrm{T}, \mathrm{C}\varphi), \qquad (\mathrm{GT}, \varphi) = (\mathrm{T}, \mathrm{G}\varphi).$$

On notera que :

1) Le courant CT est un champ harmonique. En effet,

$$(\mathrm{CT}, \varphi) = \left(\mathrm{T}, \sum_{i=1}^{2p+2} \Big(c_i(q), \varphi(q)\Big) \cdot c_i(p)\right) = \sum_{i=1}^{2p+2} \Big(c_i(q), \varphi(q)\Big) \cdot (\mathrm{T}, c_i),$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2p+2} (\mathrm{T}, c_i) \cdot c_i(q), \varphi(q)\right),$$

CT est donc identique au champ harmonique $\displaystyle\sum_{i=1}^{2p+2} (\mathrm{T}, c_i) \cdot c_i$.

Remarquons d'ailleurs que la définition de CT reste valable lorsque T, sans être un courant est une fonctionnelle de $\mathfrak{D}'_n$, puisque le champ harmonique $\mathrm{C}\varphi$ appartient à $\mathfrak{D}_n$ pour tout n.

2) GT est un courant associé à toute fonctionnelle linéaire T de $\mathfrak{D}'_2$. En effet, si φ reste dans une partie bornée de $\mathcal{E}_0$, $\mathrm{G}\varphi$ reste dans une partie bornée de $\mathcal{E}_2$ et la fonctionnelle T reste bornée sur un tel ensemble. Donc GT reste borné sur toute partie bornée de $\mathcal{E}_0$.

Il en résulte en particulier que $\mathrm{G}\Delta\mathrm{T}$ est un courant si T est un courant, ou que $\mathrm{G}d\mathrm{U}$ ou $\mathrm{G}\delta\mathrm{U}$ sont des courants si U est une fonctionnelle linéaire de $\mathfrak{D}'_1$.

En transposant les formules du N° 2.2, on obtient

$$\mathrm{C} * \mathrm{T} = * \mathrm{CT}, \qquad \mathrm{C}d\mathrm{T} = 0, \qquad \mathrm{C}\Delta\mathrm{T} = 0,$$

tandis que $$d\mathrm{CT} = 0, \qquad \delta\mathrm{CT} = 0,$$

puisque CT est un champ harmonique.

De même, en transposant les formules du N° 2.6, on obtient

$$\mathrm{G}\Delta\mathrm{T} = \mathrm{T} - \mathrm{CT}, \qquad \text{dans } \mathfrak{D}'_0, \text{ pour tout courant T},$$

$$\Delta\mathrm{GT} = \mathrm{T} - \mathrm{CT}, \qquad \text{dans } \mathfrak{D}'_2,$$

$$d\mathrm{G}_1\delta\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_2 - \mathrm{CU}_2 \text{ et } \delta\mathrm{G}_1 d\mathrm{U}_0 = \mathrm{U}_0 - \mathrm{CU}_0, \qquad \text{dans } \mathfrak{D}'_1.$$

2.8 Le problème de Cousin

(DE RHAM, KODAÏRA, 1950; SCHWARTZ, 1953; BADER, SÖRENSEN, 1957)

Rappelons qu'il s'agit du problème classique suivant:

On donne dans des ouverts V_i formant un recouvrement de S des formes méroharmoniques ω_i, vérifiant la condition de compatibilité suivante: $\omega_i - \omega_j$ est une forme harmonique dans $V_i \cap V_j$.

On demande de trouver une forme méroharmonique ω telle que $\omega - \omega_i$ soit une forme harmonique dans V_i. La solution étant déterminée à un champ harmonique près, on la rend unique en exigeant, par exemple, qu'elle soit orthogonale (en valeur principale) aux champs harmoniques.

Soient $T_i = vp\,\omega_i$ le courant associé dans V_i à ω_i, $T = vp\,\omega$ le courant associé à la solution, si elle existe.

Formons dans V_i la fonctionnelle $U_i = \Delta T_i$, explicitement définie par

$$(U_i, \varphi) = \int_{q_i} \varphi \wedge {*d\omega_i} - \omega_i \wedge {*d\varphi} + \delta\varphi \wedge {*\omega_i} - \delta\omega_i \wedge {*\varphi},$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_2$ ayant son support dans V_i. Les U_i définissent globalement une fonctionnelle U de $\mathfrak{D}'_2$ et le problème posé peut être formulé comme suit:

Résoudre l'équation $\Delta T = U$, avec la condition $CT = 0$.

La condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution est que $CU = 0$.

a) S'il existe une solution T, on a $CU = C\Delta T = 0$. La condition est donc nécessaire.

b) Si $CU = 0$, le courant $T = GU$ est solution du problème. En effet, nous avons vu que $\Delta GU = U - CU$ dans $\mathfrak{D}'_2$ et de plus $CGU = 0$. La condition est donc suffisante.

Discutons maintenant la condition $CU = 0$.

1) Degré 0. La condition $CU = 0$ équivaut à

$$(U, 1) = \sum \int_{q_i} {*d\omega_i} = 0.$$

Si f_i désigne la fonction analytique dans V_i dont ω_i est la partie réelle, cette condition exprime le résultat classique que la somme des résidus des différentielles df_i aux points singuliers q_i doit être nulle.

2) Degré 2. La condition $\mathrm{CU}=0$ équivaut à

$$\left(\mathrm{U}, \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}\right) = -\sum \int_{q_i} \delta\omega_i = 0.$$

C'est la condition du degré 0 pour $*\omega$.

Dans le cas du degré 1, le problème se pose différemment du fait que les formes ω_i données sont fermées et cofermées en dehors de la singularité q_i et qu'on exige alors que la solution soit fermée et cofermée dans tout domaine de la surface $\mathrm{S}-(q_i)$. Reprenons le problème.

Envisageons dans V_i les fonctionnelles $d\mathrm{T}_i$ et $\delta\mathrm{T}_i$, définies explicitement par

$$(d\mathrm{T}_i, \varphi) = -\int_{q_i} \omega_i \wedge *\varphi, \qquad (\delta\mathrm{T}_i, \varphi) = +\int_{q_i} \varphi \wedge *\omega_i,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{E}_1$ dont le support est dans V_i. Les $d\mathrm{T}_i$ et $\delta\mathrm{T}_i$ définissent globalement les fonctionnelles U_2 et U_0 respectivement. Il s'agit de résoudre le système

$$d\mathrm{T} = \mathrm{U}_2, \qquad \delta\mathrm{T} = \mathrm{U}_0, \qquad \mathrm{CT} = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit possible est $\mathrm{CU}_0 = 0$ et $\mathrm{CU}_2 = 0$.

a) S'il existe une solution T, on a $\mathrm{CU}_0 = \mathrm{C}\delta\mathrm{T} = 0$ et $\mathrm{CU}_2 = \mathrm{C}d\mathrm{T} = 0$. La condition est donc nécessaire.

b) Si $\mathrm{CU}_0 = 0$ et $\mathrm{CU}_2 = 0$, le courant $\mathrm{T} = \mathrm{G}(d\mathrm{U}_0 + \delta\mathrm{U}_2)$ est solution du problème. Nous avons vu en effet au N° 2.7 que

$$d\mathrm{G}_1\delta\mathrm{U}_2 = \mathrm{U}_2 - \mathrm{CU}_2 = \mathrm{U}_2 \quad \text{et} \quad \delta\mathrm{G}_1 d\mathrm{U}_0 = \mathrm{U}_0 - \mathrm{CU}_0 = \mathrm{U}_0,$$

$$\delta\mathrm{G}_1\delta\mathrm{U}_2 = 0 \quad \text{et} \quad d\mathrm{G}_1 d\mathrm{U}_0 = 0,$$

d'où $$d\mathrm{T} = \mathrm{U}_2 \quad \text{et} \quad \delta\mathrm{T} = \mathrm{U}_0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'_1.$$

Enfin, $\mathrm{CT} = \mathrm{CG}(d\mathrm{U}_0 + \delta\mathrm{U}_2) = 0$. La condition est donc suffisante.

