

Sur un mode particulier de représentation des imaginaires

Autor(en): **Amstein, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **18 (1882)**

Heft 87

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-259606>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR UN MODE PARTICULIER

DE

REPRÉSENTATION DES IMAGINAIRES

par le Dr H. AMSTEIN

professeur à l'Académie de Lausanne.

Ce mémoire porte le même titre que celui publié par M. *Duport* dans les *Annales de l'École normale supérieure*, 1880, 2^e série, tome IX, p. 301-362. Commencé avant l'apparition du savant travail de M. *Duport*, la publication en a été retardée par différentes circonstances indépendantes de la volonté de l'auteur, de telle sorte qu'on pourrait aujourd'hui se demander s'il a encore sa raison d'être. Le lecteur en jugera.

D'ailleurs, le point de départ, c'est-à-dire le mode de représentation des imaginaires, est très différent dans les deux travaux. L'idée fondamentale de représenter un point dont les coordonnées sont imaginaires par une ligne droite réelle dans l'espace, est la même, mais les systèmes de coordonnées, adoptés à cet effet, diffèrent essentiellement. Tandis que le procédé employé par M. *Duport* paraît assez compliqué au premier abord, il a cependant l'avantage de conduire à des résultats réels presque dans tous les cas où la méthode appliquée dans le présent mémoire aboutit à des résultats imaginaires. Il existe à cet égard une certaine réciprocité entre les deux mémoires, provenant de la différence des principes qui sont à leur base. Or, l'histoire des mathématiques prouve que les imaginaires non-seulement ne sauraient pas toujours être évitées, mais ont très souvent jeté un jour très clair sur des branches entières de la géométrie. Aussi ce mémoire, loin de repousser les imaginaires, cherche-t-il à les interpréter toutes les fois que l'occasion s'en présente. En outre, le mode choisi a permis d'utiliser fréquemment la représentation d'une figure au moyen de fonctions d'une variable imaginaire. Il est presque superflu d'ajouter que, vu la communauté du sujet, le présent mémoire a dû se rencontrer plus d'une fois avec celui de M. *Duport*.

Le travail offert ici au lecteur est divisé en deux parties. La première est consacrée spécialement à l'étude de la ligne droite imaginaire. La deuxième partie traite de quelques propriétés générales des courbes imaginaires, et, à titre d'application destinée à vérifier les théorèmes généraux, on a fait l'étude succincte de trois courbes particulières.

PREMIÈRE PARTIE

Le point imaginaire.

Soient

$$\xi = \alpha + \beta i$$

$$\eta = \gamma + \delta i, \text{ où } i = \sqrt{-1}$$

les coordonnées de la figure géométrique qui, dans cette étude, sera appelée un *point imaginaire*. Pour représenter ce point dans l'espace, on choisira deux plans parallèles à la distance 1 l'un de l'autre. Dans ces plans, on adoptera deux systèmes de coordonnées rectangulaires xy et XY dont les origines O et O' se trouvent sur une perpendiculaire aux deux plans et dont les axes x et X , y et Y sont respectivement parallèles. En outre, il sera nécessaire d'admettre un troisième système de coordonnées rectangulaires dans l'espace. Tandis que l'origine et les axes x et y de ce dernier système coïncident avec l'origine O et les axes du même nom du plan xy , son axe z sera la droite joignant les points O et O' .

Le choix de ces trois systèmes de coordonnées, ainsi que de la distance des deux plans parallèles, a été inspiré par le désir de simplifier les formules. En effet, rien n'empêcherait de modifier ces dispositions en ce sens que la distance des deux plans restant arbitraire, les deux systèmes de coordonnées planes et le système de coordonnées dans l'espace fussent déplacés et tournés, les deux premiers dans leur plan respectif et le dernier d'une manière quelconque.

Afin de faciliter le langage, les plans xOy et XOY seront appelés : le premier, le *plan inférieur*, et le second, le *plan supérieur*.

Ceci établi, le point imaginaire

$$\xi = \alpha + \beta i$$

$$\eta = \gamma + \delta i$$

Fig. 1.

