Zeitschrift: Bulletins des séances de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 7 (1860-1863)
Heft: 48

Artikel: Note sur l'évaluation mécanique des surfaces planes
Autor: Piccard / Cuénoud, S.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-253496

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

NOTE SUR L'ÉVALUATION MÉCANIQUE DES SURFACES PLANES

par

MM. PICCARD, commissaire-général et

S. CUÉNOUD, prof. de mathématiques à Lausanne.

(Séances des 2 mai, 16 mai et 6 juin 1860.)

I. INTRODUCTION.

1. La plupart des sciences d'application, telles que la mécanique, l'arpentage, l'art des constructions, réclament journellement l'évaluation des surfaces planes terminées par des contours quelconques. Or, cette évaluation est toujours très laborieuse par les procédés de la géométrie, ensorte qu'on a cherché à remplacer le calcul des aires par une évaluation mécanique qui pût donner, en bien moins de temps, une approximation suffisante.

2. Laissant de côté les tentatives infructueuses faites dans le dernier siècle et au commencement de celui-ci, on peut dire que le premier appareil qui ait répondu au but proposé est le planimètre que M. Oppikofer, géomètre à Berne, exécuta vers 1827. Cet appareil, perfectionné et terminé par Ernst (mécanicien à Berne en 1837, établi dès lors à Paris), fut vivement apprécié en France, où l'Institut lui décerna le prix de mécanique Montyon, en déclarant que cet instrument était une des plus belles applications du siècle dans le domaine de la géométrie appliquée, et où plusieurs savants l'employèrent dans leurs recherches. Il suffit de citer, à ce sujet, l'importante application que le général Morin en a fait dans ses beaux travaux de mécanique appliquée.

3. On a reproché à l'appareil d'Oppikofer d'être très volumineux, par suite très embarrassant, d'un poids assez considérable et d'un prix élevé. Aussi cet appareil ne s'est-il pas répandu dans les travaux du cadastre comme on aurait pu s'y attendre. M. Wetli, ingénieur à Zurich, apporta, en 1849, dans la construction de cet appareil, une heureuse simplification qui en diminuait considérablement le volume en augmentant sa précision.

Plusieurs essais tentés en Allemagne dans ces dernières années ne sont pas venus à notre connaissance.

4. Enfin M. Amsler, professeur de mathématiques à Schaffhouse, a imaginé, en 1854, un instrument remarquable par sa simplicité et ses petites dimensions, et auquel il a donné le nom de *planimètre polaire*. On peut dire que cet instrument résout d'une manière plus simple et plus complète que les précédents le problème de l'évaluation mécanique des surfaces curvilignes.

Ajoutons encore que M. Beuvière, géomètre du cadastre en France, a aussi imaginé, en 1845, un appareil dont il dit beaucoup de bien, mais beaucoup moins simple que celui de Amsler. (Voyez Dictionnaire des arts et manufactures, article *Planimètre*.)

5. Pour faire comprendre combien les simplifications apportées dans la construction des planimètres peuvent contribuer à en généraliser l'usage, nous citerons les prix de quelques-uns de ces appareils :

Appareil d'Oppikofer, construit par Ernst, à Paris, fr. 400.
Id. de Wetli, construit par Goldschmidt, à Zurich, fr. 150.
Id. d'Amsler, construit par Amsler, à Schaffhouse, fr. 50 à 80.

6. En 1838, M. Piccard, géomètre à Lausanne, faisant emploi du planimètre d'Oppikofer, en trouva une démonstration élémentaire fondée sur des considérations de triangles semblables. Il présenta, à ce sujet, un mémoire à l'Institut de France, le 14 janvier 1839, et il construisit alors un planimètre à peu près semblable à la fig. 1, au moyen duquel on imitait avec le compas toutes les opérations du planimètre d'Oppikofer, récemment importé de Berne à Paris. (Voir le *Nouvelliste vaudois* du 10 août 1838.)

7. Il est curieux d'observer que la plupart des ingénieux appareils au moyen desquels on a simplifié le travail des quadratures ont été inventés et construits en Suisse. Il est juste de revendiquer pour notre patrie un titre que d'autres aimeraient à posséder.

8. Le but de cet article est de faire connaître d'une manière sommaire la marche des planimètres d'Oppikofer, de Piccard et de Wetli, et de donner du planimètre d'Amsler une démonstration nouvelle, de M. S. Cuénoud, différente de celle que l'auteur de l'appareil en a donnée dans le Bulletin trimestriel de la Société des sciences naturelles de Zurich (1856). La nouvelle démonstration a l'avantage de faire rentrer le planimètre d'Amsler dans le principe des trois précédents.

9. Si nous plaçons le planimètre de M. Piccard en premier lieu, c'est parce qu'il est le plus élémentaire et qu'il facilite l'intelligence de ceux qui suivent.

II. ARITHMOPLANIMÈTRE DE PICCARD. (Fig. 1.)

10. *Démonstration.* Soient les triangles semblables ADE et ABC nous aurons la proportion AD : DE : : AB : BC

Si nous faisons AB = 10, par exemple,
nous aurons $AD \times BC = DE \times 10$
mais comme BG = DE, nous aurons enfin $AD \times BC = BG \times 10$

Ce résultat nous permettra de construire un instrument, pour opérer numériquement la multiplication et la division; pour transformer les rectangles (dont les dimensions seraient dans les limites de l'instrument) en d'autres rectangles équivalents, qui auraient tous une base commune égale à 1 ou 10 ou 100, etc., et dont les surfaces seraient portionnelles aux hauteurs; enfin pour calculer graphiquement avec le compas, mais sans calculs, la surface des figures planes rectilignes qui auraient été décomposées en triangles ou en rectangles.

11. *Construction.* Prenez un triangle quelconque, le triangle équilatéral de préférence, fig. 1; divisez les côtés en 100 parties égales; menez des parallèles entrecoupées par des lignes plus fortes, de 5 en 5, pour reposer la vue; placez les chiffres de 1 à 10, de A en B; placez les chiffres de 0,5 à 10,0 de B en H; placez enfin au point A comme pivot, un cheveu lié à un morceau de plomb F, afin d'obtenir une règle mobile AF.

12. *De la multiplication.* Pour obtenir le produit de deux facteurs inférieurs à 10, par exemple 5×7, placez le cheveu AF sur l'un des facteurs, par exemple sur 7 en C; prenez le facteur 5 en D, en remontant la ligne DE jusqu'à la rencontre de la ligne AC en E; suivez la parallèle EG, le nombre 3,5 en G, en faisant abstraction de la virgule, donnera 35 pour résultat de 5×7.

Dans la position actuelle de la ligne AF, passant par le facteur 7 en C, on peut obtenir de même immédiatement, par des lectures sur l'instrument, les différents multiples de 7.

En donnant aux côtés du triangle fig. 1, une longueur de 3 décimètres environ, on pourra obtenir exactement les produits inférieurs à 10,000, de deux facteurs inférieurs à 100, pourvu qu'on ait soin de déterminer, mentalement, quel doit être le chiffre des unités du produit. Ainsi, pour avoir le produit de 97 par 86, on détermine le chiffre 2 des unités, puis l'instrument, par sa lecture donnera avec certitude le chiffre des dizaines, des centaines et des mille, soit le nombre 8340 qui devient 8342 par l'adjonction du chiffre 2 des unités. Mais si l'on voulait obtenir exactement les produits inférieurs à un million de deux facteurs inférieurs au nombre 1000, les côtés du triangle de la fig. 1 devraient alors atteindre environ 4 mètres de longueur. L'exactitude de cet instrument nouveau est donc bien li-

mitée, ainsi que celle des autres instruments du même genre, comme la règle logarithmique.