Explicitons maintenant les conditions $\mathrm{CU}_0 = 0$ et $\mathrm{CU}_2 = 0$. Elles s'écrivent

$$\left(\mathrm{U}_2, \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}\right) = -\sum \int_{q_i} \omega_i = 0, \qquad (\mathrm{U}_0, 1) = +\sum \int_{q_i} *\omega_i = 0,$$

et expriment le fait que les différentielles analytiques $\Omega_i = \omega_i + i*\omega_i$ ont aux points singuliers q_i des résidus dont la somme est nulle.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $\Delta\mu=\psi$ SUR UN DOMAINE RELATIVEMENT COMPACT A FRONTIÈRE TRÈS RÉGULIÈRE D'UNE SURFACE DE RIEMANN

3.1 *Double de Schottky du domaine Ω*

Soit Ω un domaine relativement compact d'une surface de Riemann, de genre g et dont la frontière, supposée très régulière (Parreau, 1951), comporte c courbes fermées disjointes. Il est bien connu qu'on peut souder à Ω un symétrique $\tilde{\Omega}$ (Bader, 1954), de manière à constituer une surface close $\hat{\Omega}$, qu'on appelle le double de Schottky (Ahlfors, 1950 ; Duff, 1952) de Ω. $\hat{\Omega}$ a pour genre $\hat{g}=2g+c-1$.

Pour définir la métrique sur Ω, nous prendrons une différentielle abélienne Φ de $\hat{\Omega}$, symétrique en ce sens que si en p, $\Phi=dz$, alors en $\tilde{p}$, $\Phi=d\bar{z}$. (Φ est donc réelle le long de la frontière.) Les points Φ étant symétriques deux à deux sur $\hat{\Omega}$, il s'en trouve $\hat{g}-1$ sur Ω ; nous supposerons, pour des raisons de simplicité que les zéros de Φ sont d'ordre 1.

La correspondance involutive entre p et $\tilde{p}$ sur $\hat{\Omega}$ permet d'accorder les uniformisantes en p et $\tilde{p}$ de telle manière que si q, voisin de p, a, dans le système attaché en p, les coordonnées dx, dy, le point $\tilde{q}$ ait dans le système attaché à $\tilde{p}$ les coordonnées dx, $-dy$. En un point p de la frontière, on suppose en outre que $dy>0$ dans Ω et <0 dans $\tilde{\Omega}$.

Deux formes φ et $\tilde{\varphi}$ sont symétriques l'une de l'autre si la valeur de $\tilde{\varphi}$ correspondant au déplacement infinitésimal pq est égale à la valeur de φ pour le déplacement symétrique $\tilde{p}\tilde{q}$. En coordonnées locales, nous obtenons les formules explicites :

$$\varphi_0(p)=f(p), \qquad \tilde{\varphi}_0(p)=f(\tilde{p}),$$

$$\varphi_1(p)=a(p)\,dx+b(p)\,dy, \qquad \tilde{\varphi}_1(p)=a(\tilde{p})\,dx-b(\tilde{p})\,dy,$$

$$\varphi_2(p)=\mathrm{A}(p)\cdot dx\wedge dy, \qquad \tilde{\varphi}_2(p)=-\mathrm{A}(\tilde{p})\,dx\wedge dy.$$

La correspondance entre φ et $\tilde{\varphi}$ est involutive par définition $\tilde{\tilde{\varphi}}=\varphi$.

On vérifie par des calculs simples les propriétés suivantes de l'opérateur de symétrie $\sim$:

$$(1)\quad \widetilde{\varphi \wedge \psi} = \tilde{\varphi} \wedge \tilde{\psi}. \qquad (2)\quad \widetilde{d\varphi} = d\tilde{\varphi}.$$

$$(3)\quad \widetilde{*\varphi} = -*\tilde{\varphi}. \qquad (4)\quad \int_{\Sigma} \tilde{\varphi}_2 = -\int_{\tilde{\Sigma}} \varphi_2.$$

Il résulte de (2) et (3) que $\widetilde{\delta\varphi} = \delta\tilde{\varphi}$. Par suite: L'opérateur $\sim$ commute avec tout opérateur de différentiation.

Il résulte de (1) et (3) que $\widetilde{\varphi \wedge *\psi} = -\tilde{\varphi} \wedge *\tilde{\psi}$. Par suite, en vertu de (4)

$$\int_{\tilde{\Sigma}} \varphi \wedge *\psi = \int_{\Sigma} \tilde{\varphi} \wedge *\tilde{\psi}, \text{ c.-à-d. } (\varphi, \psi)_{\tilde{\Sigma}} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})_{\Sigma}.$$

Une forme est symétrique (antisymétrique) sur $\hat{\Omega}$ si $\varphi = \tilde{\varphi}$ (resp. $\varphi = -\tilde{\varphi}$). Les différentielles d'une forme φ sont symétriques ou antisymétriques en même temps que φ. Par contre, l'adjointe d'une forme symétrique est antisymétrique et inversement.

La restriction à Ω d'une forme antisymétrique est nulle le long de la frontière. (Il en est donc de même des différentielles de cette forme.) Démontrons que pour les formes pseudo-harmoniques, la réciproque suivante est juste :

1) Une forme pseudo-harmonique sur Ω vérifiant sur Ω' les conditions $\varphi = \delta\varphi = 0$ se prolonge par antisymétrie en une forme pseudo-harmonique sur $\hat{\Omega}$.

Posons $\varphi = a\,dx + b\,dy$ où $dx = \Re(dz)$ et $dy = \Im(dz)$.

Si φ est pseudo-harmonique, a et b sont des fonctions harmoniques. Les conditions $\varphi = \delta\varphi = 0$ sur Ω' impliquent $a = 0$ et $\dfrac{\partial b}{\partial y} = 0$ sur Ω'. En vertu du principe de symétrie, on peut prolonger a et b en posant

$$a(\tilde{p}) = -a(p), \qquad b(\tilde{p}) = +b(p),$$

ce qui justifie l'affirmation. On démontre de manière analogue :

2) Une forme pseudo-harmonique sur Ω vérifiant sur Ω' les conditions $*\varphi = *d\varphi = 0$ se prolonge par symétrie en une forme pseudo-harmonique sur $\hat{\Omega}$.

3.2 *Extensions symétrique et antisymétrique de* $\hat{\mathrm{C}}\varphi$, $\hat{\mathrm{H}}\varphi$, $\hat{\Gamma}\varphi$

A toute forme sur $\hat{\Omega}$, ψ, correspondent une extension antisymétrique ψ_a et une extension symétrique ψ_s définies par

$$\psi_a = \psi - \tilde{\psi}, \qquad \psi_s = \psi + \tilde{\psi}.$$

Quand le support de ψ est dans Ω, les extensions ψ_a et ψ_s réalisent le prolongement de ψ par antisymétrie ou par symétrie.