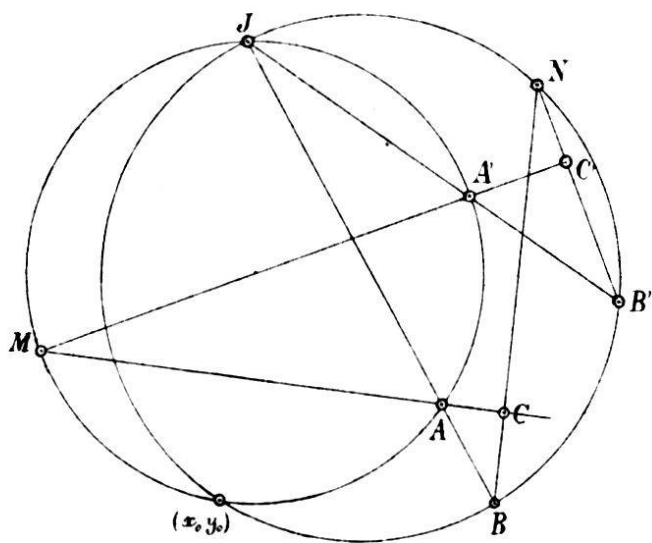


Fig 3

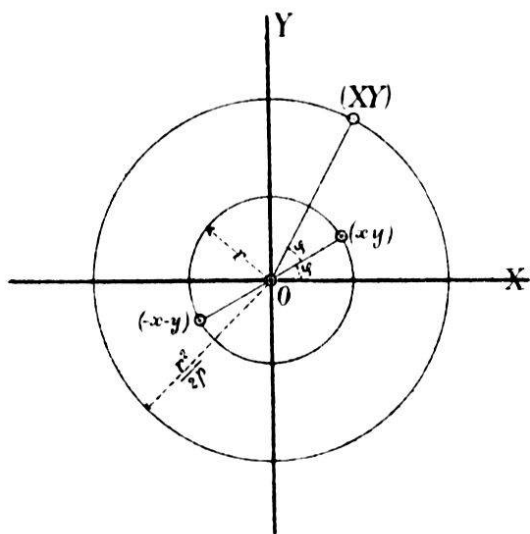


Fig. 2.

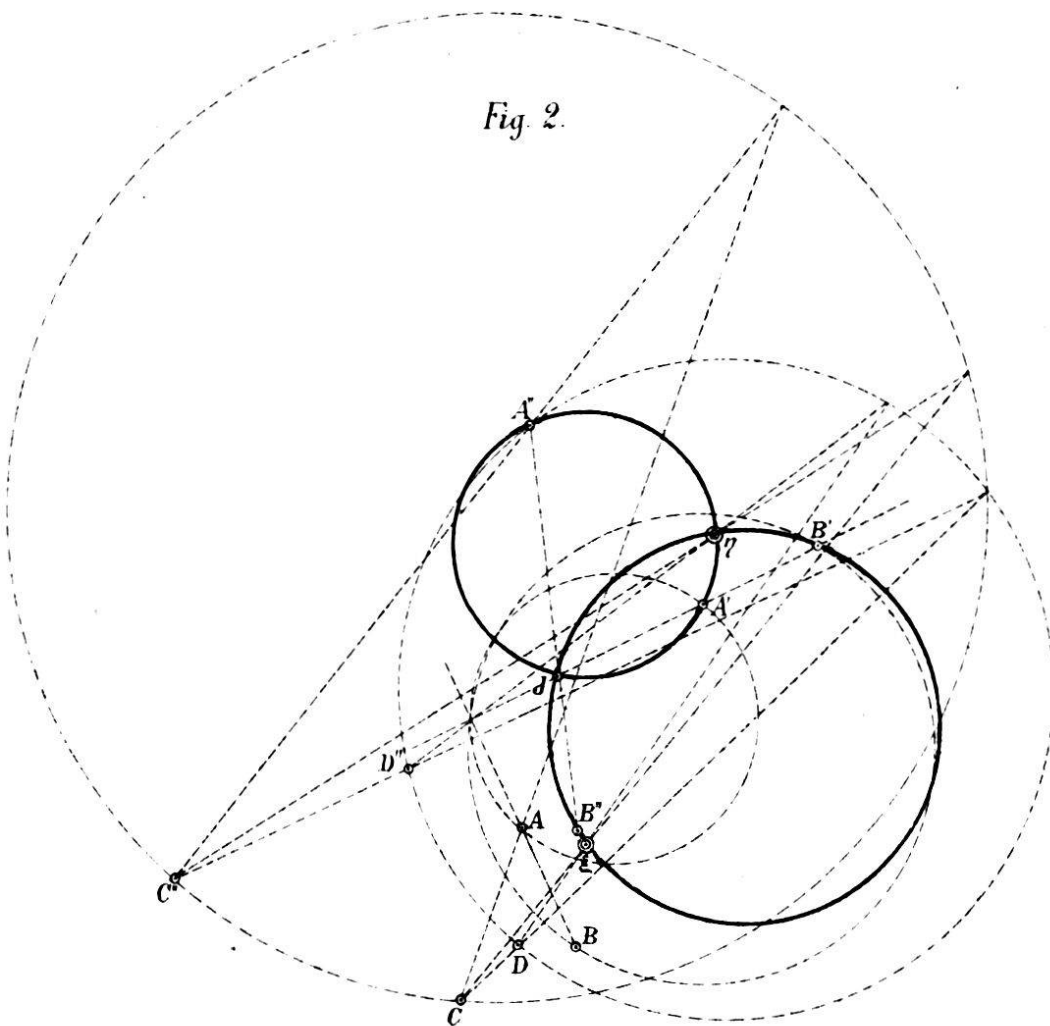


Fig. 4.

