

# Sur la dispersion naturelle des projectiles et la loi des erreurs

Autor(en): **Muyden, Aloys van**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **14 (1875-1877)**

Heft 75

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-258458>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LA  
DISPERSION NATURELLE DES PROJECTILES

ET LA  
LOI DES ERREURS

PAR

Aloys VAN MUYDEN, Ingénieur.

(*planches 1 et 2*)

---

L'analyse mathématique fournit une relation explicite et complète entre la valeur d'une erreur d'observation quelconque et la probabilité de la répétition de cette erreur ; et, comme corollaire, la probabilité qu'une erreur est comprise entre des limites finies.

Cette relation peut être contrôlée empiriquement, et il n'est pas sans intérêt de démêler dans des phénomènes en apparence très dissemblables la trace d'une loi commune dont la démonstration est primitivement résultée de la théorie pure. La généralité de la loi sera d'autant mieux établie qu'elle aura été corroborée, en remontant par induction des phénomènes à la formule, par des méthodes et des données physiques multiples.

Les événements naturels tels que la statistique, la météorologie, les erreurs expérimentales dans l'observation des instruments, etc., se prêtent très bien à une démonstration à *posteriori* de la loi des erreurs ; à la condition, bien entendu, qu'on dispose d'un nombre suffisant de données (1).

Nous nous proposons, dans cette note, de faire ressortir la similitude de la loi des erreurs, telle qu'elle a été formulée par Laplace (2), avec celle qui régit la dispersion naturelle des points de chute des projectiles ; nous nous servirons à cet effet du relevé officiel de tirs balistiques exécutés avec le canon de 8<sup>cm</sup>.4 d'une part et le fusil d'infanterie de l'autre.

La connaissance de la loi de dispersion des coups et de la précision de son arme est nécessaire à l'artilleur pour apprécier à *priori* l'effet utile du tir, exactement comme l'expérimentateur a besoin de connaître la loi des erreurs et la précision de son instrument pour estimer la probabilité d'incertitude d'une observation ou d'un groupe d'observations. La loi trouvée pour les écarts de tir présente un caractère de généralité ; elle s'applique aussi bien, comme nous le verrons, aux erreurs de la plupart des observations scientifiques et elle a l'avantage de prêter à une conception concrète de la loi.

Dans ce qui va suivre, nous rappellerons tout d'abord brièvement, sans les démontrer, quelques principes empruntés au calcul des probabilités de façon à placer suc-

---

(1) « Les lois de la probabilité, si vraies en général, si trompeuses en particulier. » (Gibbon.)

(2) Laplace : Théorie analytique des probabilités. Paris 1812.

cessivement la question sur le terrain de la théorie pure et de l'expérience.

Parmi les ouvrages que nous avons consultés avec le plus de profit pour cette étude, nous citerons : *Gauss* : Méthode des moindres carrés, mémoires sur la combinaison des observations, Paris, 1855. — *E. Jouffret* : Sur la probabilité du tir des bouches à feu et la méthode des moindres carrés, Paris, 1875. — *E. Jouffret* : Etude sur l'effet utile du tir, Paris, 1873. — *Siegfried* : Beitrag zur Schiesstheorie angewendet auf das Schiessen mit den schweizerischen Handfeuerwaffen, Frauenfeld, 1872.

## I.

Soient :

- $x$  la valeur d'une erreur d'observation,
- $z$  la probabilité de la répétition de l'erreur  $x$ ,
- $h$  un coefficient numérique à déterminer.

La probabilité typique des erreurs, c'est-à-dire la relation entre une erreur d'observation et la probabilité de sa répétition, se présente sous la forme :

$$(1) \quad z = \varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

Le coefficient  $h$  est une fonction de l'erreur moyenne, il mesure la précision des observations et est constant pour un même système de données expérimentales.

Soient, pour un même système de données :

- $n$  le nombre des observations,
- $\epsilon$  et  $\mu$  l'erreur moyenne quadratique et arithmétique commise sur une observation,



E l'erreur quadratique commise sur la moyenne des observations,

$\delta$  (1) les écarts de chaque observation avec la moyenne.

$$\text{on a : } \varepsilon = \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n-1}}; \mu = \frac{\sum \delta}{n}; E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Et la constante  $h$  a pour expression :

$$(2) \quad h = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2}} = \frac{1}{\mu \sqrt{\pi}} \quad \text{ou bien :}$$

$$h = \frac{1}{E \sqrt{2}}$$

suivant qu'il s'agit de la probabilité d'erreur d'une observation ou d'un groupe d'observations.

Ceci posé, la probabilité que l'erreur  $x$  est comprise entre des limites finies  $x = -a$  et  $+a$ ; ou, ce qui revient au même, ne dépasse pas  $a$  en valeur absolue, s'obtient par l'intégration, définie entre les limites  $-a$  et  $+a$ , de l'expression (1).

Appelant  $P$  cette nouvelle fonction, elle devient :

$$(3) \quad P_a = \theta(r) = \frac{2h}{\pi} \int_0^a e^{-h^2 x^2} \cdot dx$$

Les expressions (1) et (3) se simplifient pour le calcul en posant :

$$hx = t$$

d'où, à la limite,  $ha = t$ .