13. *De la division.* Pour obtenir le quotient d'un nombre inférieur à 100, par un diviseur inférieur à 10, ce quotient devant aussi être inférieur à 10, par exemple 35 divisé par 7; placez le cheveu AF sur le diviseur 7 en C; prenez le dividende 35 en G, en suivant la ligne GE jusqu'à sa rencontre avec la ligne AF en E; suivez la parallèle ED, le chiffre 5 en D indiquera le quotient cherché.

Dans la position actuelle de la ligne AF passant par le diviseur 7 en C, on peut obtenir de même les quotients par 7 d'autres nombres inférieurs à 70, ces quotients devant être inférieurs à 10.

14. *De la transformation des rectangles.* Pour transformer un rectangle, dont les dimensions ne sont pas plus grandes que AB, fig. 1, en un autre rectangle ayant AB ou 10 pour base, nous porterons la hauteur du rectangle donné sur BH, de B en C par exemple, en tendant le cheveu AF passant par C; nous porterons la base sur AB, de A en D par exemple; la ligne DE ou BG sera la hauteur du rectangle cherché, puisque l'on a

$$AD \times BC = AB \times DE = 10 \times DE = 10 \times BG.$$

15. *Du calcul des surfaces en général.* Si l'on veut calculer la surface d'une figure décomposée en triangles, sans opérer aucun calcul numérique, il faudra alors diviser la ligne BH des produits en 50 parties égales au lieu de 100. Puis, portant la hauteur du triangle sur BH, de B en C par exemple, et la base sur AB, de A en D par exemple, la ligne DE représentera graphiquement la surface du premier triangle ou plutôt lui sera proportionnelle; mais si l'on voulait connaître numériquement cette surface on la lirait sur la ligne BH servant d'échelle, au point G. On obtiendra de même la surface des autres triangles au moyen de lignes proportionnelles à leur surface. Si l'on a eu soin de réunir ces dernières, bout à bout au fur à mesure de l'opération, la ligne totale ainsi obtenue et portée sur la ligne BH, servant d'échelle des surfaces, indiquera alors l'aire totale de la figure donnée, et cela sans avoir fait un seul calcul.

III. PLANIMÈTRE D'OPPIKOFER. (Fig. 2.)

16. M. Oppikofer, à Berne, fut conduit à la construction de son planimètre par l'emploi d'un cylindre qu'il remplaça ensuite par un cône. Cet instrument n'a été accompagné par son auteur d'aucune démonstration théorique lors de sa présentation à l'Institut de France en 1837.

Le planimètre d'Oppikofer se compose des pièces suivantes : *un plateau en bois* A, fig. 2, qui se place sur la feuille comprenant la figure dont il faut calculer l'aire; *une plate-forme* B, soit *chariot,*

se mouvant sur trois roulettes, dont les deux de droite, qui sont creuses, roulent sur un rail saillant de l'arête de droite du plateau; on imprime au chariot un mouvement en avant ou en arrière, au moyen du bouton G; *une règle* D, solidaire avec le chariot B, concourt avec l'index *a*, à parcourir le périmètre de la figure; *une règle-index E*, s'appuyant contre trois roulettes fixées au chariot, portant l'index *a* solidaire avec elle, peut se glisser à droite ou à gauche au moyen du bouton H; *un cône droit* C, en métal, placé sur le chariot, est la principale pièce de l'instrument; son axe est un peu incliné, de manière que son apothême supérieur est de niveau, c'est-à-dire toujours parallèle au plateau A; il tourne sur son axe dont les extrémités s'appuient contre deux supports; *une petite roue*, finement dentée, parallèle à la base du cône et solidaire avec lui, engrène avec une crémaillère F aussi dentée et solidaire avec le plateau A, mais passant entre le chariot B et la roue dentée, de manière que quand le chariot chemine, le cône tourne sur son axe au moyen de la roue dentée qui repose sur la crémaillère F; *un petit chariot*, reposant sur le cône, est solidaire avec la règle-index E, au moyen d'une charnière; le point de contact du petit chariot avec le cône a lieu par la partie inférieure d'*une petite roue unie*, qu'on fait glisser sur l'apothême de niveau du cône, chaque fois que la règle E est poussée à gauche ou à droite; le plan de cette petite roue fait toujours un angle droit avec l'apothême de niveau du cône; enfin, cette roue est en communication avec l'aiguille d'*un cadran compteur* recouvrant le petit chariot; la roue et l'aiguille tournent dès que le grand chariot B est mis en mouvement, mais elles restent immobiles pendant tout le temps que la règle E, glissant seule à droite ou à gauche, fait glisser en même temps le petit chariot à droite ou à gauche en suivant l'apothême de niveau sur le cône.

17. La ligne *m n* représente le chemin que tracerait l'index *a* sur le plan, lorsque la roue du petit chariot sur le cône serait amenée au sommet du cône et que le grand chariot B serait mis en mouvement; pendant ce cheminement (si la roue du petit chariot avait pu réellement être amenée et reposer au sommet du cône qui est en même temps son point de pivot) l'aiguille et la roue n'auront point tourné. *Cette ligne* m n *est donc la limite d'action du cône sur le plan* correspondant à la ligne *m' n'* du plateau.

Quand on imprime au grand chariot B un mouvement en avant, la règle D doit pouvoir couvrir, successivement, toute la surface de la figure à calculer; l'index *a*, solidaire avec la règle-index E glissant à droite ou à gauche, pourra, au moyen de ces deux mouvements combinés, suivre le périmètre de la figure donnée.

Nous n'entrerons pas dans la démonstration théorique de cet instrument qui a déjà été donnée dans plusieurs ouvrages; nous mentionnerons seulement sa marche de gros en gros, afin de nous con-

duire à deux autres planimètres plus récents et beaucoup plus simples, aussi inventés en Suisse, dont celui d'Oppikofer est l'origine.

18. Voici maintenant comment procède l'instrument pour trouver l'aire de la figure *a, b, c, d, e, f, g, h, i, k*. La règle D décompose, fictivement, la figure en une infinité de tranches parallèles perpendiculaires à la ligne *m n* et qu'on suppose prolongées jusqu'à cette limite d'action du cône correspondant à son sommet; ces tranches parallèles peuvent être considérées à la limite comme des rectangles qui se transforment en secteurs sur le cône; la surface d'un de ces rectangles, jusqu'à la ligne *m n*, sera donnée directement par la mesure d'un seul arc de secteur sur le cône, au moyen de la roue et de l'aiguille du petit chariot, lorsque la règle D aura couvert le rectangle et que l'index *a* en aura parcouru en même temps le côté droit opposé à *m n;* l'amplitude de l'arc mesuré sur le cône, correspondant à l'un des rectangles sur le plan, sera d'autant plus grande que le rectangle s'étendra davantage sur la droite, c'est-à-dire que cet arc sera proportionnel à la surface de chaque rectangle : en d'autres termes, l'amplitude de l'arc sur le cône représente la hauteur d'un rectangle transformé, dont la base serait, par exemple, l'apothême du cône représentant 1000 unités linéaires, ce qui fait que la surface de ce rectangle sera représentée par sa hauteur multipliée par 1000, ce dont l'instrument tient compte sans avoir besoin de faire cette multiplication.