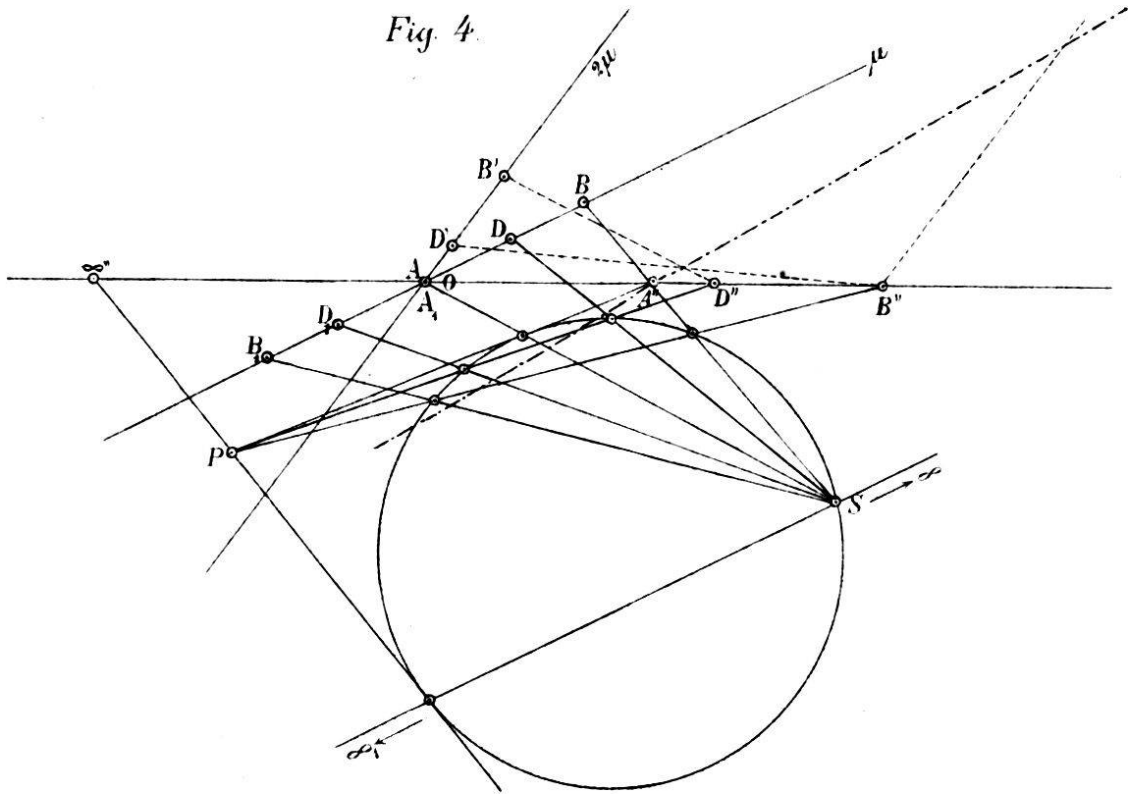


Fig. 7.