Remplaçant, et observant que  $dt = h dx$ ; on a :

$$(4) \quad z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$$

---

(1) Pour  $n = \infty$ , on aurait  $\delta = x$ .

$$(5) \quad P_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t=ha} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( t - \frac{t^3}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{t^5}{5} - \dots \right)$$

Ces expressions ne renfermant plus que des quantités abstraites, il est possible d'en dresser une table en prenant  $t = hx$  et  $t = ha$  pour argument. La 1<sup>re</sup> colonne contiendra les valeurs de  $t$ , la deuxième celles de  $z$ , et la 3<sup>me</sup> celle de  $P_a$ .

Pour lire cette table, il suffira, étant donné un groupe d'observations d'un même phénomène : de calculer la valeur de la fonction  $h$ , faire le produit  $hx$  ou  $ha$  à lire dans la colonne des  $t$  si l'on demande la probabilité  $z$  ou  $P_a$  correspondante, ou, inversement, le quotient  $\frac{t}{h}$  si on demande l'erreur  $x$  ou  $a$  correspondant à une probabilité  $z$  ou  $P_a$  donnée.

Au lieu d'envisager les erreurs en valeur absolue, on peut les rapporter à l'erreur probable prise comme unité. c'est-à-dire les exprimer en fraction de l'erreur probable. La quantité  $h$  prend dans ce cas une valeur constante qui se détermine comme suit :

L'erreur probable est celle qu'il y a une probabilité  $1/2$  à ne pas dépasser ; si on désigne par  $r$  sa valeur absolue, elle satisfera à la condition :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t=hr} e^{-t^2} dt$$

et on trouve par la table, en interpolant :

$$t = hr = 0.4769$$

établissant la relation entre la quantité  $h$  et l'erreur probable.

Si les erreurs sont exprimées par rapport à l'erreur probable,  $r$  devient égal à l'unité, et on a :

$$h = 0.4769$$

En donnant à  $h$  la valeur ci-dessus, la formule typique des erreurs sera fonction des erreurs d'observation rapportées à l'erreur probable comme unité, et la table des erreurs, ainsi modifiée, fournira la probabilité des erreurs relatives  $\frac{x}{r}$  (au lieu du produit  $hx$  ou  $ha$  des erreurs absolues par la fonction  $h$ ) ; soit la valeur des expressions (4) et (5) correspondant au quotient  $\frac{t}{h}$ .

Pour faire usage de cette table, étant donné un groupe d'observations d'un même phénomène, on détermine tout d'abord l'erreur probable par l'un des procédés suivants :

1° On classe les erreurs par ordre de grandeur, abstraction faite de leur signe, l'erreur probable est celle d'ordre  $\frac{n}{2}$ .

2° On déduit l'erreur probable de sa relation avec l'erreur moyenne géométrique ou arithmétique :

$$r = \pm 0,674 \varepsilon = \pm 0,674 \sqrt{\frac{\sum \delta^2}{n-1}}$$

$$r = \pm 0,845 \mu = \pm 0,845 \frac{\sum \delta}{n}$$

Et l'erreur probable commise sur la moyenne des observations a pour expression :

$$R = \pm \frac{r}{\sqrt{n}}$$

De ces deux manières d'envisager les erreurs (et des deux tables qui en résultent), l'une prenant  $h$  et l'autre l'erreur probable  $r$  comme critérium de la précision, la première est plus généralement en usage pour résoudre les questions de probabilité ; la seconde, par contre, se prête mieux aux besoins de la balistique expérimentale, et c'est d'elle dont nous ferons usage dans notre application numérique.