Si nous faisons mouvoir le grand chariot et la règle D, en poussant le bouton G avec la main gauche, et si, en même temps, nous faisons glisser l'index *a*, au moyen du bouton H, avec la main droite, de manière à suivre la ligne *a, b, c, d, e*, la roue du petit chariot sur le cône aura tourné dans une même direction, représentée par la flèche à droite de la figure, et l'index *a* sera arrivé sur le point *e*, alors l'aiguille du cadran compteur indiquera par sa position la surface totale de toutes les tranches soit de la figure *a, b, c, d, e, f, m, l,* qui est trop grande de la surface de la figure *k, i, h, g, f, m, l*. Afin de soustraire cette quantité, que nous appellerons *surface d'emprunt*, il n'y a qu'à continuer à parcourir le périmètre de la figure donnée. En faisant cheminer l'index *a*, de *e* en *f*, la roue du petit chariot ne tournera pas, mais en descendant pour suivre la ligne *f, g, h, i, k,* la roue du petit chariot tournera dans une direction inverse, représentée par la flèche à gauche de la figure; la quantité dont l'aiguille du cadran compteur aura tourné dans cette dernière direction, sera égale à la surface de la figure *k, i, h, g, f, m, l;* mais, par ce mouvement inverse de rotation de l'aiguille, cette surface d'emprunt a été soustraite de la surface totale de la première opération, en sorte que le point où l'aiguille du cadran s'est arrêtée indiquera exactement la surface de la figure *a, b, c, d, e, f, g, h, i, k*.

Ordinairement, avec le planimètre d'Oppikofer, on parcourt deux fois le périmètre des figures rectilignes dont on cherche l'aire ; nous n'expliquerons pas comment cela obvie à la difficulté que l'on rencontre à faire suivre, exactement et sans saccades de l'index *a*, le périmètre des figures à calculer.

On voit donc que le planimètre d'Oppikofer comprend toujours, dans chaque opération, une surface d'emprunt, comprise entre la figure à calculer et la ligne correspondant au chemin du sommet du cône sur le plan, mais cette surface d'emprunt s'élimine d'elle-même par le jeu de l'instrument.

19. Le prix élevé du planimètre d'Oppikofer, sa grandeur et son poids, en limitaient beaucoup l'usage, comme nous l'avons déjà dit, mais son défaut capital résidait dans la faible ouverture de l'angle au sommet du cône, d'où résultait l'impossibilité de calculer exactement les petites surfaces. En effet, si un petit rectangle à calculer devait être transformé en un autre dont la base fixe était représentée par le nombre constant 1000, il en résultait que la hauteur du rectangle transformé était alors presque imperceptible, ce qui fait que dans de petites figures où l'on aurait dû trouver + 1, l'instrument donnait quelquefois — 3, parce que le jeu ou l'ébat des pièces de l'instrument dépassait la faible quantité qui, multipliée par 1000, servait à exprimer la surface d'une petite figure.

Un plus grand angle au sommet du cône aurait augmenté le poids de l'instrument ainsi que sa hauteur. Nous verrons dans le paragraphe suivant, comment il a été obvié heureusement à l'imperfection du planimètre d'Oppikofer.

IV. PLANIMÈTRE DE WETLI. (Fig. 3.)

20. M. Wetli, à Zurich, reconnaissant les inconvénients de l'emploi du cône en métal du planimètre d'Oppikofer, le remplaça par un cercle horizontal ou disque en verre, qui peut être considéré comme un cône dont l'angle au sommet aurait sa valeur maximum soit 180 degrés : dans cette condition le sommet du cône se confond avec le centre de sa base.

Dans le planimètre d'Oppikofer, la circonférence de la base du cône était inférieure à la longueur de l'apothême, tandis que dans le cercle de Wetli nous avons le rapport du rayon à la circonférence, ce qui fait que le planimètre de Wetli est six ou sept fois plus exact que celui d'Oppikofer.

21. Le planimètre de Wetli, fig. 3, se compose des pièces suivantes, dans l'ordre de superposition : *un bâti* AA, en fer fondu, sert de plateau à l'instrument et se pose sur la feuille comprenant la figure dont il faut chercher l'aire ; ce bâti porte trois rails creux, un de chaque côté du bâti et un troisième au milieu, mais qui est mas-

qué dans la figure par un axe horizontal qui arrive en I ; *une plate-forme* B, soit chariot, se mouvant sur trois roulettes, cheminant dans les trois rails creux, peut se mouvoir en avant et en arrière (nous avons supprimé la roulette médiale antérieure pour ne pas compliquer la figure); *une règle mouvante* D, glissant à droite et à gauche, pincée entre quatre roulettes fixées au chariot ; *un index* H, solidaire avec la règle D, servant à parcourir le périmètre des figures à calculer; *un disque horizontal en verre* LLL, remplaçant le cône d'Oppikofer, est collé sur un axe tournant verticalement sur le chariot B, axe qui imprime au disque un mouvement horizontal ; *un fil métallique* C, fixé à deux boutons solidaires avec la règle mouvante D, enveloppe l'axe du disque et le fait tourner sur lui-même ainsi que le disque, chaque fois que la règle D est poussée à droite ou à gauche ; *un cercle ou cadran* KK, fixé verticalement au bâti A et solidaire avec lui ; *un chassis* FF, fixé derrière le cadran KK par une charnière, est placé horizontalement à la hauteur du centre du cadran KK ; *une roue verticale en verre* G, remplaçant celle du petit chariot du cône d'Oppikofer, est fixée solidairement à un axe horizontal, lequel pivote, par une de ses extrémités, dans le chassis F et par l'autre extrémité dans le centre du cadran KK en I; *une aiguille,* fixée à cet axe, marque sur le cadran KK le cheminement de la roue G ; la partie inférieure de la roue verticale G est en contact, par son poids, avec le disque en verre LLL ; la position de la roue G est invariable, sauf son mouvement de rotation sur son axe aboutissant en I.

22. Quand on pousse en avant le chariot B, il entraîne avec lui la règle D et le disque LLL, alors la roue verticale G trace sur le disque, par son point de contact, des rayons ou des diamètres suivant que le chariot accomplit une partie ou la totalité de sa course, mais, dans ces mouvements dans le sens des rayons, la roue G ne tourne pas du tout ; par contre, quand on fait glisser la règle D, à droite ou à gauche, le fil en métal C qui enveloppe l'axe du disque, fait tourner l'axe verticalement et celui-ci donne au disque un mouvement horizontal ; dans ce mouvement la roue G tourne avec son axe solidaire ainsi que l'aiguille qui affleure les divisions du cadran KK, ce qui mesure l'amplitude de l'arc de cercle décrit sur le disque L ; toutefois, la roue G ne tourne pas quand son point de contact correspond au centre du disque. Le mouvement à droite ou à gauche de la règle D, quand le chariot est arrêté, fait décrire, par la roue G, des arcs de cercles sur le disque, tandis que quand le chariot B y ajoute son mouvement, la roue G trace sur le disque des lignes quelconques qui sont les résultantes des deux mouvements.

Outre l'avantage de calculer bien plus exactement qu'avec le planimètre d'Oppikofer, celui de Wetli supprime le cône ainsi que la règle D de la figure 2, ce qui fait que l'index H de la figure 3 peut

se diriger dans toutes les directions, entraînant avec lui, avec une grande facilité et sans aucun effort, le chariot B. En tenant le bouton de l'index H, avec la main droite, celui qui opère avec l'instrument tient, avec la main gauche, une règle mince qu'il fait pivoter contre le style de l'index, pour la faire arriver sur la ligne H *a;* l'index H suit le bord de la règle et arrive au point *a*. On fait pivoter la règle sur *a* pour l'amener sur *a b*, puis l'index suit cette ligne et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'index revienne au point de départ.