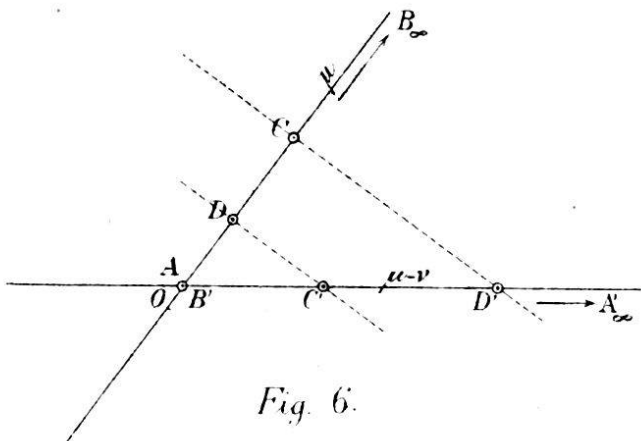
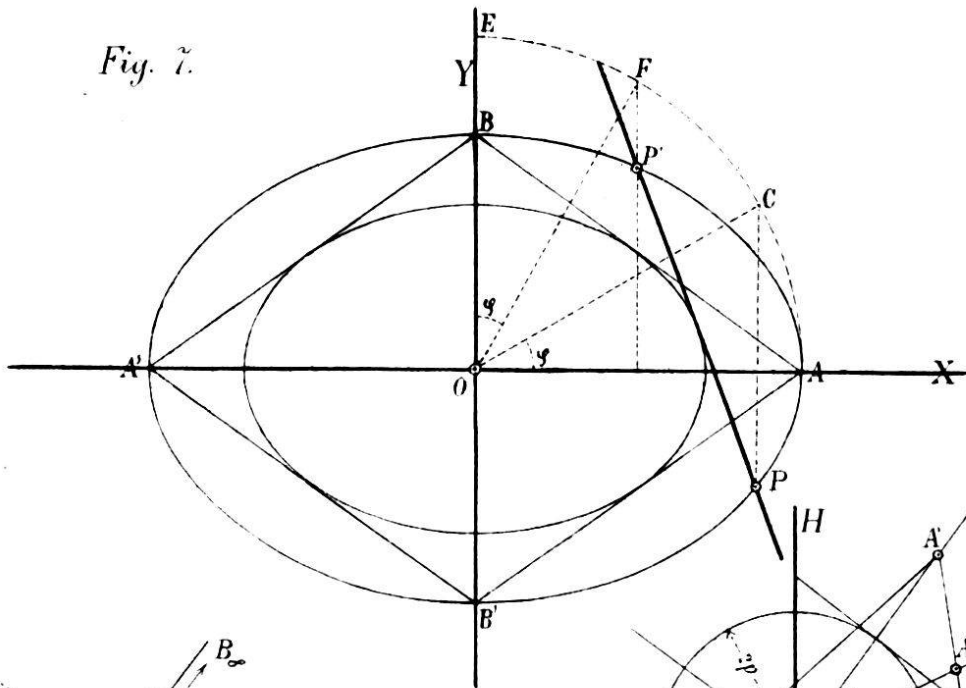


Fig. 6.

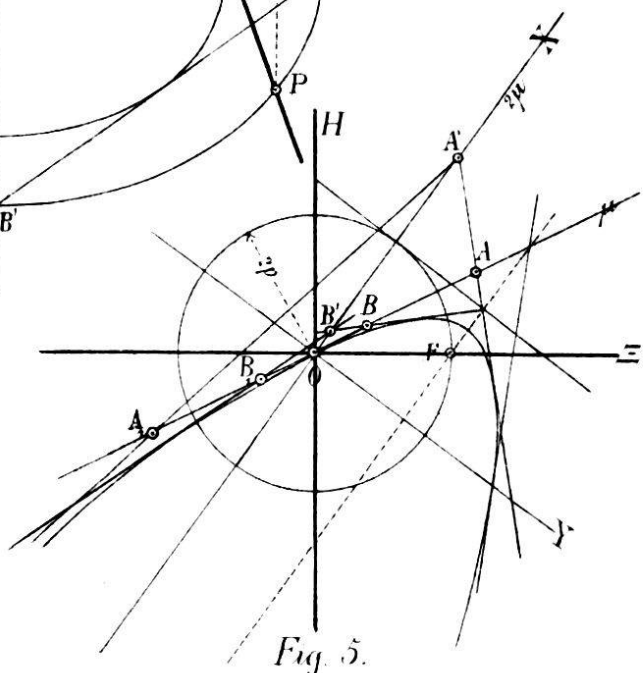


Fig. 5.

pourra être représenté géométriquement par la droite dans l'espace qui joint le point

$$x = \alpha, \quad y = \beta$$

du plan inférieur au point

$$X = \gamma, \quad Y = \delta$$

du plan supérieur.

Ainsi le point imaginaire est toujours représenté par une droite réelle qui, dans le système de coordonnées dans l'espace, a les équations

$$z = \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta}.$$

La discussion de ces équations montre que ce mode de représentation ne souffre aucune exception.

La droite imaginaire.

La relation linéaire la plus générale entre les variables imaginaires ξ et η est de la forme

$$(1) \quad (A + Bi) \xi + (C + Di) \eta + (E + Fi) = 0.$$

La représentation géométrique de cette équation sera appelée une *ligne droite imaginaire*. Pour que le point imaginaire $\xi = \alpha + \beta i$, $\eta = \gamma + \delta i$ appartienne à cette droite, il faut que l'on ait

$$(A + Bi) (\alpha + \beta i) + (C + Di) (\gamma + \delta i) + (E + Fi) = 0,$$

condition qui, moyennant la séparation des parties réelles et imaginaires, se décompose en ces deux autres :

$$A\alpha - B\beta + C\gamma - D\delta + E = 0$$

$$B\alpha + A\beta + D\gamma + C\delta + F = 0.$$

Si l'on y considère $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ comme les paramètres de la droite