## II

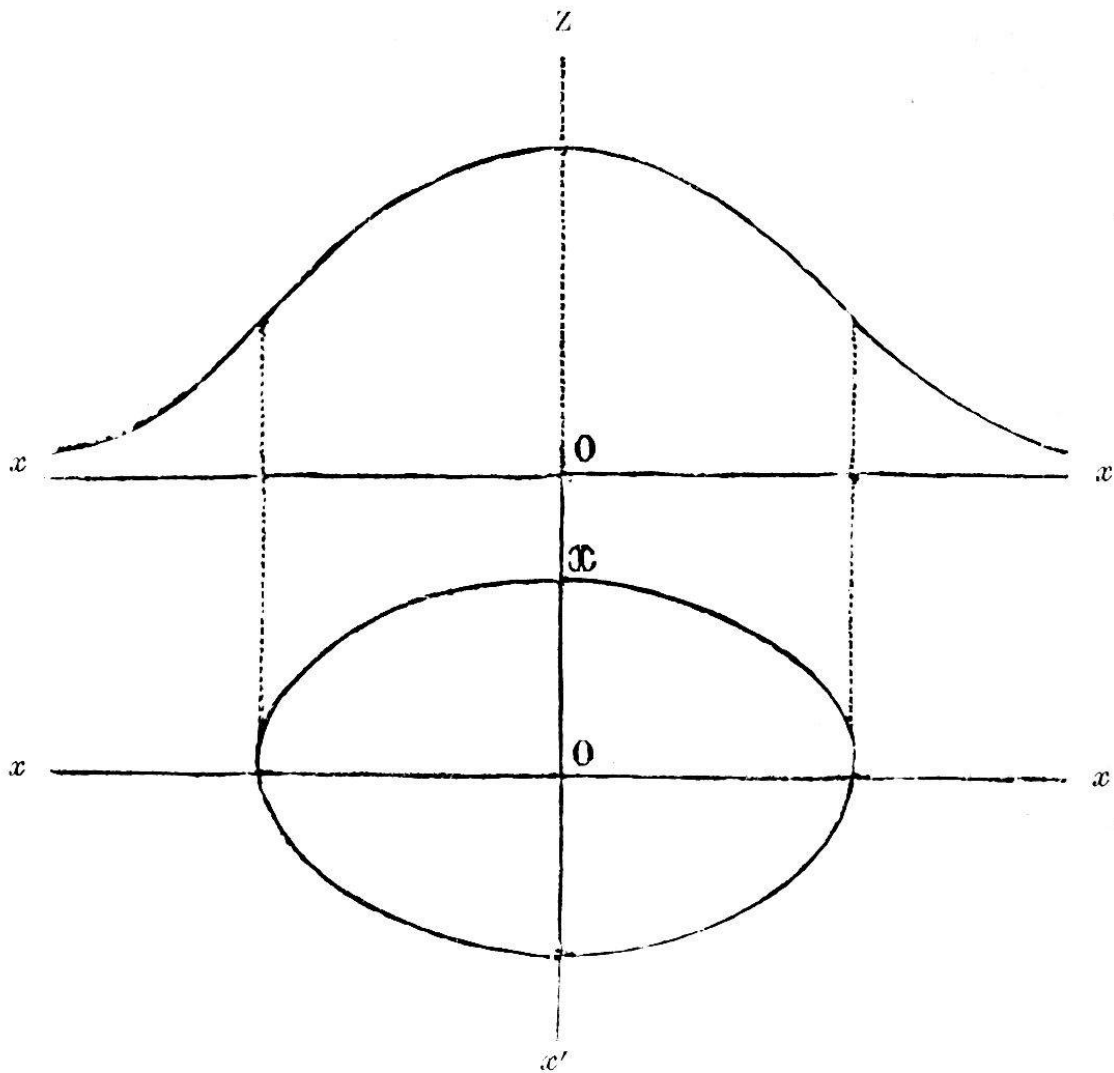
Les écarts de tir sont quelquefois rapportés à un système de coordonnées polaires (dont le pôle est le point de chute moyen des projectiles) et la justesse de l'arme appréciée par la probabilité d'atteindre un cercle dont le rayon vecteur sert de mesure à la précision.

Ce mode d'opérer suppose que les écarts probables en direction et en hauteur sont sensiblement les mêmes, ce qui n'est admissible que pour des trajectoires très tendues et principalement pour les armes portatives. Il est préférable de décomposer la question et d'envisager isolément les deux sortes d'écarts en les rapportant à un système d'axes coordonnés rectangulaires.

En reproduisant graphiquement la formule typique des erreurs (voir l'épure N° 2) on obtient une courbe qui s'abaisse en asymptote vers l'axe des  $x$  après avoir changé le sens de sa courbure. Par sa rotation autour de l'axe des  $z$ , cette courbe engendre un solide en forme de cloche qui jouit de propriétés particulières.

Dans le tir des armes à feu, par exemple, le solide  $S$  représente, pour une série infinie de coups, la loi de répartition

des points de chute : les projectiles s'accumulent effectivement autour du point de chute moyen en figurant un relief dont les sections parallèles à la base sont des ellipses, et qui, si la loi est exacte, est ramené au solide de révolution typique, en envisageant les écarts  $hx$  ou  $\frac{x}{r}$  au lieu des écarts absolus.



Il est possible de concevoir le solide S construit expérimentalement de la manière suivante :

Etant donné un certain nombre de relevés de tirs de précision résultant d'un ensemble d'essais de tir effectués dans des circonstances identiques les uns aux autres (chaque essai ayant donné lieu à une image de la cible relevée à une échelle réduite sur papier quadrillé et rapportée à un système d'axes coordonnés passant par le centre de gra-

tivité, soit le point d'impact moyen de l'image): Imaginons qu'on superpose ces différentes images axes sur axes, en plaçant l'un sur l'autre en chaque point les projectiles placés en ce point; elles détermineront ensemble ce qu'on peut nommer *l'image générale de la dispersion des coups*. Il est évident qu'à mesure que les images partielles nouvelles se superposent aux précédentes, l'image générale tend à former un relief dont la surface, composée d'éléments polyédriques, prend une forme plus nettement accusée et, partant, représente avec plus de généralité la loi de dispersion des coups.

A la limite, pour une série infinie, la surface tend vers un contour curviligne régulier.

Si l'on suppose un quadrillage tracé sur la base du solide et des ordonnées correspondant aux points d'intersection, la probabilité (sur l'ensemble des coups tirés) qu'un projectile tombe en un point quelconque, sera représentée par l'ordonnée de ce point limitée par la surface enveloppant les sommets des ordonnées.

Rappelons que, d'après le théorème des probabilités composées, la probabilité que les causes d'écart en hauteur et en direction agissent concurremment, est exprimée par le produit des deux probabilités partielles.

Dans les notations qui vont suivre, nous distinguerons par l'accentuation des probabilités et les écarts des deux natures.