23. Si nous faisons mouvoir le chariot B, jusqu'à ce que le point de contact de la roue G coïncide avec le centre du disque LLL, l'index H, fig. 3, sera arrivé au point *n*, par exemple. Alors faisant glisser l'index à gauche, le chariot B restant immobile, l'index tracera sur le plan une ligne *m n*, mais, pendant ce mouvement, la roue G, coïncidant toujours avec le centre du disque, n'aura point tourné. Cette ligne *m n*, tracée fictivement dans le plan comprenant la figure à calculer, représente aussi la *limite d'action du disque* correspondant à son centre. Cette ligne peut se trouver en dessus de la figure à calculer, elle peut couper cette figure ou se trouver en dessous; c'est l'homologue de la ligne *m n* de la figure 2.

24. Le planimètre de Wetli opère d'après les mêmes principes que celui d'Oppikofer, mais il chemine avec une grande facilité, car la moindre impulsion donnée à l'index H, en avant ou en arrière ou obliquement, fait cheminer le chariot. On peut suivre facilement les lignes obliques avec l'index et l'on obtient l'aire d'une figure en parcourant son périmètre une seule fois, tandis que celui d'Oppikofer exigeait qu'on suivit ce périmètre deux fois, d'abord dans un sens et ensuite dans l'autre, ce qui donnait deux résultats, dont l'addition à faire numériquement était la surface cherchée.

25. Voici comment procède l'instrument de Wetli, pour trouver l'aire de la figure *a, b, c, d, e, f, g, i*, H. L'index H, par son mouvement de droite à gauche, le chariot étant immobile, décompose fictivement la figure à calculer en une infinité de tranches parallèles, perpendiculaires à la ligne *m n* et prolongées jusqu'à cette ligne, ce qui doit avoir lieu quand la figure à calculer se trouve en dessus ou en dessous de *m n*. Ces tranches parallèles peuvent être considérées à la limite comme des rectangles qui se transforment en secteurs sur le cône. Pour calculer la surface de la portion *n, a, b, c, d, e, m*, en dessus de la ligne *m n*, nous amènerons l'index H au point *n;* l'aiguille du cadran KK sera mise à O; nous cheminerons avec l'index sur la ligne *n a* que nous supposons perpendiculaire à *m n;* le chariot et le disque seront entraînés, la roue G aura glissé sur le disque, dans la direction du centre de celui-ci, mais elle n'aura pas tourné. Par contre, en cheminant avec l'index de *a* dans la direction de *b*, la roue G tournera et quand l'index sera arrivé à *b*, l'aiguille attachée à l'axe I indiquera, sur le cadran KK, la surface des trois premières

tranches en dessus de *m n*. Pendant le cheminement de l'index, de *a* à *b*, le point de contact de la roue G n'aura pas décrit sur le disque un arc de cercle, parce que la ligne *a b* n'est pas parallèle à *m n*, mais il s'y est produit une résultante composée d'une série de petits arcs dont la somme est proportionnelle à la surface des trois premières tranches en dessus de *m n*. En continuant l'opération, lorsque l'index sera arrivé au point *e*, l'aiguille indiquera sur le cadran KK la surface de la portion *n, a, b, c, d, e, m*, qu'on peut considérer comme une figure distincte de celle en dessous de *m n*. Pour avoir la surface de la portion *m, f, g, i*, H, *n*, il n'y a qu'à continuer à parcourir le périmètre de la figure donnée. En suivant la ligne *e, m, f*, supposée perpendiculaire à *m n*, l'aiguille ne tournera pas, mais bien quand l'index parcourra la ligne *f, g, i*, H. Etant arrivé à ce point H, sans qu'il soit nécessaire de parcourir la ligne H *n* perpendiculaire à *m n*, l'aiguille accusera la surface totale de la figure, car la surface de la portion en dessous de *m n* aura été ajoutée à la surface de la portion en dessus, malgré que les deux flèches sur le plan semblent indiquer des directions inverses du chemin de de l'index H. En examinant le mouvement du disque ou de l'aiguille on verra qu'elle a continué à suivre la même direction, ce qui fait que les deux surfaces ont réellement été ajoutées et non déduites l'une de l'autre, car il n'y a, dans le cas présent de la figure donnée, aucune surface d'emprunt à déduire, puisque toutes les tranches parallèles aboutissant à la ligne *m n* ne sortent point de la figure donnée et font partie de sa surface.

26. En effet, avec le planimètre d'Oppikofer il y a toujours une surface d'emprunt, fig. 2, comprise entre la ligne *m n* et la figure à calculer située à sa droite, tandis que dans le planimètre de Wetli il peut se présenter trois cas : 1° la surface à calculer, comme dans la figure 3, s'étendant en dessus et en dessous de la ligne *m n* et ses tranches ne sortant point de son périmètre, il n'y a point de surface d'emprunt ; 2° la figure à calculer aboutissant à la ligne *m n* sans la dépasser et ses tranches restant dans son intérieur il n'y aura encore point de somme d'emprunt ; 3° la figure à calculer étant située en dessus ou en dessous de la ligne *m n* donnera lieu à une ou à plusieurs surfaces d'emprunt, suivant la forme de la figure à calculer.

27. Nous donnerons un exemple de ces trois cas dans la figure 4 : 1° le rectangle A se transformera sur le disque en deux secteurs inégaux ; la somme de leurs arcs *a* et *a'* indiquera la surface du rectangle A ; 2° le rectangle B donnera un secteur dont l'arc *b* indiquera la surface du rectangle B ; 3° le rectangle C, prolongé jusqu'à *m n*, donnera lieu à deux secteurs concentriques, l'arc *c* donnera la surface du grand secteur et l'arc *c'* celle du petit secteur ; ce dernier représentera une surface d'emprunt ; mais alors l'aiguille, en mesurant ces deux arcs, ayant tourné dans deux sens opposés, a soustrait

la surface du rectangle d'emprunt et l'aiguille s'est arrêtée sur le chiffre indiquant la surface réelle du rectangle C. On voit donc que l'aiguille ne tourne que quand la roue décrit des arcs sur le disque et qu'elle ne tourne pas quand la roue glisse sur des rayons.

V. PLANIMÈTRE D'AMSLER.

28. M. Amsler, à Schaffhouse, a travaillé pendant plusieurs années à transformer les deux planimètres précédents, dans le but d'obtenir une construction plus simple de ces instruments. Ses efforts ont été couronnés d'un plein succès par le planimètre qu'il construit maintenant lui-même à Schaffhouse, qui est remarquable par sa simplicité et son exactitude : il ne se compose que de deux règles liées entr'elles par une articulation, l'une des règles étant munie d'une roue compteur qui tourne sur le plan même comprenant la figure à calculer.

29. Donnons une idée de cet instrument ramené à son état rudimentaire, fig. 5. P est le pivot sur le plan, autour duquel se meut l'instrument; A est l'articulation des deux règles; R est la roue compteur tournant autour de son axe.

Si l'instrument n'avait à calculer que le secteur *a b* P ou les secteurs d'un rayon égal à PR, dont le centre serait en P, les divisions de la roue pourraient être calculées de manière à indiquer la surface de ces secteurs, en mesurant seulement les arcs et sans avoir besoin de l'articulation A. Mais, si la surface à calculer était le trapèze circulaire *a, b, c, d,* et si la roue R doit pouvoir parcourir le périmètre du trapèze sans changer de place au point P, il faudra nécessairement articuler la règle PR par son milieu, en A; alors la roue servant en même temps d'index et de compteur pourra opérer un circuit, se rapprocher de P et même coïncider avec ce point, si le pivot ne l'en empêchait pas. Nous savons que l'instrument pourra mesurer la surface des secteurs d'un rayon égal à PR, mais, si ce même instrument pouvait aussi mesurer la surface du secteur *c d* P et la soustraire ensuite de celle du grand secteur *a b* P, nous aurions alors un instrument opérant comme ceux d'Oppikofer et de Wetli. Dans cette hypothèse, la roue R donnerait la surface du grand secteur en parcourant l'arc de *a* en *b;* les côtés *b c* et *d a,* parcourus par la roue en sens inverse, détruiraient réciproquement leur cheminement sur la roue; mais l'arc *c d,* parcouru par la roue R, de *c* en *d,* dans une position oblique, donnerait la surface du petit secteur *c d* P, qui serait déduite du grand secteur, parce que la roue aurait cheminé en sens inverse à celui parcouru par la roue R de *a* en *b:* c'est ce que notre démonstration nouvelle prouvera.