$$z = \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta}$$

ou

$$(1 - z) \alpha + z\gamma - x = 0$$

$$(1 - z) \beta + z\delta - y = 0$$

ces deux équations représentent ce qu'on appelle en géométrie une *congruence linéaire*. Or, on sait que toute droite faisant

partie d'une telle congruence rencontre deux droites fixes, appelées les *directrices*. Par conséquent, les droites passant par un point de l'une des directrices sont situées dans le plan déterminé par ce point et l'autre directrice. En désignant par x, y, z les coordonnées de ce point, on a les quatre équations

$$\begin{aligned} A\alpha - B\beta + C\gamma - D\delta + E &= 0 \\ B\alpha + A\beta + D\gamma + C\delta + F &= 0 \\ (1-z)\alpha + z\gamma - x &= 0 \\ (1-z)\beta + z\delta - y &= 0 \end{aligned}$$

qui peuvent servir à déterminer les quatre paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On en tire par exemple

$$\alpha = \begin{vmatrix} -E & -B & C & -D \\ -F & A & D & C \\ x & 0 & z & 0 \\ y & (1-z) & 0 & z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & -B & C & -D \\ B & A & D & C \\ (1-z) & 0 & z & 0 \\ 0 & (1-z) & 0 & z \end{vmatrix}$$

Les valeurs de β, γ, δ sont exprimées d'une manière analogue par des fractions de deux déterminants à 16 éléments. Dans ces quatre quotients les dénominateurs sont les mêmes, tandis que les numérateurs diffèrent les uns des autres.

Or, puisqu'une congruence contient une infinité de droites, les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ doivent rester indéterminées. Il s'ensuit que les cinq déterminants en question s'annulent séparément.

Considéré en premier lieu, le dénominateur commun développé et égalé à zéro donne

$$z^2[(A+C)^2 + (B+D)^2] - 2z[C(A+C) + D(B+D)] + C^2 + D^2 = 0$$

ou, si l'on pose pour abrégier,

$$A + C = p, \quad B + D = q$$

$$(2) \quad z^2(p^2 + q^2) - 2z(Cp + Dq) + C^2 + D^2 = 0$$

Les racines de cette équation sont

$$\begin{aligned} z &= \frac{Cp + Dq \pm \sqrt{(Cp + Dq)^2 - (p^2 + q^2)(C^2 + D^2)}}{p^2 + q^2} \\ &= \frac{Cp + Dq \pm i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2} \end{aligned}$$

L'on voit qu'elles sont en général imaginaires. Par conséquent les directrices de la congruence dont il s'agit ici, c'est-à-dire celles de la droite imaginaire le sont aussi. S'il est permis de s'exprimer ainsi, on peut dire dès à présent que ces droites, bien qu'elles soient imaginaires, se trouvent dans deux plans parallèles au plan xy .

Il est utile de signaler les cas où les racines de l'équation (2) deviennent réelles et égales. Ceci arrive lorsque

$$Dp - Cq = 0 \quad \text{ou} \quad AD - BC = 0$$

c'est-à-dire lorsque

$$\begin{array}{l|l} 1^\circ & A = B = 0 \\ 2^\circ & C = D = 0 \\ 3^\circ & A = C = 0 \\ \hline 4^\circ & B = D = 0 \\ 5^\circ & \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \\ 6^\circ & \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \end{array}$$

On peut observer que ces six cas se réalisent et correspondent à des racines égales de l'équation (2) chaque fois que le coefficient angulaire de la droite imaginaire (1), à savoir

$$\operatorname{tg} \tau = - \frac{A + Bi}{C + Di}$$

est réel. En effet, les valeurs que prend $\operatorname{tg} \tau$ dans les six cas, sont respectivement

$$0, \infty, \quad -\frac{B}{D}, \quad -\frac{A}{C}, \quad -\frac{A}{C}, \quad -\frac{B}{D}$$

et les valeurs correspondantes de z deviennent

$$1, 0, \quad \frac{D}{B + D}, \quad \frac{C}{A + C}, \quad \frac{C}{A + C}, \quad \frac{D}{B + D}.$$