Le solide  $S$  présente par construction les caractères suivants :

1<sup>o</sup> *La courbe enveloppante* interceptée par le plan  $z o x$ , fournit la probabilité  $z$  de l'écart  $x$  en hauteur ou en direction.

(Valeur de l'ordonnée  $z$  en fonction de l'abscisse  $x$ .)

2° *L'aire de la même courbe avec l'axe des  $x$ , fournit entre les limites  $x = -a$  et  $+a$ , la probabilité que l'écart  $x$ , en hauteur ou en direction, est compris entre ces mêmes limites.*

(Valeur de l'aire  $P_a$  en fonction de  $a$ .)

3° *La surface enveloppante fournit la probabilité composée (infiniment petite)  $Z$  de l'écart en hauteur et en direction dont les abscisses coordonnées sont respectivement  $x$  et  $x'$ .*

(Valeur de l'ordonnée  $Z$  en fonction de  $x$  et  $x'$ .)

La loi typique des erreurs donne pour l'expression de la surface :

$$(6) \quad Z = z z' = \frac{h h'}{\pi} e^{-(h^2 x^2 + h'^2 x'^2)}$$

REMARQUE : *Les courbes de niveau de la surface forment le lieu géométrique des points qui ont même chance d'être atteints, soit des périmètres d'égale probabilité. Ces courbes sont des ellipses dont les diamètres  $a$  et  $a'$  sont entre eux dans le rapport inverse des nombres  $h$  et  $h'$  ou dans le rapport direct des écarts  $r$  et  $r'$ .*

Etant donné les demi-diamètres  $a$  et  $a \frac{h'}{h}$  d'une ellipse, la probabilité qu'un projectile tombe sur un point quelconque de sa circonférence, s'obtient donc en faisant dans la formule précédente :  $x = a'$  et  $x' = 0$ .

4° *Le volume intercepté par la surface dans un prisme rectangulaire droit dont les abscisses coordonnées aux sommets de sa base sont respectivement les limites  $a$  et  $a'$  de l'écart et ses points symétriques : fournit la probabilité composée  $P_{aa'}$  qu'un projectile tombe dans l'intérieur du rectangle en question.*



La loi typique des erreurs donne pour la cubature du volume  $P_{aa'}$  l'intégrale double :

$$(7) \quad P_{aa'} = P_a \cdot P_{a'} = \frac{4hh'}{\pi} \int_0^a dx \int_0^{a'} e^{-(h^2 x^2 + h'^2 x'^2)} \cdot dx'$$

somme de tous les produits élémentaires de la forme  $\Delta x \cdot \Delta x'$  entre les limites des deux intégrations.

(Valeur de  $P_{aa'}$  en fonction de  $a$  et  $a'$ .)

Le volume total de  $-\infty$  à  $+\infty$  équivaut à la probabilité 1.

*Le volume intercepté par la surface dans un cylindre droit ayant pour directrice une courbe de niveau fournit la probabilité composée  $P_{aa'}$  que le projectile tombe dans l'intérieur de l'ellipse directrice dont les demi-diamètres sont  $a$  et  $a'$ .*

La cubature du volume a pour expression dans ce cas :

$$(8) \quad P_{aa'} = \frac{4hh'}{\pi} \int_0^a dx \int_0^{f(x)} e^{-(h^2 x^2 + h'^2 x'^2)} \cdot dx'$$

$f(x)$  étant la racine de l'équation de l'ellipse, soit :

$$f(x) = x' = \frac{a}{a'} \sqrt{a'^2 - a^2}$$

et on a d'autre part la relation :

$$\frac{a}{a'} = \frac{h'}{h}$$



Dans l'hypothèse de  $h = h'$  (ou, ce qui revient au même,  $r = r'$ ) S devient un solide de révolution ; dès lors, les équations de la surface et du volume se simplifient en observant que les périmètres d'égle probabilité deviennent des circonférences de cercle.

En posant dans cette hypothèse :

$$y = \sqrt{x^2 + x'^2}$$

pour la valeur absolue d'un écart quelconque, et appelant  $a$  le rayon d'une circonférence d'égle probabilité, l'équation (8) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^a 2\pi y \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 y^2} dy &= \frac{\sqrt{\pi}}{h} \int_0^a e^{-h^2 y^2} 2h^2 y dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{h} \left(1 - e^{-h^2 a^2}\right) \end{aligned}$$

La même intégrale prise entre les limites 0 et  $\infty$  a pour valeur  $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$  et représente la certitude d'atteindre. En égalant donc ce volume à l'unité, on a enfin :

$$(9) \quad P_a = 1 - e^{-h^2 a^2} \quad (1)$$

(1) Cette expression revêt une autre forme très simple pour le calcul si au lieu d'envisager les écarts en valeur absolue  $y$ , ou en fonction  $\frac{y}{r}$  de l'erreur probable, on les rapporte au rayon vecteur  $\rho$  du cercle contenant 50 % des coups, comme unité et mesure unique de précision.

L'écart  $\rho$  satisfait à la condition :

$$P_\rho = \frac{1}{2} = 1 - e^{-h^2 \rho^2}$$

d'où :

pour la probabilité qu'un projectile tombe dans l'intérieur de la circonférence dont le rayon est  $a$ , soit la probabilité qu'un écart quelconque  $y$  ne dépasse pas la limite  $a$  en valeur absolue dans l'hypothèse de  $h = h'$ .