A tout opérateur linéaire $\hat{\mathrm{L}}$ sur $\hat{\Omega}$ correspondent de même des extensions antisymétrique et symétrique définies par

$$\mathrm{L}_a \psi = \hat{\mathrm{L}}\psi - \widetilde{\hat{\mathrm{L}}\psi}, \qquad \mathrm{L}_s \psi = \hat{\mathrm{L}}\psi + \widetilde{\hat{\mathrm{L}}\psi}.$$

Si $1(p, q)$ est le noyau de l'opérateur $\hat{\mathrm{L}}$, ceux de L_a et L_s sont

$$l_a(p, q) = l(p, q) - \widetilde{l(p, q)}^{p}, \qquad l_s(p, q) = l(p, q) + \widetilde{l(p, q)}^{p}.$$

Nous allons exprimer ces noyaux en termes dont la définition ne fait intervenir que le domaine Ω, dans le cas où $\hat{\mathrm{L}}$ est l'un ou l'autre des opérateurs $\hat{\mathrm{C}}$, $\hat{\mathrm{H}}$, $\hat{\Gamma}$.

1) On peut supposer que la base orthonormée des champs harmoniques sur $\hat{\Omega}$ est formée de $\hat{g}+1$ champs antisymétriques $\hat{c}_i^a$ et de $\hat{g}+1$ champs symétriques $\hat{c}_i^s$. Les noyaux $c_a(p, q)$ et $c_s(p, q)$ sont alors

$$c_a(p, q) = \sum_{i=1}^{\hat{g}+1} \hat{c}_i^a(p) \cdot \hat{c}_i^a(q), \qquad c_s(p, q) = \sum_{i=1}^{\hat{g}+1} \hat{c}_i^s(p) \cdot \hat{c}_i^s(q).$$

Introduisons les formes $c_i^a = \sqrt{2} \cdot \hat{c}_i^a$ et $c_i^s = \sqrt{2} \cdot \hat{c}_i^s$. Elles constituent des bases orthonormées sur Ω des champs prolongeables par antisymétrie (c.-à-d. nuls sur Ω') et des champs prolongeables par symétrie (c.-à-d. dont l'adjointe est nulle sur Ω'). Nous avons

$$c_a(p, q) = \sum_{i=1}^{\hat{g}+1} c_i^a(p) \cdot c_i^a(q), \qquad c_s(p, q) = \sum_{i=1}^{\hat{g}+1} c_i^s(p) \cdot c_i^s(q).$$

2) Des considérations analogues pour $\hat{\mathrm{H}}$ montrent que

$$h_a(p, q) = \sum_{i=1}^{\hat{g}-1} h_i^a(p) \cdot h_i^a(q), \qquad h_s(p, q) = \sum_{i=1}^{\hat{g}-1} h_i^s(p) \cdot h_i^s(q).$$

3) Avant d'expliciter les noyaux de Γ_a et de Γ_s, remarquons que dans le noyau de $\hat{\Gamma}$, il convient, sur la surface symétrique $\hat{\Omega}$, de remplacer la fonction $g(pp_0\,;\,qq_0)$ par la fonction

$$\mathcal{G}(pp_0\,;\,qq_0)=\frac{1}{2}\Big[g(pp_0\,;\,qq_0)+g(p\tilde{p}_0\,;\,q\tilde{q}_0)\Big],$$

qui jouit de la propriété de symétrie $\mathcal{G}(\tilde{p}p_0\,;\,\tilde{q}q_0)=\mathcal{G}(pp_0\,;\,qq_0)$. Cela est possible, puisque le choix de p_0 et q_0 n'influe pas sur l'opérateur G.

Si l'on remarque que

$$\mathcal{G}(\tilde{p}p_0\,;\,qq_0)=\mathcal{G}(pp_0\,;\,\tilde{q}q_0) \quad \text{et} \quad \overbrace{k(p,q)}^{p}=\overbrace{k(p,q)}^{q} \quad \text{d'où} \quad \overbrace{\gamma(p,q)}^{p}=\overbrace{\gamma(p,q)}^{q}$$

on obtient

$$\gamma_a(p,q)=\gamma(p,q)-\overbrace{\gamma(p,q)}^{q}, \qquad \gamma_s(p,q)=\gamma(p,q)+\overbrace{\gamma(p,q)}^{q}.$$

Les extensions antisymétrique et symétrique de $\mathcal{G}(pp_0\,;\,qq_0)$, soit

$$g(p,q,\Omega)=\mathcal{G}(pp_0\,;\,qq_0)-\mathcal{G}(pp_0\,;\,\tilde{q}q_0),$$

$$n(p,q,\Omega)=\mathcal{G}(pp_0\,;\,qq_0)+\mathcal{G}(pp_0\,;\,\tilde{q}q_0)$$

ont pour restrictions à Ω les fonctions de Green et de Neumann de ce domaine (Schiffer, Spencer, 1954). Ce sont en effet des fonctions harmoniques en p, ayant en $p=q$ la singularité voulue. Les propriétés à la frontière découlent des propriétés de symétrie

$$g(\tilde{p},q,\Omega)=-g(p,q,\Omega), \qquad n(\tilde{p},q,\Omega)=+n(p,q,\Omega),$$

$$g(p,\tilde{q},\Omega)=-g(p,q,\Omega), \qquad n(p,\tilde{q},\Omega)=+n(p,q,\Omega).$$

Les noyaux de Γ_a et Γ_s prennent alors la forme

$$\gamma_a(p,q)=\frac{1}{2}\Big[g(k+\tilde{k})+n(k-\tilde{k})\Big],$$

$$\gamma_s(p,q)=\frac{1}{2}\Big[g(k-\tilde{k})+n\cdot(k+\tilde{k})\Big].$$

Envisageons alors l'opérateur de Green-de Rham de $\hat{\Omega}$

$$\hat{\mathrm{G}}=(1-\hat{\mathrm{C}})\,(\hat{\Gamma}+\hat{\mathrm{H}})\,(1-\hat{\mathrm{C}}).$$

On voit très simplement que ses extensions antisymétrique et symétrique sont

$$G_a = (1 - C_a)\,(\Gamma_a + H_a)\,(1 - C_a), \qquad G_s = (1 - C_s)\,(\Gamma_s + H_s)\,(1 - C_s),$$

où les opérateurs successifs agissent sur les restrictions à Ω des formes précédemment obtenues.

3.3 *Champs harmoniques*

Les champs harmoniques de degré 0 ($d\varphi_0 = 0$) sont les constantes. Les champs harmoniques de degré 2 ($\delta\varphi_2 = 0$) sont les multiples constants de $dz \wedge d\bar{z}$. Pour les champs harmoniques de degré 1, de norme finie par définition, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Tout champ harmonique se décompose orthogonalement en un champ harmonique c_s prolongeable par symétrie sur $\hat{\Omega}$, et la différentielle df d'une fonction harmonique à intégrale de Dirichlet bornée.