30. Si nous faisons mouvoir la règle AR, au moyen de l'articulation A, jusqu'à ce que la roue R vienne coïncider avec le pivot P;

si, ensuite, nous faisons mouvoir la règle PA comme rayon, sur le point P comme centre, la roue R restant toujours en coïncidence avec le point P, cette roue n'aura point tourné, lors même que le point A aurait décrit une circonférence, car le périmètre parcouru par R se réduit à un point. Le pivot P, ou le pôle comme l'appelle M. Amsler, sera donc *la limite d'action de l'instrument,* tandis que dans les planimètres d'Oppikofer et de Wetli cette limite était une ligne *m n*, parce que le cône et le disque transportaient leur pôle, en avant ou en arrière, en lui faisant suivre une ligne droite.

Nous ferons observer que, dans la pratique, la roue R ne peut servir en même temps de compteur et d'index, comme dans la fig. 5, pour parcourir le périmètre des figures; que cette roue masquerait le chemin qu'elle doit suivre; qu'elle ne pourrait glisser contre le bord d'une règle placée successivement sur les lignes du périmètre des figures; qu'elle ne pourrait être soulevée, même légèrement pour éviter une aspérité du papier, sans perdre son adhérence avec le plan et fausser par là le calcul. C'est pourquoi la roue a dû être placée sur le prolongement de la règle RA, du côté de l'articulation, ce qui donne l'instrument P′A′R′, avec la roue compteur en S, fig. 6, tout en procurant au planimètre l'avantage d'un troisième point d'appui sur le plan en S, point d'appui qui manquait à l'instrument PAR qui n'en avait que deux. Le point R′ reste alors pour servir d'index seulement. Ce déplacement forcé de la roue est la cause de plusieurs anomalies apparentes dans la marche de l'instrument, ce qui en complique l'étude.

Ordinairement, quand on opère avec l'instrument, le pivot se place au haut du plan, l'index à droite et la roue à gauche, comme dans la figure 6.

31. Nous avons vu, dans les deux planimètres précédents, que les figures dont on cherche l'aire sont décomposées, fictivement, en rectangles qu'on suppose prolongés jusqu'à une ligne *m n* limite d'action de l'instrument. De même, dans celui d'Amsler, on peut alors considérer, d'après notre démonstration nouvelle, la figure à calculer comme décomposée en une infinité de secteurs, dont les arcs coïncideraient avec le périmètre de la figure à calculer et dont les centres aboutiraient au pivot, limite d'action de l'instrument, fig. 6. L'index, en parcourant les arcs des grands secteurs, fait cheminer la roue dans un certain sens, ce qui procure la surface totale des secteurs, mais en cheminant en sens inverse l'index fait aussi tourner la roue dans un sens opposé, ce qui opère la soustraction des petits secteurs qui constituent la ou les surfaces d'emprunt, de la même manière que les planimètres d'Oppikofer et de Wetli.

Avec le planimètre qui nous occupe, il y a toujours une surface d'emprunt lorsque le pivot est placé en dehors de la figure à calculer, tandis que lorsqu'il est placé en dedans il n'y a pas de surface

d'emprunt, si aucun des secteurs ne sort de la figure dont il faut trouver l'aire.

Le planimètre d'Amsler, au moyen de sa roue compteur, opère donc directement sur les secteurs, tandis que les planimètres précédents décomposaient d'abord les figures à calculer en rectangles, qui se transformaient ensuite en secteurs sur le cône ou sur le disque en verre.

Dans la théorie de son instrument, M. Amsler a considéré l'arc que décrit l'articulation des deux règles comme la limite d'action du planimètre, au lieu de prendre le point de pivot, ce qui ne permettait pas, à son point de vue, d'en faire un rapprochement facile avec les planimètres d'Oppikofer et de Wetli.

a) DESCRIPTION ET USAGE DU PLANIMÈTRE DE AMSLER.

32. Le planimètre de Amsler se compose (fig. 7) d'une tige A, à section carrée, terminée à l'une de ses extrémités par une pointe F, et s'engageant, à frottement doux, par l'autre extrémité, dans une coulisse de même section H. A cette coulisse est fixée, à pointes, une roulette D dont le rebord repose sur le papier et qui est divisée sur son contour. Un vernier L, fixé à la pièce de la coulisse, sert à apprécier les fractions de divisions de la roulette. L'axe de celle-ci porte une vis sans fin, au moyen de laquelle un petit pignon K avance d'une dent à chaque tour que fait la roulette D; l'axe vertical de ce petit pignon porte une roue G divisée en 10 parties égales.

A l'extrémité de la pièce H, vient s'articuler, à pointes, une tige B, terminée en E par un piquoir qui peut s'implanter dans le papier.

33. Pour se servir de l'instrument, on fait glisser la tige A dans sa coulisse jusqu'à ce que la longueur CF soit en rapport avec l'échelle du dessin que l'on veut évaluer. Pour faciliter cette opération, on a marqué sur la tige A les traits qui doivent arriver à l'ouverture de la coulisse pour telle ou telle échelle déterminée. Dans les grands planimètres, le mouvement de la tige A dans sa coulisse peut être rendu aussi lent qu'on le désire, au moyen d'une vis de rappel.

34. L'instrument étant réglé, on fixe la pointe E en dedans ou en dehors de la figure dont on veut faire la quadrature, on fait tourner la roue D de manière à ramener le zéro de sa graduation en coïncidence avec le zéro du vernier L, et le zéro de la roue G en face d'un repère fixe. On marque exactement le point de départ du traçoir F, et l'on parcourt avec ce traçoir le contour de la figure, de gauche à droite (comme les aiguilles d'une montre), jusqu'à ce que l'on revienne exactement au point de départ. On lit alors sur la roue G le nombre des divisions parcourues, qui indique les centaines du résultat, et sur la roue D les dizaines et unités; les dixièmes d'unité peuvent s'apprécier au moyen du vernier.

35. Cette lecture donne immédiatement la surface cherchée lorsque la pointe E a été fixée en dehors de la surface à calculer. Si, au contraire, la pointe E a été fixée dans l'intérieur de cette surface, il faut ajouter à l'indication de l'instrument un nombre constant qui est gravé sur la tige A à côté du trait qui affleure l'extrémité de la coulisse.

36. Supposons, pour éclaircir les explications qui précèdent, que l'on ait fait arriver à l'extrémité de la coulisse le trait marqué $100\square^{mm}$: chaque division de la roulette D indiquera une surface parcourue de 100 millimètres carrés. Si, après avoir parcouru le contour de la figure, la roue G indique 3, et la poulie D 47,8, la surface sera 347,8 unités, soit $100 \times 347{,}8 = 34780$ millimètres carrés, lorsque la pointe E aura été fixée en dehors de la figure. Si la pointe a été fixée dans l'intérieur, il faudra ajouter à la lecture 347,8 le nombre 1912,6 qui se trouve gravé en face du trait $100\square^{mm}$, en sorte que la surface sera 2260,4 unités,

soit $100 \times 2260{,}4 = 226040$ millimètres carrés.