S'il s'agit d'écart relatifs  $\frac{y}{r}$ , on fera dans la formule ci-dessus :  $h = 0.4769$ .

### III

Pour comparer entre elles, et avec la courbe typique, les courbes empiriques d'écart résultant de séries d'expériences effectuées dans des circonstances dissemblables, il faut rapporter les écarts à une unité qui serve de mesure à la précision de chaque série, l'écart probable par exemple.

Les écarts relatifs  $\frac{x}{r}$  appartiennent tous au même type; et, pour reproduire graphiquement leur loi, il suffit de

$$e^{-h^2 \rho^2} = \frac{1}{2}$$

multipliant les exposants par  $\frac{a^2}{\rho^2}$  on a :

$$e^{-h^2 a^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a^2}{\rho^2}}$$

Remplaçant dans l'équation (10), il vient en prenant  $\rho$  pour unité :

$$P_a = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{a^2}$$

Pour la probabilité qu'un écart ne dépasse pas la limite  $a$ .

porter en abscisses les écarts relatifs et en ordonnées le nombre des données, réduites en pour-cent, qui leur correspondent. Envisagées à ce point de vue, la courbe des écarts en direction et celle des écarts en hauteur se confondent, si le nombre des données est suffisant ; et le solide S, exprimant les probabilités relatives composées, devient un solide de révolution.

La courbe empirique des écarts résultant d'une ou de plusieurs séries d'observations peut s'obtenir par le calcul ou un tracé graphique.

1<sup>o</sup> *Par le calcul.* Etant donné une série d'observations, on détermine sa moyenne et l'écart de chaque observation avec la moyenne, calcule l'écart probable et dresse le tableau des quotients de chaque écart individuel avec cette fonction.

Le tableau sera double si les observations comportent des écarts des deux natures.

Ceci posé, on prend pour argument une fraction de l'erreur probable,  $\frac{1}{10}$  par exemple, et ses multiples et lit le nombre des données comprises dans  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{3}{10}$ , ....  $\frac{11}{10}$ ,  $\frac{12}{10}$ , etc. de l'écart probable ; et, par soustraction, le nombre des écarts compris entre  $\frac{1}{10}$  et  $\frac{2}{10}$ , entre  $\frac{2}{10}$  et  $\frac{3}{10}$ , etc., en réduisant ces nombres en pour-cent du nombre des données. On obtient ainsi la répartition réelle des écarts en direction ou en hauteur, et on contrôlera sa loi en combinant entre elles les valeurs fournies par plusieurs séries et les comparant à la table typique calculée par les formules (1) et (3).

2<sup>o</sup> *Par un tracé graphique.* Etant donné une image générale de la dispersion naturelle des coups (voir épure N<sup>o</sup> 1), établie, comme il a été dit plus haut, au moyen

d'un certain nombre de protocoles de tirs de précision, les deux écarts probables sont déterminés en comptant à droite et à gauche de leur axe de symétrie et entre les limites d'abscisses :  $-x$  et  $+x = r$  en valeur absolue, un nombre de points dont la somme égale  $\frac{1}{2} n$ , en tenant compte des coups anormaux qui se trouveraient en dehors des limites de l'épure.

On obtient ainsi deux zones de longueur infinie et de largeur  $2r$  et  $2r'$  contenant chacune 50 % des coups (1). En prenant les longueurs  $r$  et  $r'$  comme unité et les divisant en fractions de  $\frac{1}{10}$  et ses multiples, on détermine une succession de zones intermédiaires contenant toutes un certain nombre de points dont il est aisé de faire le compte ; et, par soustraction, le nombre de points compris dans les zones élémentaires  $\frac{1}{10} r$  et  $\frac{1}{10} r'$ .

L'épure N° 1 fournit une application de ce tracé ; elle représente à l'échelle de  $\frac{1}{20}$  l'image de la répartition de 192 obus lestés tirés en neuf séries à la distance de mille mètres avec le canon de 8<sup>cm</sup>,4. (Tirs de précision exécutés à Thoune, en 1871-72, sous les ordres de M. le colonel Bleuler, instructeur en chef de l'artillerie.)

Les résultats que nous pouvons tirer de cette épure seraient plus concluants pour cette étude si l'image avait été obtenue au moyen d'une série unique de 192 coups, au lieu de neuf séries partielles. En effet, en confondant avec la vraie valeur du centre de gravité d'une série illimitée de points, le point moyen apparent tel qu'il résulte

---

(1) Ces deux zones interceptent entre elles un rectangle de largeur  $2r$  et de hauteur  $2r'$  qui, d'après le théorème des probabilités comparées, contient le 25 % du nombre des coups. On a en effet :

$$P P' = 0,50 \times 0,50 = 0,25$$

approximativement d'une série limitée (valeur qui sert de point de départ à la mesure des écarts individuels) on commet une erreur qui diminue en raison de la racine carrée du nombre des points ; l'évaluation du centre de gravité de chaque série étant affectée, comme nous l'avons vu, d'une probabilité d'incertitude :

$$R = \pm \frac{r}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

En superposant centre à centre les images partielles, on détermine une image générale qui doit présenter en conséquence un groupement exagéré des points autour du centre. La lecture des points compris dans les zones élémentaires les plus rapprochées du centre donne effectivement des nombres légèrement supérieurs à ceux de la formule typique. La courbe empirique des écarts fait ressortir cette anomalie, sans laquelle la tangente à la courbe à l'origine serait horizontale, comme c'est le cas pour la courbe typique.