Quant au numérateur de α , il donne lieu, lorsqu'on le développe et qu'on l'égalé à zéro, à l'équation

$$(3) \quad z^2 (Ep + Fq) + xz (Dq + Cp) + yz (Cq - Dp) - x(C^2 + D^2) - z(FD + EC) = 0$$

qui représente un paraboloides hyperbolique dont un des plans directeurs est le plan $z = 0$. Par conséquent, cette surface con-

tient une infinité de génératrices parallèles au plan xy . Parmi celles-ci doivent se trouver les deux directrices de la congruence. Afin de les déterminer, il suffit de remplacer dans l'équation (3) z successivement par les racines z_1 et z_2 de l'équation (2). On pourra même se contenter de faire une seule fois le calcul nécessaire, vu que les quantités z_1 et z_2 sont conjuguées. De cette manière, l'équation (3) donne

$$z_1^2 (Ep + Fq) + xz_1 (Dq + Cp) + yz_1 (Cq - Dp) - \\ - x (C^2 + D^2) - z_1 (FD + EC) = 0$$

où

$$z_1 = \frac{Cp + Dq + i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}.$$

C'est l'équation de la projection sur le plan xy de l'une des directrices. Elle peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{C^2 + D^2 - z_1 (Cp + Dq)}{z_1 (Cq - Dp)} x + \frac{CE + DF - z_1 (Ep + Fq)}{Cq - Dp}.$$

En introduisant la valeur de z_1 dans le coefficient angulaire de cette droite, il devient

$$\frac{C^2 + D^2 - z_1 (Cp + Dq)}{z_1 (Cq - Dp)} = i,$$

de même le terme indépendant

$$\frac{CE + DF - z_1 (Ep + Fq)}{Cq - Dp} = \frac{Eq - Fp + i(Ep + Fq)}{p^2 + q^2}.$$

Ainsi les équations des deux directrices sont

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{Cp + Dq + i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, y = ix + \frac{Eq - Fp + i(Ep + Fq)}{p^2 + q^2} \\ z = \frac{Cp + Dq - i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, y = -ix + \frac{Eq - Fp - i(Ep + Fq)}{p^2 + q^2} \end{array} \right.$$

On vérifie sans difficulté que les équations provenant des numérateurs de β , γ , δ conduisent aux mêmes droites. Au surplus, il serait aisé d'indiquer une infinité de surfaces sur lesquelles ces droites doivent se trouver.

Il reste à examiner un des cas limites, où l'équation (2) possède une racine réelle double. Soit par exemple

$$A = mC, \quad B = mD,$$

où m signifie une constante réelle; alors les équations des directrices deviennent

$$\begin{cases} z = \frac{1}{1+m}, y = ix + \frac{DE - CF + i(CE + DF)}{(1+m)(C^2 + D^2)} \\ z = \frac{1}{1+m}, y = -ix + \frac{DE - CF - i(CE + DF)}{(1+m)(C^2 + D^2)} \end{cases}$$

Ces deux droites se trouvent dans le même plan, par conséquent elles se coupent en un point réel dont les coordonnées sont

$$(5) \quad x = -\frac{CE + DF}{C^2 + D^2} \cdot \frac{1}{1+m}, \quad y = \frac{DE - CF}{C^2 + D^2} \cdot \frac{1}{1+m}, \quad z = \frac{1}{1+m}.$$

Or, comme toutes les droites de la congruence doivent rencontrer les deux directrices, elles passent nécessairement par ce point et forment ce qu'on appelle *une gerbe*.

Pour $m = -1$, le centre de la gerbe se trouve à l'infini, et les droites sont parallèles. D'ailleurs, il est facile de constater que dans l'hypothèse $A = mC$, $B = mD$, le paraboloides hyperbolique (3) dégénère en deux plans, à savoir

$$z = \frac{1}{1+m} \quad \text{et} \quad z = -\frac{C^2 + D^2}{CE + DF} x.$$

Exemple. Soit l'équation de la droite imaginaire

$$(a) \quad e^{\mu i} \xi - \eta = 0,$$

où μ signifie une constante réelle. Alors

$$A = \cos \mu, \quad B = \sin \mu, \quad C = -1, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0$$

$$p = \cos \mu - 1, \quad q = \sin \mu.$$

Dans ce cas, les équations des directrices de la congruence sont

$$(b) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2} (1 + i \cotg \frac{1}{2} \mu), y = ix \\ z = \frac{1}{2} (1 - i \cotg \frac{1}{2} \mu), y = -ix. \end{cases}$$

Si l'on restreint la variabilité du point $(\alpha + \beta i)$ du plan inférieur en lui faisant parcourir une courbe quelconque, le point

$(\gamma + \delta i)$ du plan supérieur parcourra aussi une courbe, et les droites joignant deux points correspondants formeront une surface réglée.