37. Il faut prendre garde que lorsque la pointe E est placée dans l'intérieur de la figure, l'indication de l'instrument peut être négative, en sorte qu'il faut alors la retrancher du nombre constant.

Pour éviter l'inconvénient de s'assurer si la lecture est positive ou négative, on peut procéder de la manière suivante :

Au lieu de ramener l'instrument à zéro avant de quitter le point de départ, on en fait la lecture, qui serait 235,4 par exemple.

On parcourt le contour de la figure avec le traçoir, et quand on est arrivé exactement au point de départ, on fait une seconde lecture, soit 475,8. On ajoute à cette lecture le nombre constant 1912,6, ce qui donne 2883,4 et l'on retranche de cette somme la première lecture 235,4, ce qui donne 2153,0 unités, soit 215300 millimètres carrés. L'indication de l'instrument équivaut à une indication négative quand la seconde lecture est inférieure à la première.

38. Dans l'évaluation de grandes figures, la roue G peut faire plusieurs tours dans le sens direct ; il est donc nécessaire d'observer combien de fois le zéro de cette roue passe devant l'index, dans un sens ou dans l'autre.

39. Le grand avantage que cet instrument possède sur les précédents, c'est d'être applicable à plusieurs échelles et plusieurs unités de mesure, tandis que les planimètres d'Oppikofer et de Wetli ne peuvent s'adapter qu'à une seule échelle. Il permet en outre de tenir compte, par le mouvement de la tige A dans sa coulisse H, du degré hygrométrique du papier.

b) THÉORIE DU PLANIMÈTRE DE AMSLER.

40. Soit un cercle roulant, sans glisser, sur une droite qui lui est tangente. Un point quelconque de la circonférence parcourt, dans ce mouvement, un chemin égal à celui que décrit le centre. Si des cercles de rayons différents roulent sur la même droite, un même déplacement des centres correspond à des arcs développés égaux, mais dont les nombres de degrés sont en raison inverse des rayons.

41. Soit ensuite C (fig. 8), une roulette pouvant tourner autour de l'axe AB en s'appuyant sur un plan parallèle à cet axe. Quand l'axe se transporte parallèlement à lui-même de AB en A′B′, un point de la circonférence de la roulette parcourt un arc égal au chemin parcouru par la droite AB.

Si l'axe se meut dans le sens de sa longueur, de AB en A″B″ (fig. 8), la roulette glisse sans tourner.

42. Enfin, si le point de contact de la roulette et du plan parcourt sur celui-ci une droite quelconque CC′ (fig. 9), la roulette glisse et tourne tout à la fois, et l'arc parcouru par un point quelconque de sa circonférence dépend de l'angle que fait la direction CC′ avec l'axe de la roulette.

En désignant par α l'angle C′Cc, on peut décomposer le mouvement de la roulette suivant CC′ en un mouvement de glissement suivant Cc' et un mouvement de roulement suivant Cc; la roulette ne tournera qu'en vertu de ce second mouvement, en sorte que le chemin Cc parcouru par un point de la circonférence est donné par l'équation :

$$Cc = CC'. \cos \alpha.$$

43. En réduisant à des lignes les tiges qui composent le planimètre de Amsler, on peut le considérer comme formé de deux tiges de longueurs invariables, AC et BD (fig. 10), articulées en A. Le point C est fixe, l'extrémité B suit le contour de la figure à mesurer et l'extrémité D porte une roulette dont le plan est perpendiculaire à BD.

Supposons d'abord que le point B décrive un cercle de rayon a et dont le centre soit en C. Il est évident que l'instrument conserve une figure constante, en sorte que le point de contact D de la roulette et du plan décrit aussi un cercle, concentrique au premier, et dont je désigne le rayon par a'.

En décomposant, comme au n° 42, le mouvement de la roulette suivant les directions Dm' et Dm'', on trouvera qu'en désignant par e le chemin parcouru par le point D sur le cercle CD, par e' l'arc parcouru à la circonférence de la roulette, et par α l'angle mDm' on a :

$$e' = e \cos \alpha. \qquad (1).$$

Pour déterminer l'angle α en fonction du rayon a du cercle que parcourt le point B, on remarque que le triangle CDA donne :

$$\overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - 2.\ \overline{CD}.\ \overline{DA}.\ \cos CDA,$$

ou, en observant que $CDA = 180^\circ - \alpha$, et en posant

$$CA = R,\ DA = r,\ R^2 = a'^2 + r^2 + 2a'r \cos\alpha \qquad (2).$$

Le triangle CDB donne également :

$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 - 2.\ \overline{CD}.\ \overline{DB} \cos CDB,$$

ou, en posant $AB = l$, $a^2 = a'^2 + (r+l)^2 + 2a'(r+l)\cos\alpha$ (3).

Retranchant (2) de (3), on a :

$$a^2 - R^2 = 2rl + l^2 + 2a'l.\ \cos\alpha$$

d'où $$a' \cos\alpha = \frac{a^2 - (R^2 + l^2 + 2rl)}{2l} \qquad (4).$$

Quand le point B décrit un arc de cercle dont la longueur est E, le rayon fictif CB parcourt un secteur dont la surface est :

$$\tfrac{1}{2} E \times CB \text{ ou } \tfrac{1}{2} E a.$$

Dans le même temps, le point D décrit un arc semblable e, lié à E par la proportion :

$$\frac{e}{E} = \frac{a'}{a},\ \text{d'où } e = \frac{E.\ a'}{a},$$

et la roulette développe un e' égal à $e \cos\alpha$, soit $\dfrac{E\, a' \cos\alpha}{a}$.

En remplaçant, dans cette expression, $a' \cos\alpha$ par sa valeur (4), on trouve :

$$e' = \frac{E}{a} \cdot \frac{a^2 - (R^2 + l^2 + 2rl)}{2l}$$

ou $$e' = \frac{Ea}{2l} - \frac{E}{2al}(R^2 + l^2 + 2rl),$$

d'où $$e'l = \frac{Ea}{2} - \frac{E}{2a}(R^2 + l^2 + 2rl),$$

ou $$e'l = \text{surf. secteur} - \frac{E}{2a}(R^2 + l^2 + 2rl).$$

Le rapport $\dfrac{E}{a}$ de l'arc E à son rayon a est égal à la longueur ω d'un arc semblable à E pris dans un cercle de rayon 1 ; on a donc :

$$e'l = \text{surf. secteur} - \tfrac{1}{2}\omega\,(R^2 + l^2 + 2rl),$$

d'où $$\text{surf. secteur} = e'l + \tfrac{1}{2}\omega\,(R^2 + l^2 + 2rl).$$

Il est à remarquer que la quantité $R^2 + l^2 + 2rl$ est constante

pour un même état de l'instrument, ensorte qu'en désignant par H cette quantité, on a :

$$\text{surf. secteur} = e'l + \tfrac{1}{2}\,\omega\,\mathrm{H} \qquad (5).$$

44. Supposons maintenant que le pôle de l'instrument étant en C (fig. 11), on fasse parcourir au traçoir B les arcs FG, IK, LM de plusieurs secteurs ayant pour centre le point C, et que l'on ramène ensuite ce traçoir en un point M′ situé sur le rayon extrême, à une distance CM′ = CF.

L'arc total parcouru par la roulette dans ce mouvement se compose évidemment de 3 parties :

1° L'arc parcouru pendant le trajet du traçoir B sur les arcs FG, IK, LM.

2° L'arc parcouru pendant le trajet du traçoir sur les rayons GI, KL.