Le tableau qui accompagne l'épure N° 1 donne la lecture du nombre pour-cent des coups compris dans les zones horizontales et verticales (double des écarts en hau-

(<sup>1</sup>) Pour apprécier cet élément d'erreur, soit, par exemple, à déterminer l'erreur probable en hauteur du point d'impact moyen dans les deux cas suivants :

$$1^{\circ} \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} n = 192 \\ r = 0^{\text{m}}40 \end{array} \right\} \text{ on a : } R = \pm \frac{0^{\text{m}}40}{13,8} = \pm 0^{\text{m}},028$$

$$2^{\circ} \text{ pour } \left\{ \begin{array}{l} n = 21 \\ r = 0^{\text{m}}40 \end{array} \right\} \text{ on a : } R = \pm \frac{0^{\text{m}}40}{4,6} = \pm 0^{\text{m}},087$$

ce qui signifie que, ramenée à l'échelle de l'épure N° 1, l'erreur commise sur l'évaluation du centre de gravité est comprise :

dans le 1<sup>er</sup> cas, entre  $\pm 0^{\text{m}},0014$

dans le 2<sup>nd</sup> cas, entre  $\pm 0^{\text{m}},0044$

teur et en direction) et la moyenne de ces deux systèmes de valeurs. La relation entre ces nombres et la largeur des zones fournit la probabilité qu'un écart quelconque  $\frac{x}{r}$  ne dépasse pas une limite finie  $a$  (théoriquement form. (3)). Ces résultats ne satisfont naturellement pas rigoureusement à la loi de continuité, mais il est facile de les améliorer par un tracé graphique en prenant les colonnes (1) et (4) pour abscisses et ordonnées et traçant la courbe de compensation des éléments (épure N° 2). On obtient ainsi un système de valeurs rectifiées qui représente avec plus de probabilité la loi empirique de répartition.

La lecture des ordonnées de la courbe compensatrice donne par soustraction (épure N° 2) la relation entre un écart  $x$  (1) quelconque en hauteur ou en direction et le nombre pour-cent des coups qui lui correspond ; c'est-à-dire la probabilité de sa répétition, (théoriquement : form. (1).)

*L'épure N° 2 figure les tracés suivants, rapportés à l'erreur probable  $r$  comme unité :*

$$1^{\circ} \text{ Courbe typique des erreurs : } z = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

2° Courbe empirique des écarts résultant des expériences de tir susmentionnées avec le canon de 8<sup>cm</sup>, 4.

3° Courbe empirique des écarts résultant d'expériences de tir avec armes à feu portatives.

4° Courbe empirique des erreurs résultant d'une série de mille observations de l'étoile polaire.

(1) L'écart  $x$  est, dans ce cas, la moyenne arithmétique des abscisses correspondant aux deux ordonnées successives à soustraire l'une de l'autre.



5<sup>o</sup> Tracé de compensation du nombre pour-cent des coups touchés dans les différentes zones du but. Expériences de tir avec le canon de 8<sup>cm</sup>,4. Voir le tableau de l'épure N<sup>o</sup> 1.

Les expériences de tir avec armes à feu portatives qui ont servi à établir la courbe N<sup>o</sup> 3 ont été exécutées à Thoune, de 1868 à 1872, par les soins du bureau fédéral d'état-major ; elles avaient pour but la détermination et le contrôle de la hausse et de la précision du fusil Peabody, de la carabine et du fusil d'infanterie, et ont la valeur expérimentale qu'on est en droit d'attendre d'un tir de précision : la hausse, pour chaque série, était approximativement cherchée par deux ou trois coups perdus et restait invariable pour la série proprement dite, le tir avait lieu sur chevalet avec un pointeur unique, chaque série donnait lieu à une image du but relevée sur papier quadrillé, etc.

Chaque groupe d'observations consistait dans le tir de dix fusils à 30 coups par série, fusil et distance. En superposant centre à centre les dix images du groupe, on obtient une image générale de la répartition des 300 coups du groupe, donnant lieu à un tableau de probabilité des écarts.

La courbe N<sup>o</sup> 3 a été tracée en prenant la moyenne entre les nombres fournis par 4 tableaux correspondant à 4 images ou groupes d'observations analogues obtenus à des portées de 225 m, 300 m et 400 m, en employant les mêmes procédés de calcul que pour la courbe N<sup>o</sup> 2.

Les données relatives aux mille observations de l'étoile polaire, dont la courbe N<sup>o</sup> 4 représente la répartition des erreurs, proviennent des nombres ci-dessous, cités par

M. le colonel Siegfried dans son « Beitrag zur Schiess-  
« theorie, » page 97, d'après « l'Anwendung zur Wahr-  
« scheinlichkeits theorie » de Sawitsch.