Soit en effet $\hat{c}_s$ le champ symétrique sur $\hat{\Omega}$ qui a les mêmes périodes que le champ donné c sur les cycles d'une base de Ω. Si c_s désigne la restriction de $\hat{c}_s$ à Ω, le champ $c - c_s$ est une forme fermée dont toutes les périodes sur Ω sont nulles. Donc

$$c = c_s + df.$$

Comme $\delta df = 0$, f est une fonction harmonique et comme df est de norme finie, l'intégrale de Dirichlet de f est finie. D'autre part, la décomposition est orthogonale car

$$(c_s, df) = (\delta c_s, f) + \int_{\Omega'} f \wedge {*c_s} = 0, \text{ puisque } {*c_s} = 0 \text{ sur } \Omega' \,[1].$$

La décomposition obtenue est évidemment unique. En l'appliquant au champ harmonique $c' = -{*c}$, on obtient pour c la décomposition duale

$$c = c_a + \delta\varphi_2,$$

où c_a est un champ prolongeable sur $\hat{\Omega}$ par antisymétrie.

On notera que la condition ${*c} = 0$ sur Ω' entraîne que c est prolongeable sur $\hat{\Omega}$ par symétrie. En effet, cette condition entraîne ${*df} = 0$ sur Ω', d'où $(df, df) = 0$, c'est-à-dire $df = 0$.

On voit de même qu'un champ harmonique vérifiant sur Ω' la condition $c = 0$ est prolongeable sur $\hat{\Omega}$ par antisymétrie. Par suite :

Un champ harmonique tel que $c = 0$ et ${*c} = 0$ sur Ω' est nul sur Ω.

[1] Si f n'est pas C^∞ sur Ω', on considère df comme limite en norme de df_n, où f_n est C^∞ sur Ω'. (Schiffer M. et Spencer D. C., 1954, p. 137.)

Les champs harmoniques prolongeables par symétrie sur $\hat{\Omega}$ sont reproduits par le noyau $c_s(p, q)$ introduit au N° 3.2.

Pour exprimer le noyau reproduisant des champs harmoniques exacts df, examinons les produits scalaires (dg, df) et (dn, df), où g et n sont les fonctions de Green et de Neumann du domaine Ω. On vérifie immédiatement que

$$(dg, df) = (g, \delta df) + \int_{q,\, \Omega'} g \wedge * df = 0^1,$$

$$(dn, df) = (f, \delta dn) + \int_{q,\, q_0,\, \Omega'} f \wedge * dn = f(q) - f(q_0) = f(q)^2,$$

puisqu'on peut supposer $f(q_0) = 0$. Par suite

$$\big(d(n-g),\, df\big) = f(q),$$

ce qui montre que les champs exacts df sont reproduits par la forme double $d_p d_q (n-g)$ qui est un champ en p et en q. Le noyau reproduisant des champs harmoniques sur Ω est donc, pour le degré 1

$$c(p, q) = c_s(p, q) + d_p d_q (n-g).$$

3.4 *Formes pseudo-harmoniques et harmoniques*

Précisons que dans le cas d'une surface non compacte, les formes harmoniques et pseudo-harmoniques doivent appartenir à $\mathfrak{A}_1$, ce qui implique que leurs norme et D-norme sont finies.

Envisageons les $2\hat{g} - 2$ formes σ_k et $*\sigma_k$ définies par

$$\sigma_k = (\Re \tau_k + i \Im \tau'_k) \cdot dz + (\Re \tau_k - i \Im \tau'_k) \cdot d\bar{z},$$

où $\Re \tau_k$ est la fonction harmonique uniforme nulle sur Ω', ayant au point Φ_k (en lequel $dz = t \cdot dt$) la singularité $\Re\left(\frac{1}{t}\right)$, tandis que $\Im \tau'_k$ est uniforme, nulle sur Ω' et admet en Φ_k la singularité $\Im\left(\frac{1}{t}\right)$.

Les formes σ_k et $*\sigma_k$ sont C^∞ sur Ω et vérifient sur Ω_Φ l'équation $\Delta\varphi = 0$. Ce sont donc $2\hat{g} - 2$ formes pseudo-harmoniques, nulles ainsi que l'adjointe sur la frontière Ω'. Nous appellerons de telles formes strictement pseudo-harmoniques, à cause de la propriété suivante :

[1] On a $(dg, df)_{\Omega_\varepsilon} = 0$ pour tout domaine Ω_ε limité par la ligne de niveau $g = \varepsilon$. La formule est donc valable à la limite $\varepsilon = 0$ même si f n'est pas C^∞ sur Ω'.

[2] Voir la note p. 33.

Une forme strictement pseudo-harmonique ne peut être harmonique que si elle est identiquement nulle.

En effet, on a pour toute forme de $\mathcal{A}_1$

$$\mathrm{D}[\varphi, \varphi] = (\Delta\varphi, \varphi) - \int_{\Omega'} \delta\varphi \wedge {}^*\varphi - \varphi \wedge {}^* d\varphi.$$

Une forme harmonique nulle ainsi que l'adjointe sur Ω' est donc un champ harmonique. Mais un champ nul ainsi que l'adjointe sur Ω' est identiquement nul.

On démontre comme pour les formes φ_k et ${}^*\varphi_k$ du N° 2.3, en examinant les développements aux points Φ_j que :

Les $2\hat{g}-2$ formes σ_k et ${}^*\sigma_k$ sont linéairement indépendantes sur le corps des réels.

On voit comme au N° 2.3 qu'étant donné une forme strictement pseudo-harmonique quelconque σ, il est possible, en lui soustrayant une combinaison linéaire à coefficients réels des σ_k et ${}^*\sigma_k$, d'annuler les coefficients de la forme aux points Φ_j. La formule et le raisonnement cidessus montrent que la forme obtenue est identiquement nulle. Par conséquent :

Les formes strictement pseudo-harmoniques forment un espace vectoriel de dimension $2\hat{g}-2$ sur le corps des réels. Les formes σ_k et ${}^*\sigma_k$ en constituent une base.

Etablissons maintenant que :

Toute forme pseudo-harmonique se décompose D-orthogonalement en une forme strictement pseudo-harmonique et une forme harmonique.

Soit $\sigma_i\,(i=1, \ldots, 2\hat{g}-2)$ une base D-orthonormée de l'espace des formes strictement pseudo-harmoniques. φ étant une forme pseudo-harmonique quelconque, posons

$$h = \varphi - \sum_{i=1}^{2\hat{g}-2} \mathrm{D}[\varphi, \sigma_i] \cdot \sigma_i.$$

On a $\mathrm{D}[h, \sigma_i] = 0$ pour $i = 1, \ldots, 2\hat{g}-2$, et donc $\mathrm{D}[h, \sigma] = 0$ pour toute forme strictement pseudo-harmonique σ, ce qui entraîne

$$\int_{\Phi} \sigma \wedge {}^* dh - \delta h \wedge {}^*\sigma = 0.$$

En prenant pour σ les formes σ_k et ${}^*\sigma_k$, on voit que ${}^*dh$ et δh sont réguliers au point Φ_k. Par suite, h est une forme harmonique. Il est évident par construction que les deux composantes de φ sont D-orthogonales, ce qui rend la décomposition unique.

On déduit de ce résultat le théorème d'existence suivant relatif aux formes harmoniques sur Ω :

Etant donné une forme θ à coefficients continus au voisinage de Ω', il existe une forme harmonique et une seule telle que $h=\theta$ et $*h=*\theta$ sur Ω'.