3° L'arc parcouru pendant le trajet du traçoir sur le rayon MM′.

Il est évident que l'arc parcouru pendant ce dernier trajet est égal et de sens contraire à celui mentionné à 2°, ensorte que l'instrument n'indique, en définitive, que l'arc parcouru pendant que le traçoir suivait les arcs FG, IK, LM. Si l'on désigne par ω_1, ω_2, ω_3 les arcs de rayon = 1 et semblables à FG, IK, LM, par e'_1, e'_2, e_3 les arcs correspondants parcourus par la roulette, par ω la somme $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ et par e' la somme $e'_1 + e'_2 + e'_3$, on aura :

$$\begin{aligned}
\text{surf. CFG} &= e'_1\,l + \tfrac{1}{2}\,\omega_1\,\mathrm{H}\\
\text{surf. CIK} &= e'_2\,l + \tfrac{1}{2}\,\omega_2\,\mathrm{H}\\
\text{surf. CLM} &= e'_3\,l + \tfrac{1}{2}\,\omega_3\,\mathrm{H}\\
\hline
\text{surf. totale} &= e'\,l + \tfrac{1}{2}\,\omega\,\mathrm{H} \ldots\ldots\ldots \quad (6).
\end{aligned}$$

45. Si la somme des angles des secteurs valait 4 angles droits (fig. 12), l'ensemble des secteurs formerait une surface continue dans l'intérieur de laquelle se trouverait le point C. On aurait, dans ce cas, $\omega = 2\pi$, d'où

$$\text{surf. totale} = e'l + \pi\,(\mathrm{R}^2 + l^2 + 2rl) \qquad (7).$$

46. Supposons ensuite que l'on veuille évaluer la somme des surfaces de plusieurs trapèzes circulaires (fig. 13) FGG′F′, IKK′I′, etc., dont les côtés iraient abouter en C; on aura à évaluer, comme précédemment, la surface CFGIK....P, puis la surface CF′G′I′K′.... P′, et à retrancher celle-ci de la première. Pour cela, on fera partir le traçoir B du point F, on lui fera suivre le contour FGIKL..... PP′N′M′.....G′F′F, en ayant soin de le ramener exactement au point de départ. Cela fait, on aura $\omega = 0$, puisque l'angle parcouru par le rayon CB dans un sens est égal à l'angle qu'il a parcouru en sens contraire, ensorte que la formule (6) donne pour ce cas :

$$\text{surf. totale} = e'l \qquad (8).$$

47. Nous pouvons déduire maintenant, de ce qui précède, le moyen d'évaluer la surface d'une figure plane terminée par un contour quelconque. En effet, si le pôle de l'instrument est placé en dehors de la figure à évaluer, en P′ (fig. 6), on pourra considérer cette figure comme la somme d'un grand nombre de trapèzes circulaires élémentaires ayant pour sommet commun le point P′, ensorte qu'en désignant par e' l'arc dévéloppé par la roulette, on aura, comme au N° 46 :

$$\text{surface} = e'l.$$

Si, au contraire, le pôle C de l'instrument est placé à l'intérieur de la figure dont on veut connaître la surface (fig. 14), on pourra considérer cette figure comme la somme d'un grand nombre de secteurs élémentaires ayant pour sommet commun le point C et pour somme angulaire 4 droits, ensorte que l'on aura, comme au N° 45 :

$$\text{surface} = e'l + \Pi\,(R^2 + l^2 + 2rl).$$

48. Le nombre $\Pi\,(R^2 + l^2 + 2rl)$ est constant pour chaque état du planimètre ; c'est le nombre qui est gravé à côté du trait que l'on fait affleurer au bord de la coulisse (fig. 7). Quant au produit $e'l$, il peut être lu immédiatement sur la roulette si l'on a soin de graver à côté de chaque trait de division de celle-ci le produit précédent au lieu de la simple valeur de e'.

Au reste, on peut calculer le rayon de la roulette de telle façon qu'un tour corresponde à une surface déterminée. Par exemple, si l'unité de surface est la ligne carrée, et si un tour de la roulette doit correspondre à une surface de un pouce carré, lorsque cette surface est extérieure au pôle, on doit avoir, en désignant par x le rayon de la roulette :

$$100 = 2\Pi\,x.\,l\,,\ \text{d'où}\ x = \frac{100}{2\Pi l}.$$

La valeur de l étant prise à volonté, on déduit de là x, et si l'on divise la circonférence en 100 parties égales, chacune d'elles indiquera une surface d'une ligne carrée.

49. La circonférence de la roulette étant divisée comme il vient d'être dit, si l'on veut s'en servir pour mesurer une surface exprimée au moyen d'une unité différente, il suffit de changer la longueur du bras l. En effet, soit m le rapport de la nouvelle unité à la ligne carrée, et l' la longueur du bras qui permettra d'exprimer 100 unités nouvelles au moyen d'un tour complet de la roulette. On avait

$$100 = 2\Pi\,xl\,;\ \text{on aura}\ 100\,m = 2\Pi\,xl',$$

d'où

$$l' = ml.$$

Par exemple, si la nouvelle unité était 10 millimètres carrés, on aurait $m = \frac{10}{9}$, et par suite $l' = 1\frac{1}{9}\,l$.

Dans la plupart des planimètres construits par M. Amsler, le rayon x de la roulette est de 1 centimètre. La longueur l du bras

qui fait faire un tour à la roulette pour une surface de 1 décimètre carré est dans ce cas :

$$l = \frac{100}{2\pi} = 159^{\frac{m}{m}},1.$$

Si l'unité devient 0,1 de pied carré, on a

$$l' = 0,9\,l = 143^{\frac{m}{m}},2.$$

50. Le calcul du nombre constant s'effectue facilement si l'on connaît les dimensions de l'instrument. Par exemple, si un tour de la roulette doit correspondre à une surface de 1 décimètre carré, auquel cas chaque division de la roulette indique une surface de 1 centimètre carré ou 100 millimètres carrés (voyez N° 36), on aura d'après le calcul précédent $l = 159^{\frac{m}{m}},1$ soit 15,91 centimètres.

Si l'on prend $R = 15,8$ centimètres et $r = 3\frac{1}{3}$ centimètres, on aura

$$\pi\,(R^2 + l^2 + 2\,rl) = 1912,6.$$

Pour passer de ce nombre à celui qui correspond à une surface de 0,1 de pied carré, il suffit de changer l en $0,9\,l$ et de transformer ensuite le nombre de centimètres carrés ainsi obtenus en dizaines de lignes carrées, en multipliant le premier nombre par $\frac{10}{9}$. On trouve ainsi

$$\pi\,(R^2 + 0,81\,l^2 + 1,8\,rl) = 1740,8$$

et

$$1740,8 \times \frac{10}{9} = 1934,8.$$

51. La formule (7), N° 45 est susceptible de plusieurs vérifications intéressantes. Lorsque la direction de la roulette passe par le pôle C, le plan de cette roulette est dirigé normalement au chemin parcouru par le point de contact D, ensorte que la roulette ne tourne pas. L'indication de l'instrument est donc nulle, et si l'on a fait parcourir au point B une circonférence complète autour du point C, la surface de ce cercle doit être égale au nombre constant.

Or, on peut s'assurer qu'il en est réellement ainsi, puisque le triangle CDB (fig. 10) devient rectangle dans ce cas, ce qui donne

$$\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 + 2.\,DA.\,AB$$

ou

$$\overline{CB}^2 = R^2 + l^2 + 2rl$$

et $\pi.\,\overline{CB}^2$ ou surf. du cercle décrit par $B = \pi\,(R^2 + l^2 + 2\,rl)$.