L'erreur probable a été trouvée de : 2",268 ; et les er-  
reurs individuelles, exprimées en fonction de cette quan-  
tité donnent :

Écarts $\alpha$ .	P Nombre pour cent des observations.	Écarts $\alpha$ .	P Nombre pour cent des observations.
0.373	0.200	2.338	0.862
0.746	0.387	2.611	0.917
1.119	0.553	2.984	0.947
1.492	0.677	3.357	0.968
1,856	0.785	3.730	0.983

Prenant ces nombres comme point de départ et traçant la courbe de P en fonction de  $\alpha$ , on déduit par interpolation les valeurs intercalaires et par soustraction les valeurs de  $z$ .

Voici maintenant les tables comparatives établissant, d'après les données qui précèdent, la relation numérique dont l'épure N° 2 est l'expression graphique :



Relation théorique et empirique entre une erreur d'observation, ou un écart de tir, et la probabilité de sa répétition. (Lecture des courbes d'erreur.)

Erreurs ou écarts $x$ rapportés à l'erreur probable comme unité.	Valeur typique de $z$ .	Valeurs de $z$ déterminées empiriquement.		
	$z = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ $h = 0,4769$ Courbe n° 1.	Série de mille observations de l'étoile polaire Courbe n° 4.	Tir de précision avec le canon de 8 <sup>c</sup> ,4. 192 coups à 1000 m. Courbe n° 2.	Tir de précision avec armes à feu portatives. Moyenne de 4 tirs de 300 coups, à 225, 300 et 400 <sup>m</sup> . Courbe n° 3.
0.00	5,3816	5,49	5,93	6,02
0.10	5,3694	5,45	5,84	5,95
0.20	5,3326	5,39	5,73	5,75
0.30	5,2728	5,32	5,52	5,53
0.40	5,1902	5,23	5,30	5,30
0.50	5,0846	5,11	5,06	5,03
0.60	4,9584	4,96	4,81	4,76
0.70	4,8140	4,79	4,56	4,50
0.80	4,6524	4,60	4,30	4,25
0.90	4,4760	4,40	4,05	4,00
1.00	4,2868	4,18	3,81	3,77
1.20	3,8784	3,72	3,36	3,32
1.40	3,4458	3,28	2,99	2,92
1.60	3,0064	2,86	2,64	2,57
1.80	2,5754	2,47	2,34	2,26
2.00	2,1666	2,11	2,06	1,97
2.50	1,3029	1,33	1,42	1,37
3.00	0,6948	0,75	0,91	0,88
3.50	0,3317	0,37	0,52	0,53

Probabilité théorique et empirique qu'une erreur d'observation, ou un écart de tir, est compris entre les limites  $\pm a$ .