Soit $h=a\cdot dx+b\cdot dy$ (où $dz=dx+i\cdot dy$) la forme harmonique cherchée. La donnée de h et $*h$ sur Ω' fixe la valeur des coefficients a et b sur Ω'. Soient α et β les fonctions harmoniques régulières sur le domaine Ω et prenant sur Ω' les valeurs $\alpha=a$ et $\beta=b$. La forme $\psi=\alpha\cdot dx+\beta\cdot dy$ est pseudo-harmonique sur Ω, telle que $\psi=\theta$ et $*\psi=*\theta$ sur Ω'. Décomposons alors ψ en $\psi=\sigma+h$. La forme harmonique h a sur la frontière les valeurs imposées puisque σ et $*\sigma$ sont nuls sur Ω'. L'unicité est immédiate, une forme harmonique nulle sur la frontière ainsi que l'adjointe étant identiquement nulle.

3.5 Solution dans $\mathfrak{E}_1$ de l'équation $\Delta\mu=\psi$ avec les conditions aux limites $\mu=0$ et $*\mu=0$ sur Ω'

Des calculs analogues à ceux du N° 2.5 montrent que la forme

$$\mu=\Gamma^{(0)}\psi=\Big[g(p,q,\Omega)\cdot k(p,q),\,\psi(q)\Big]_{\Omega}$$

vérifie, quelle que soit la forme C^{∞} $\psi\in\mathfrak{D}$ l'équation $\Delta\mu=\psi$. De plus, $\mu=*\mu=0$ sur Ω'. Par contre $\mu\notin\mathfrak{E}_1$ et par conséquent μ n'est qu'une pseudo-solution.

Ajoutons à μ la forme strictement pseudo-harmonique

$$\mathrm{H}^{(0)}\psi=\sum_{i=1}^{2\hat{g}-2}(\sigma_i,\psi)\cdot\sigma_i,$$

où les σ_i forment une base D-orthonormée des formes strictement pseudo-harmoniques. Nous avons

$$\mathrm{D}[\mu,\sigma]=\int_{\Phi,\Omega'}\mu\wedge*d\sigma-\delta\sigma\wedge*\mu=0,$$

puisque μ et $*\mu$ sont nuls aux points Φ et sur Ω'. De même

$$\mathrm{D}[\mathrm{H}^{(0)}\psi,\sigma]=(\psi,\sigma).$$

Donc

$$\mathrm{D}[\mu+\mathrm{H}^{(0)}\psi,\sigma]=(\psi,\sigma).$$

Or

$$D[\mu + H^{(0)}\psi, \sigma] = (\Delta\mu, \sigma) - \int_{\Phi, \Omega'} \delta(\mu + H^{(0)}\psi) \wedge {*\sigma} - \sigma \wedge {*d}(\mu + H^{(0)}\psi).$$

Donc

$$\int_{\Phi} \delta(\mu + H^{(0)}\psi) \wedge {*\sigma} - \sigma \wedge {*d}(\mu + H^{(0)}\psi) = 0.$$

Cette condition entraîne que $\mu^{(0)} = (\Gamma^{(0)} + H^{(0)})\psi \in \mathcal{E}_1$. C'est donc la solution du problème. L'unicité est immédiate. En résumé :

L'équation $\Delta\mu = \psi$ admet, quel que soit $\psi \in \mathfrak{D}$, une solution unique telle que $\mu = {*\mu} = 0$ sur Ω' : c'est $\mu^{(0)} = (\Gamma^{(0)} + H^{(0)})\psi$.

3.6 Solution dans $\mathcal{A}_1$ des équations $\Delta\mu = \psi$ avec les conditions a) $\mu = 0$ et $\delta\mu = 0$ sur Ω' ; b) $*\mu = 0$ et $*d\mu = 0$ sur Ω'

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $\Delta\mu = \psi$ admette une solution telle que $\mu = \delta\mu = 0$ sur Ω' est $C_a\psi = 0$. La solution est unique si l'on exige $C_a\mu = 0$.

En effet, si μ est solution, on a

$$(\psi, c_a) = (\Delta\mu, c_a) = \int_{\Omega'} -c_a \wedge {*d\mu} + \delta\mu \wedge {*c_a} = 0.$$

La condition est donc nécessaire.

Si μ et μ' sont deux solutions, la différence $h = \mu - \mu'$ est une forme harmonique telle que $h = \delta h = 0$ sur Ω' : c'est donc un champ harmonique prolongeable sur $\hat{\Omega}$ par antisymétrie. Par suite, la condition $C_a\mu = 0$ rend la solution unique.

Pour montrer que la condition est suffisante, partons de

$$\Delta \hat{G}\psi = \psi - \hat{C}\psi.$$

Prenons l'extension antisymétrique des deux membres. Il vient

$$\Delta G_a\psi = \psi_a - C_a\psi = \psi_a.$$

Donc sur Ω

$$\Delta G_a\psi = \psi,$$

et il est évident que $C_a G_a\psi = 0$. En posant $\psi = (1 - C_a)\varphi$, on voit en résumé que :

L'équation $\Delta\mu = \varphi - C_a\varphi$ possède pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$ une solution unique telle que $\mu = \delta\mu = 0$ sur Ω' et $C_a\mu = 0$. C'est

$$\mu_a = G_a\varphi = (1 - C_a)(\Gamma_a + H_a)(1 - C_a)\varphi.$$

b) On démontre de manière complètement analogue que :

L'équation $\Delta\mu = \varphi - C_s\varphi$ possède pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$ une solution unique telle que $*\mu = *d\mu = 0$ sur Ω' et $C_s\mu = 0$. C'est

$$\mu_s = G_s\varphi = (1 - C_s)(\Gamma_s + H_s)(1 - C_s)\varphi.$$

3.7 *Décomposition orthogonale de φ en une forme homologue à 0, une forme cohomologue à 0 et un champ harmonique*

Kodaira a démontré (de Rham, 1955), dans des conditions bien plus générales, l'existence et l'unicité d'une décomposition orthogonale

$$\varphi = E\varphi + F\varphi + C\varphi, \qquad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{D},$$

où $E\varphi$ est homologue à 0, $F\varphi$ cohomologue à 0, $C\varphi$ fermé et cofermé.

Nous allons expliciter cette décomposition en prouvant que

$$E\varphi = d\delta G_a\varphi, \qquad F\varphi = \delta d G_s\varphi.$$

Si nous substituons à $E\varphi$ et $F\varphi$ les formes indiquées, les conditions imposées à $E\varphi$ et $F\varphi$ sont évidemment satisfaites, y compris l'orthogonalité de $E\varphi$ et $F\varphi$ dont la vérification est immédiate :

$$(E\varphi, F\varphi) = (d\delta G_a\varphi, \delta d G_s\varphi) = \int_{\Omega'} \delta G_a\varphi \wedge * \delta d G_s\varphi = 0.$$

Posons donc $\varphi = E\varphi + F\varphi + L\varphi$ et montrons que $L\varphi = C\varphi$.

1) $$dE\varphi = 0, \qquad \delta E\varphi = \delta\Delta G_a\varphi = \delta\varphi.$$

2) $$\delta F\varphi = 0, \qquad dF\varphi = d\Delta G_s\varphi = d\varphi.$$

Il résulte de là que $dL\varphi = \delta L\varphi = 0$. $L\varphi$ est donc un champ harmonique.