1° En posant par exemple

$$\alpha = a + r \cos \varphi$$

$$\beta = b + r \sin \varphi,$$

où a , b et r sont des constantes données, et φ désigne une variable, le point $(\alpha + \beta i)$ parcourt une circonférence dont le centre est (a, b) et le rayon r . Comme

$$\gamma = \alpha \cos \mu - \beta \sin \mu = a \cos \mu - b \sin \mu + r \cos (\varphi + \mu)$$

$$\delta = \alpha \sin \mu + \beta \cos \mu = a \sin \mu + b \cos \mu + r \sin (\varphi + \mu)$$

le point $(\gamma + \delta i)$ décrit une circonférence du même rayon autour du centre $(a \cos \mu - b \sin \mu, a \sin \mu + b \cos \mu)$. La droite dans l'espace déterminée par deux points correspondants a pour équations

$$(c) \quad \frac{x' - r \cos \varphi}{k - 2r \sin (\varphi + \frac{1}{2}\mu) \sin \frac{1}{2}\mu} = \frac{y' - r \sin \varphi}{l + 2r \cos (\varphi + \frac{1}{2}\mu) \sin \frac{1}{2}\mu} = z,$$

où l'on a écrit pour abrégier

$$\begin{array}{l|l} x - a = x' & a \cos \mu - b \sin \mu - a = k \\ y - b = y' & a \sin \mu + b \cos \mu - b = l. \end{array}$$

Afin d'obtenir l'équation de la surface réglée formée par l'ensemble de ces droites, il suffit d'éliminer φ entre les équations (c), ce qui donne

$$(x' - kz)^2 + (y' - lz)^2 = r^2 [1 + 4z(z - 1) \sin^2 \frac{1}{2}\mu].$$

Pour $\pi > \mu > 0$, c'est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Le centre de cette surface a les coordonnées $x' = \frac{1}{2}k$, $y' = \frac{1}{2}l$, $z = \frac{1}{2}$ et l'une des séries de ses sections circulaires est parallèle au plan xy . *Toutes les génératrices de cet hyperboloïde rencontrent les droites (b) et l'on voit qu'il existe une infinité d'hyperboloïdes qui jouissent de la même propriété.*

Pour $\mu = \pi$, la surface

$$(x' + 2az)^2 + (y' + 2bz)^2 = r^2 (1 - 2z)^2$$

devient un cône dont le sommet a les coordonnées

$$x' = -a, \quad y' = -b, \quad z = \frac{1}{2}$$

ou bien $x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2}$.

On pouvait s'attendre à ce résultat, puisque dans cette hypothèse le coefficient angulaire de la droite imaginaire (α) $e^{\alpha i}$ est réel et égal à -1 .

Pour $\mu = 0$ enfin, la surface est un cylindre circulaire droit

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

En effet, dans ce cas, la quantité $\frac{A}{C}$, désignée précédemment par m , prend la valeur -1 .

2° Un autre cas d'un certain intérêt est celui où le point $(\alpha + \beta i)$ parcourt, par exemple, l'axe des x . A cet effet on posera

$$\alpha = \alpha, \quad \beta = 0$$

d'où il suit

$$\gamma = \alpha \cos \mu, \quad \delta = \alpha \sin \mu.$$

Le point $(\gamma + \delta i)$ du plan supérieur parcourt donc, lui aussi, une ligne droite, à savoir

$$Y = X \operatorname{tg} \mu.$$

Dans ce cas, la droite de jonction de deux points correspondants a pour équations

$$\frac{x - \alpha}{\alpha (\cos \mu - 1)} = \frac{y}{\alpha \sin \mu} = z$$

lesquelles, moyennant l'élimination de la variable α , fournissent cette autre équation

$$2z \sin \frac{1}{2} \mu (x \cos \frac{1}{2} \mu + y \sin \frac{1}{2} \mu) - y = 0.$$

Pour $\pi > \mu > 0$, cette dernière équation représente un paraboloïde hyperbolique dont les *génératrices coupent toujours les*

deux directrices de la congruence (a). C'est cette propriété seule qu'il importe de faire ressortir ici.

Pour $\mu = 0$ et $\mu = \pi$, la surface se réduit au plan $y = 0$ engendré par des droites parallèles à l'axe des z ou par des droites se rencontrant au point $x=y=0, z=\frac{1}{2}$, suivant qu'on suppose $\mu = 0$ ou $\mu = \pi$.

Lorsque la variable imaginaire $\eta = \gamma + \delta i$ est une fonction analytique de la variable imaginaire $\xi = \alpha + \beta i$

$$\eta = f(\xi)$$

et qu'on appelle *original* un tracé quelconque dans le plan inférieur, *image* la figure correspondante du plan supérieur, on sait qu'en général les éléments infiniment petits de l'image sont semblables aux éléments infiniment petits correspondants de l'original. De plus, le rapport des dimensions linéaires de l'image à celles de l'original en un point considéré est donné par la valeur absolue de la dérivée $\frac{d\eta}{d\xi} = f'(\xi)$, et la déviation de la dérivée mesure l'angle que fait l'élément linéaire considéré de l'image avec l'élément correspondant de l'original. Le cas particulier, à l'étude duquel est destinée la première partie de ce travail, à savoir le cas où $f(\xi)$ est une fonction linéaire de ξ , est caractérisé par le fait qu'il existe entre l'image et l'original une similitude parfaite. Si donc le point inférieur parcourt par exemple un faisceau de rayons, le point supérieur parcourra un faisceau de rayons directement égal au premier, mais placé différemment; à une circonférence correspondra une autre circonférence, etc.