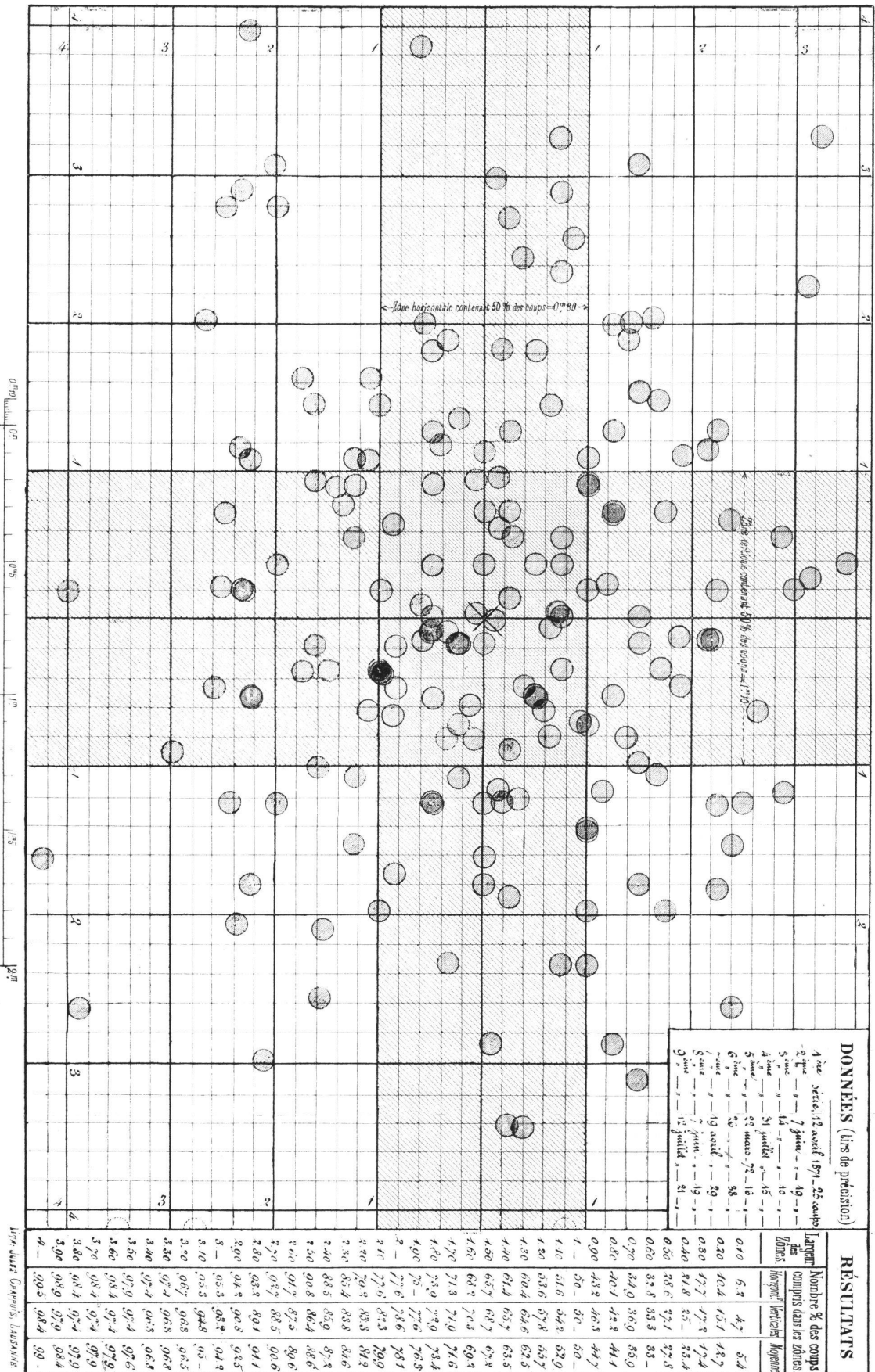
Erreurs ou écarts $a$ rapportés à l'erreur probable comme unité.	Valeurs de l'intégrale définie : $P_a = \frac{2h}{\pi} \int_0^a e^{-h^2x^2} . dx$ $h = 0.4769$	Tir de précision avec le canon de 8 <sup>cm</sup> ,4. 192 coups à mille mètres. Valeur empirique de $P_a$ .			
		Série fournie par l'épure n° 1.	Même série rectifiée par une compensation graphique des éléments. (Epure n° 2.)		
			1 <sup>re</sup> diff.	2 <sup>e</sup> diff.	
0.10	5.378	5.4	5.9	5.9	0.1
0.20	10.731	12.7	11.7	5.8	0.2
0.30	16.035	17.4	17.3	5.6	0.2
0.40	21.268	23.4	22.7	5.4	0.3
0.50	26.407	27.8	27.8	5.1	0.1
0.60	31.430	33.-	32.8	5.-	0.3
0.70	36.317	35.9	37.5	4.7	0.2
0.80	41.052	41.1	42.-	4.5	0.3
0.90	45.618	44.7	46.2	4.2	0.4
1.—	50.—	50.-	50.-	3.8	
1.20	58.171	55.7	56.7	6 7	
1.40	65.498	63.5	63.-	6.3	
1.60	71.949	69.2	68.7	5.7	
1.80	77.528	73.4	74.-	5.3	
2.00	82.266	78.1	78.6	4.6	
2.50	90.825	88.6	88.-		
3.00	95.698	94.2	94.2		
3.50	98.176	97.6	97.5		
4.00	99.302	99.-	99.-		

On voit que malgré le petit nombre des données constituant une même série d'observations de tir, les valeurs du tableau présentent un accord très satisfaisant. La tendance que les ordonnées de l'épure présentent vers des valeurs de plus en plus rapprochées de la formule s'accentuerait à mesure que l'on prendrait pour les séries des ordres plus élevés de  $n$ . Les courbes N° 1 et N° 4 d'une part et les courbes N°s 2 et 3 de l'autre coïncident sensiblement l'une avec l'autre : la courbe N° 4, provenant d'une série unique de mille données, devait effectivement se rapprocher de la courbe théorique ; tandis que les courbes N°s 2 et 3, provenant d'une moyenne de 9 séries, d'environ 21 coups l'une et de 40 séries de 30 coups l'autre, devaient se grouper ensemble et présenter avec la courbe théorique une anomalie justifiée par leur mode de construction.

En résumé, on peut admettre que la dispersion naturelle des points de chute est régie par la loi des erreurs ; et que pour un nombre même limité de données elle est rendue avec suffisamment d'exactitude par son expression typique.

Une table de probabilité empirique n'en conserve pas moins sa valeur, en ce qu'elle représente avec plus de probabilité le groupement d'un nombre restreint d'observations autour de leur centre de gravité apparent.





**IMAGE GÉNÉRALE DE LA DISPERSION NATURELLE DE 192 PROJECTILES**

9 séries ou images partielles rapportées à leur centre de gravité et superposées centre sur centre.

Echelle de 1/20.

Calibre de 8, <sup>11</sup>/<sub>4</sub>.

Charge: 840 grammes.  
 Poids du projectile: 4 k. 8. (Ours lents).  
 Distance: mille mètres.  
 Place d'armes: Thoune.

**REMARQUES.**

1<sup>re</sup> - La largeur des zones est exprimée en fraction de la zone contenant 50 % des coups, soit du double de l'erreur probable en valeur absolue.

2<sup>e</sup> - La lecture de l'épure suppose l'écart probable divisé en 10 parties, tandis que pour ne pas surcharger l'image, il n'est divisé ici qu'en 5 parties.

Ecart probable en hauteur: 0<sup>m</sup> 40.

Ecart probable en direction: 0<sup>m</sup> 55.