3) $$(E\varphi, c) = (d\delta G_a\varphi, c) = \int_{\Omega'} \delta G_a\varphi \wedge * c = 0, \qquad \text{pour tout champ } c.$$

4) $$(F\varphi, c) = (\delta d G_s\varphi, c) = -\int_{\Omega'} c \wedge * d G_s\varphi = 0, \qquad \text{pour tout champ } c.$$

Il en résulte que $(\varphi, c) = (L\varphi, c)$ pour tout champ c, ce qui justifie l'affirmation $L\varphi = C\varphi$.

3.8 Solution dans $\mathfrak{A}_1$ de l'équation $\Delta\mu=\psi$ avec les conditions aux limites $\delta\mu=0$ et $*d\mu=0$ sur Ω'. Opérateur de Green-de Rham-Spencer (1953)

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation admette une solution vérifiant les conditions $\delta\mu=*d\mu=0$ sur Ω' est $C\psi=0$. La solution est unique si l'on exige $C\mu=0$.

Si μ est une solution, on a en effet

$$(\psi, c)=(\Delta\mu, c)=\int_{\Omega'}\mu\wedge *dc-c\wedge *d\mu+\delta\mu\wedge *c-\delta c\wedge *\mu=0.$$

La condition est donc nécessaire. D'autre part, si μ et μ' sont deux solutions, la différence $h=\mu-\mu'$ est une forme harmonique telle que $\delta h=*dh=0$ sur Ω' : c'est donc un champ harmonique. La solution est donc unique si l'on exige $C\mu=0$.

Pour prouver que la condition est suffisante, nous allons montrer d'abord que la forme

$$\mu'=\hat{G}(E\psi+F\psi)$$

est une solution de l'équation qui vérifie les conditions à la frontière.

1) $\Delta\hat{G}(E\psi+F\psi)=E\psi+F\psi$, puisque $\hat{C}(E\psi+F\psi)=0$.
Or sur Ω, on a $E\psi+F\psi=\psi-C\psi$, et par suite $\Delta\mu=\psi$.

2) En utilisant la relation $dG=Gd$ du N° 2.6, il vient

$$d\mu'=\hat{G}(dE\psi+dF\psi)=\hat{G}dF\psi=d\hat{G}F\psi.$$

Comme $\hat{G}F\psi$ est symétrique sur $\hat{\Omega}$, on a $*d\mu'=0$ sur Ω'.

3) En utilisant la relation $G\delta=\delta G$ du N° 2.6, il vient

$$\delta\mu'=\hat{G}(\delta E\psi+\delta F\psi)=\hat{G}\delta E\psi=\delta\hat{G}E\psi.$$

Comme $\hat{G}E\psi$ est antisymétrique sur $\hat{\Omega}$, on a $\delta\mu'=0$ sur Ω'.

Il suffit alors d'orthogonaliser cette solution par rapport aux champs harmoniques sur Ω pour obtenir la solution cherchée

$$\mu=G\psi=(1-C)\hat{G}(E\psi+F\psi).$$

L'opérateur G ainsi défini a été envisagé dans le cas d'une variété riemannienne par SPENCER. Nous allons, dans le cas qui nous occupe, examiner la forme explicite du noyau de cet opérateur. Calculons

$$(\hat{\Gamma}+\hat{H})(1-\hat{C})(E+F)\psi=(\hat{\Gamma}+\hat{H})(E+F)\psi.$$

1) $$\hat{\Gamma}(\mathrm{E}\psi + \mathrm{F}\psi) = \left(\frac{1}{2}(n+g)\cdot k(p,q),\ \mathrm{E}\psi + \mathrm{F}\psi\right)_{\hat{\Omega}}.$$

En décomposant le noyau de $\hat{\Gamma}$ en ses parties antisymétrique et symétrique et en tenant compte des propriétés de symétrie de $\mathrm{E}\psi$ et $\mathrm{F}\psi$, il vient

$$\hat{\Gamma}(\mathrm{E}\psi + \mathrm{F}\psi) = \frac{1}{2}\left[g\cdot(k+\tilde{k}) + n(k-\tilde{k}),\ \mathrm{E}\psi\right]_{\Omega} + \frac{1}{2}\left[g(k-\tilde{k}) + n(k+\tilde{k}),\ \mathrm{F}\psi\right]_{\Omega},$$

$$= (g\cdot k,\ \mathrm{E}\psi + \mathrm{F}\psi)_{\Omega} + \frac{1}{2}\left[(n-g)(k-\tilde{k}),\ \mathrm{E}\psi\right]_{\Omega} + \frac{1}{2}\left[(n-g)(k+\tilde{k}),\ \mathrm{F}\psi\right]_{\Omega}.$$

2) En introduisant H_a et H_s, on obtient de même

$$\hat{\mathrm{H}}(\mathrm{E}\psi + \mathrm{F}\psi) = (h_a,\ \mathrm{E}\psi)_{\Omega} + (h_s,\ \mathrm{F}\psi)_{\Omega}.$$

Introduisons les opérateurs

$$\Gamma^{(0)}\psi = \left(g\cdot k,\ (1-\mathrm{C})\psi\right)_{\Omega},$$

$$\mathrm{H}\psi = \left[\frac{1}{2}(n-g)(k-\tilde{k}) + h_a,\ \mathrm{E}\psi\right]_{\Omega} + \left[\frac{1}{2}(n-g)(k+\tilde{k}) + h_s,\ \mathrm{F}\psi\right]_{\Omega}.$$

La solution du problème s'écrit, si l'on pose $\psi = \varphi - \mathrm{C}\varphi$,

$$\mu = \mathrm{G}\varphi = (1-\mathrm{C})(\Gamma^{(0)} + \mathrm{H})(1-\mathrm{C})\varphi.$$

Démontrons maintenant que le noyau $h(p,q)$ de l'opérateur H ci-dessus introduit jouit de la propriété de reproduction suivante :

$$\mathrm{D}\left[h(p,q),\ h'\right] = h' - \mathrm{C}h'$$

pour toute forme pseudo-harmonique h'.

a) $$\mathrm{D}[\mu, h'] = (\varphi - \mathrm{C}\varphi,\ h') = (\varphi,\ h' - \mathrm{C}h')$$

pour toute forme pseudo-harmonique h' puisque $\mu \in \mathscr{E}_1$ et $\delta\mu = {}^*d\mu = 0$ sur Ω'.

b) $$\mathrm{D}\left[(1-\mathrm{C})\Gamma^{(0)}(1-\mathrm{C})\varphi,\ h'\right]$$

$$= \int_{\Phi,\Omega'} \Gamma^{(0)}(1-\mathrm{C})\varphi \wedge {}^*dh' - \delta h' \wedge {}^*\Gamma^{(0)}(1-\mathrm{C})\varphi = 0$$

puisque $\Gamma^{(0)}(1-\mathrm{C})\varphi$ et $*\Gamma^{(0)}(1-\mathrm{C})\varphi$ sont nuls aux points Φ comme sur Ω'.

c) En soustrayant membre à membre, on obtient

$$\mathrm{D}\Big[\mathrm{H}(1-\mathrm{C})\varphi,\, h'\Big]=(\varphi,\, h'-\mathrm{C}h'),$$

c'est-à-dire $$\Big(\mathrm{D}\Big[h(p,q),\, h'\Big],\, \varphi\Big)=(\varphi,\, h'-\mathrm{C}h'),$$

ce qu'il fallait établir.