S'il était matériellement possible d'amener le point B en C, les longueurs AB et AC étant égales, on pourrait donner un tour complet de l'instrument, et dans ce tour la roulette aurait constamment tourné sans glisser. La surface parcourue par le point B se réduisant à un point, la formule (7) doit donner un résultat nul.

Remarquons, en effet, que dans ce mouvement la roulette aura constamment tourné dans le sens inverse de celui que nous avons supposé au N° 43, ensorte que l'indication de l'instrument sera né-

gative. Le point de contact de la roulette ayant parcouru une circonférence de rayon $R+r$, on aura $e'=-2\pi(l+r)$
d'où : indication de l'instrument $= e'l = -2\pi\, l\,(l+r)$.

D'un autre côté, le nombre constant $\pi\,(R^2+l^2+2rl)$ devient, dans la supposition $R=l$:

$$\pi(l^2+l^2+2rl)=2\,\pi\, l\,(l+r).$$

Ce nombre constant est donc égal et de signe contraire à l'indication de la roulette, ensorte que la somme de ces deux quantités est nulle.

Si les trois bras R, l et r étaient égaux, le nombre constant deviendrait égal à $4\,\pi\,R^2$. Dans ce cas, l'indication de la roulette ne pourrait être nulle que si les deux points D et C se confondaient ; alors, le cercle parcouru par le point B aurait pour rayon 2R, et pour surface $4\,\pi\,R^2$ qui est précisément la valeur du nombre constant.

52. Dans le cas où les trois bras sont inégaux, le plus grand cercle que puisse décrire le point B est celui qui a pour rayon $CA+AB=R+l$; ce cercle a pour surface $\pi\,(R+l)^2=\pi\,(R^2+2Rl+l^2)$. La roulette décrit, dans ce mouvement, un cercle de rayon $CA-AD=R-r$, ensorte que $e'=2\pi\,(R-r)$. La formule (7) devient alors :

$$\begin{aligned}\text{surface totale} &= 2\,\pi\, l\,(R-r)+\pi\,(R^2+l^2+2rl)\\ &= \pi\,(R^2+2Rl+l^2)\end{aligned}$$

résultat identique à celui indiqué plus haut.

Le plus petit cercle que puisse décrire le point B a pour rayon $R-l$ ou $l-R$ selon que l'on a $R>l$ ou $R<l$; la surface de ce cercle est $\pi\,(R-l)^2$ ou $\pi\,(R^2-2Rl+l^2)$. Dans ce cas, la roulette parcourt, en sens inverse de son mouvement direct, une circonférence de rayon $R+r$, ensorte que $e'=-2\pi\,(R+r)$.

La formule (7) devient :

$$\begin{aligned}\text{surf. totale} &= -2\,\pi\, l\,(R+r)+\pi\,(R^2+l^2+2rl)\\ &= \pi\,(R^2-2Rl+l^2)\end{aligned}$$

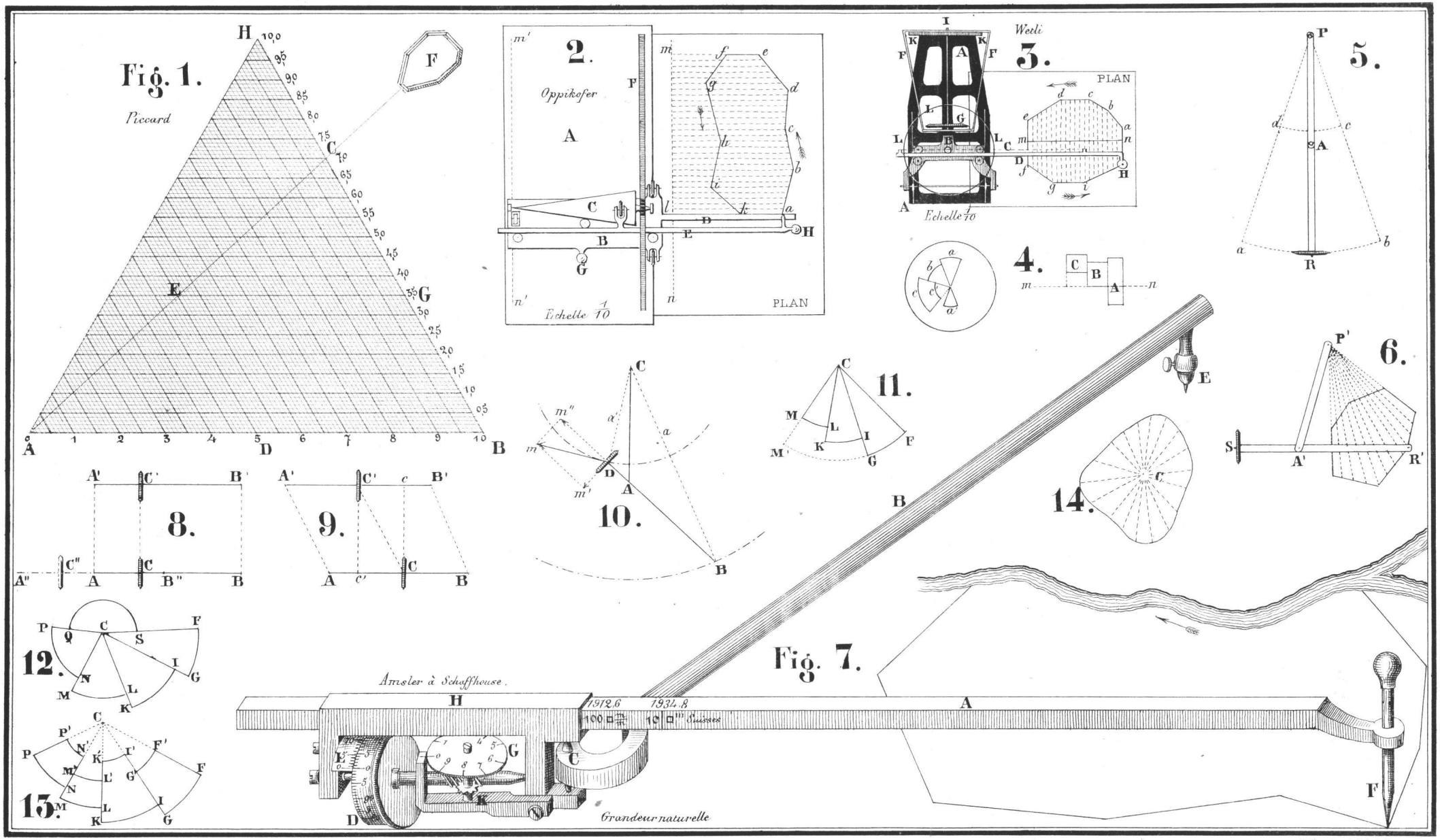
résultat pareil à celui qui a été indiqué précédemment.

53. Ces diverses vérifications n'étaient sans doute pas nécessaires pour justifier l'emploi de l'instrument, mais elles ont l'avantage d'éclaircir un peu la démonstration quelque peu abstraite du N° 43.

Il est inutile d'ajouter que si la roulette, au lieu d'être placée sur le prolongement de BA (fig. 10), était placée entre B et A, le signe de r changerait, ensorte que le nombre constant deviendrait

$$H=\pi\,(R^2+l^2-2rl).$$

54. M. Amsler adapte à ses planimètres, quand on le demande, une sorte de pantographe ou petit planimètre ayant sa coulisse et ses divisions particulières, au moyen duquel on peut évaluer, avec une grande précision, des figures de dimensions très petites, et même des surfaces pour ainsi dire microscopiques.



J.F.P.

J. Blanchard lith. à Lausanne