3.9 *Propriétés de l'opérateur* G

L'opérateur G jouit, entre autres, des propriétés suivantes :

a) G est son propre transposé métrique.

Nous avons en effet, comme dans le cas compact

$$(\Delta\mathrm{G}\varphi,\,\mathrm{G}\psi)=(\varphi,\,\mathrm{G}\psi), \qquad (\Delta\mathrm{G}\psi,\,\mathrm{G}\varphi)=(\psi,\,\mathrm{G}\varphi).$$

Mais les membres de gauche sont égaux, comme le montre l'application de la formule de Green

$$(\Delta\mathrm{G}\varphi,\,\mathrm{G}\psi)=(\mathrm{G}\varphi,\,\Delta\mathrm{G}\psi)$$
$$+\int_{\Omega'}\mathrm{G}\varphi\wedge *d\mathrm{G}\psi-\mathrm{G}\psi\wedge *d\mathrm{G}\varphi+\delta\mathrm{G}\varphi\wedge *\mathrm{G}\psi-\delta\mathrm{G}\psi\wedge *\mathrm{G}\varphi.$$

Par conséquent $(\varphi,\,\mathrm{G}\psi)=(\mathrm{G}\varphi,\,\psi)$, ce qui justifie l'affirmation.

b) $\mathrm{G}\Delta\varphi=\varphi-\mathrm{C}\varphi$, pour toute forme de $\mathfrak{D}_2$.

Soit ψ une forme quelconque de $\mathfrak{D}_0$. Nous avons

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}\Delta\varphi,\,\psi)&=(\Delta\varphi,\,\mathrm{G}\psi),\\ &=(\varphi,\,\Delta\mathrm{G}\psi), \qquad \text{puisque } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont à support compact,}\\ &=(\varphi,\,\psi-\mathrm{C}\psi)=(\varphi-\mathrm{C}\varphi,\,\psi),\end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée en tout point du domaine Ω.

c) G_1 vérifie pour toute forme de $\mathfrak{D}_1$ les formules

$$(1)\quad d\mathrm{G}_1 d\varphi_0=0. \qquad (1')\quad \delta\mathrm{G}_1\delta\varphi_2=0.$$

$$(2)\quad d\mathrm{G}_1\delta\varphi_2=\varphi_2. \qquad (2')\quad \delta\mathrm{G}_1 d\varphi_0=\varphi_0.$$

Pour démontrer la première, différentions les deux membres de l'équation

$$\Delta G_1 d\varphi_0 = d\varphi_0 - C d\varphi_0 = d\varphi_0,$$

$$d\Delta G_1 d\varphi_0 = \Delta d G_1 d\varphi_0 = 0,$$

$dG_1 d\varphi_0$ est donc une forme harmonique de degré 2. Mais sur la frontière Ω', la forme et son adjointe sont nulles. Donc $dG_1 d\varphi_0 = 0$ identiquement. La démonstration de (1′) est analogue.

Pour démontrer la troisième, différentions les deux membres de l'équation

$$\Delta G_1 \delta\varphi_2 = \delta\varphi_2 - C\delta\varphi_2 = \delta\varphi_2,$$

$$d\Delta G_1 \delta\varphi_2 = \Delta d G_1 \delta\varphi_2 = d\delta\varphi_2 = \Delta\varphi_2,$$

d'où $$\Delta(dG_1\delta\varphi_2 - \varphi_2) = 0.$$

La forme de degré 2 $dG_1\delta\varphi_2 - \varphi_2$ est donc harmonique. Mais sur la frontière Ω', $*dG_1\delta\varphi_2 = 0$ et $*\varphi_2 = 0$. Par suite $dG_1\delta\varphi_2 - \varphi_2 = 0$ identiquement. La démonstration de (2′) est analogue.

d) G transforme toute partie bornée de $\mathcal{A}_0$ en une partie bornée de $\mathcal{A}_2$.

En effet, on voit comme dans le cas compact que l'ensemble des $G\varphi$ est borné dans $\mathcal{E}_2$ si l'ensemble des φ est borné dans $\mathcal{E}_0$. De plus, le noyau de G étant de carré sommable, l'ensemble des $G\varphi$ est borné dans $\mathcal{A}$ s'il en est ainsi de l'ensemble des φ. Donc l'ensemble des $G\varphi$ est borné dans $\mathcal{A}_0$.

A cause des conditions satisfaites par $G\varphi$ sur Ω', on a

$$(dG\varphi, dG\varphi) + (\delta G\varphi, \delta G\varphi) = (\Delta G\varphi, G\varphi) = (\varphi, G\varphi),$$

ce qui prouve que l'ensemble des formes $dG\varphi$ et $\delta G\varphi$ est borné dans $\mathcal{A}$. Donc l'ensemble des $G\varphi$ est borné dans $\mathcal{A}_1$.

A cause de l'orthogonalité de $d\delta G\varphi$ et $\delta d G\varphi$, on a

$$\begin{aligned}(d\delta G\varphi, d\delta G\varphi) + (\delta d G\varphi, \delta d G\varphi) &= (d\delta G\varphi + \delta d G\varphi, d\delta G\varphi + \delta d G\varphi),\\ &= (\varphi - C\varphi, \varphi - C\varphi),\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'ensemble des $d\delta G\varphi$ et $\delta d G\varphi$ est borné dans $\mathcal{A}$. Donc l'ensemble des $G\varphi$ est borné dans $\mathcal{A}_2$.

3.10 Courants continus en moyenne à l'infini. Courants nuls à la frontière. Les courants CT *et* GT

Les courants que nous considérons jouissent au voisinage de la frontière de propriétés de régularité qu'on peut caractériser avec précision au moyen de notions introduites par G. DE RHAM (1955).

a) T est continu en moyenne à l'infini si $|(T, \varphi)|$ reste borné sur tout ensemble de formes à support compact qui est borné dans $\mathfrak{A}_0$. De même, $T \in \mathfrak{D}_i'$ est continu en moyenne à l'infini si $|(T, \varphi)|$ reste borné sur toute partie de $\mathfrak{D}_i$ bornée dans $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{A}$.

(T, φ) peut alors être défini pour toute forme de $\overline{\mathfrak{D}} \cap \mathfrak{A}$ en posant $(T, \varphi) = \lim (T, \varphi_n)$, où $\{\varphi_n\}$ est une suite de formes à support compact telles que le support de $\varphi - \varphi_n$ s'éloigne indéfiniment et que la norme de $\varphi - \varphi_n$ tende vers 0. (T, φ) reste borné sur tout ensemble de telles formes qui est borné dans $\mathfrak{A}_0$. (Voir DE RHAM, 1955, p. 167, prop. 6.)

Si T est continu en moyenne à l'infini, on peut définir les courants CT et GT, comme dans le cas compact, en posant

$$(CT, \varphi) = (T, C\varphi), \qquad (GT, \varphi) = (T, G\varphi),$$

les seconds membres étant bien définis. Ces définitions s'étendent naturellement au cas de fonctionnelles linéaires continues de $\mathfrak{D}_1'$ ou $\mathfrak{D}_2'$, pour peu qu'elles soient continues en moyenne à l'infini.

b) Un courant est dit nul à la frontière (DE RHAM, 1954) si T et dT sont continus en moyenne à l'infini et si de plus

$$(dT, \varphi) = (T, \delta\varphi)$$

pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{A}_1$. (On voit immédiatement que si T est une forme α à coefficients continus sur $\overline{\Omega}$, ces conditions impliquent que $\alpha = 0$ sur Ω'.)

Etablissons maintenant les propriétés suivantes de CT et GT.

1) Si T est continu en moyenne à l'infini, on a dans $\mathfrak{D}_2'$

$$\Delta GT = T - CT.$$

En effet $(\Delta GT, \varphi) = (GT, \Delta\varphi) = (T, G\Delta\varphi) = (T, \varphi - C\varphi) = (T - CT, \varphi)$ pour toute forme $\varphi \in \mathfrak{D}_2$.

2) Si T_0 et T_2 sont nuls à la frontière, on a dans $\mathfrak{D}_1'$

$$(1)\ dG_1 dT_0 = 0. \qquad (1')\ \delta G_1 \delta T_2 = 0.$$

$$(2)\ dG_1 \delta T_2 = T_2. \qquad (2')\ \delta G_1 dT_0 = T_0.$$

Ces formules s'obtiennent par transposition à partir de celles du No 3.9 *c)*. Nous nous bornons à vérifier la première :

$$(dG_1 dT_0, \varphi) = (G_1 dT_0, \delta\varphi) = (dT_0, G_1 \delta\varphi), \qquad \text{si } \varphi \in \mathfrak{D}_1.$$

Mais si T_0 est nul à la frontière

$$(dT_0, G_1 \delta\varphi) = (T_0, \delta G_1 \delta\varphi) = 0.$$

Donc $(dG_1 dT_0, \varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}_1$, d'où $dG_1 dT_0 = 0$ dans $\mathfrak{D}'_1$.

3) Si T, $*T$, dT, δT sont nuls à la frontière, on a

$$G\Delta T = T - CT.$$

En effet $\quad (Gd\delta T, \varphi) = (d\delta T, G\varphi) = (\delta T, \delta G\varphi) = (T, d\delta G\varphi),$

$$(G\delta dT, \varphi) = (\delta dT, G\varphi) = (dT, dG\varphi) = (T, \delta dG\varphi),$$

d'où $\quad (G\Delta T, \varphi) = (T, \Delta G\varphi) = (T, \varphi - C\varphi) = (T - CT, \varphi).$

3.11 Application au problème de Cousin

Bornons-nous ici au cas du degré 1, où les parties singulières données sont fermées et cofermées au voisinage des singularités et où l'on exige les mêmes propriétés de la solution.

Dans le cas où la surface n'est pas compacte, la forme méro-harmonique ω n'est pas caractérisée univoquement par ses parties singulières et ses périodes (Bader, 1954 ; Myrberg, 1955). Il faut lui imposer en outre une condition de régularité à l'infini. Nous choisirons la suivante : le courant $T = vp\,\omega$ doit être continu en moyenne à l'infini.

Soit, comme au No 2.8, $T_j = vp\,\omega_j$ le courant associé dans V_j à la forme méro-harmonique ω_j. Soient à nouveau U_0 et U_2 les fonctionnelles linéaires de $\mathfrak{D}'_1$ définies globalement par les δT_j et les dT_j, vu les conditions de compatibilité,

$$\delta(T_j - T_k) = 0, \qquad d(T_j - T_k) = 0, \qquad \text{dans } V_j \cap V_k.$$

Le courant cherché T doit satisfaire aux conditions suivantes :

1) $dT = U_2$, $\delta T = U_0$.

2) T est continu en moyenne à l'infini.

3) T est orthogonal aux champs harmoniques : $CT = 0$.

Les conditions 1) et 2) déterminent la solution à un champ harmonique près. La condition 3) fixe celui-ci univoquement. La solution est donc unique, si elle existe.

Nous allons démontrer que :

Pour que la solution existe, il suffit que les fonctionnelles U_0 et $*U_2$ soient nulles à la frontière.

Formons le courant $T = G_1(dU_0 + \delta U_2)$, ce qui est possible puisque l'hypothèse faite implique que dU_0 et δU_2 sont continus en moyenne à l'infini. Vérifions qu'il satisfait aux conditions.

1) Les formules du N° 3.11 sont applicables

$$dT = dG_1 \delta U_2 = U_2, \qquad \delta T = \delta G_1 dU_0 = U_0, \qquad \text{dans } \mathfrak{D}'_1.$$

2) dU_0 et δU_2 étant continus en moyenne à l'infini, il en est de même de $G_1 dU_0$ et $G_1 \delta U_2$ et par suite de T.

3) $CT = CG_1(dU_0 + \delta U_2) = 0$. T est donc bien une solution.

Remarque : Si les singularités sont en nombre fini, l'hypothèse faite sur U_0 et $*U_2$ est automatiquement réalisée. Cette hypothèse est de toute manière nécessaire si l'on exige que pour la solution T, les fonctionnelles δT et dT soient nulles à la frontière.

BIBLIOGRAPHIE

Ahlfors, L. V. — (1950). Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Comm. Math. Helv.* **24** : 100-134.

Bader, R. — (1954). Fonctions à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de Riemann ouvertes. *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), **71** (3) : 243-300.

Bader, R. et Sörensen, W. — (1957). Noyau de Green-de Rham sur les surfaces de Riemann. *C. R.* **244** : 1309-1311.

— (1957). Sur le problème de Cousin pour une surface de Riemann non compacte. *Colloque international de théorie des fonctions. Helsinki* (à paraître).

Bergmann, S. — (1950). The kernel function and conformal mapping. *American Mathematical Society, New York.*

Bidal, P. et de Rham, G. — (1947). Les formes différentielles harmoniques. *Comm. Math. Helv.* **19** : 1-49.

Duff, G. F. D. — (1952). Differentials in manifold with boundary. *Annals of Math.* **56** (1) : 115-127.

Myrberg, L. — (1955). Différentielles méromorphes sur des surfaces de Riemann ouvertes. *C. R.* **241** : 1194.

Nevanlinna, R. — (1941). Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. *Ann. Acad. Sc. Fenn.* **1** : 34 p.

Parreau, M. — (1951). Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann. *Ann. Inst. Fourier* **3** : 103-197.

de Rham, G. — (1955). Variétés différentiables. *Paris, Hermann.*

— (1954). Sur certaines équations de la théorie des formes différentielles harmoniques. *Second colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles* : 67-82.

de Rham, G. et Kodaira, K. — (1950). Harmonic integrals. *Inst. for advanced study, Princeton,* 144 p.

Schiffer, M. et Spencer, D. C. — (1954). Functionnals of finite Riemann surfaces. *Princeton University Press, Princeton.*

Schwartz, L. — (1953). Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe. *Géométrie différentielle, Colloques internationaux du C. R. N. S. Strasbourg* : 185-195.

Spencer, D. C. — (1953). Real and complex operators on manifolds, contributions to the theory of Riemann surfaces. *Annals of Mathematics Studies, Princeton* **30** : 203-227.

Weyl, H. — (1947). Die Idee der Riemannschen Fläche. *New-York.*