En projetant le plan supérieur orthogonalement sur le plan inférieur, on établit une correspondance déterminée entre les différents points d'un même plan. Par ce procédé, les deux faisceaux de rayons directement égaux deviennent projectifs, et leur *produit*, c'est-à-dire le lieu géométrique du point d'intersection de deux rayons correspondants est, on le sait, une circonférence passant par les centres des deux faisceaux. Il ne sera pas inutile de démontrer ce théorème par le calcul.

Soit la relation linéaire entre ξ et η mise sous la forme

$$(1) \quad \eta = (a + bi)\xi + h + ki$$

On en tire, en posant

$$\eta = X + Yi, \quad \xi = x + yi$$

$$X + Yi = (a + bi)(x + yi) + h + ki$$

d'où il suit, par la séparation des parties réelles et imaginaires

$$(2) \quad \begin{cases} X = ax - by + h \\ Y = bx + ay + k. \end{cases}$$

En remplaçant encore les constantes a et b par deux autres l et ν , de sorte que

$$\begin{array}{l|l} a = l \cos \nu & \cos \nu = \frac{a}{l} \\ b = l \sin \nu & \sin \nu = \frac{b}{l} \\ l = +\sqrt{a^2 + b^2} & \operatorname{tg} \nu = \frac{b}{a}, \end{array}$$

il vient

$$\frac{d\eta}{d\xi} = a + bi = l(\cos \nu + i \sin \nu) = le^{i\nu}.$$

Par conséquent le rapport de l'élément linéaire de l'image au point η à l'élément linéaire de l'original au point ξ est constant et égal à l et $d\eta$ fait avec $d\xi$ l'angle constant ν ; c'est ce qui constitue la similitude parfaite entre l'image et l'original.

Si maintenant le point original parcourt un faisceau de rayons dont l'origine est le centre, on a

$$(3) \quad y = x \operatorname{tg} \mu,$$

où μ signifie un paramètre variable. On obtiendra l'image en éliminant x entre les équations

$$X = (a - b \operatorname{tg} \mu) x + h$$

$$Y = (b + a \operatorname{tg} \mu) x + k,$$

ce qui donne

$$(4) \quad Y - k = \operatorname{tg}(\mu + \nu)(X - h)$$

et ceci est bien un faisceau de rayons directement égal au premier. Son centre est le point (h, k) et ses rayons font l'angle ν avec les rayons correspondants de l'original. Pour avoir le pro-

duit des deux faisceaux (3) et (4), on écrit x et y à la place de X et Y , et on élimine le paramètre μ entre ces deux équations. On trouve ainsi la circonférence

$$(5) \left(x - \frac{bh - ak}{2b}\right)^2 + \left(y - \frac{ah + bk}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2 + b^2}{b^2} (h^2 + k^2) = \frac{h^2 + k^2}{4 \sin^2 \nu}$$

De cette équation on déduit facilement celle répondant au cas plus général où le centre du faisceau original n'est pas l'origine, mais le point $x = \alpha$, $y = \beta$. Il suffit, en effet, de remplacer dans (5)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ par } x - \alpha & \\ y \text{ » } y - \beta & \text{où } \gamma = a\alpha - b\beta + h \\ h \text{ » } \gamma - \alpha & \delta = b\alpha + a\beta + k. \\ k \text{ » } \delta - \beta & \end{array}$$

Tandis qu'en général à chaque point du plan correspond un autre point du plan, il en est un qui se correspond à lui-même. Ce point remarquable est appelé *le point double du plan*. Ses coordonnées x_0 , y_0 se trouvent en posant dans les équations (2) $X = x = x_0$, $Y = y = y_0$ et en les résolvant par rapport à x_0 et y_0 . Il vient

$$(a - 1)x_0 - by_0 + h = 0$$

$$bx_0 + (a - 1)y_0 + k = 0$$

et

$$(6) \begin{cases} x_0 = -\frac{h(a-1) + bk}{(a-1)^2 + b^2} \\ y_0 = -\frac{k(a-1) - bh}{(a-1)^2 + b^2} \end{cases}$$

On voit que dans le cas, en étude, il existe un seul point double. Il s'ensuit qu'une seule des droites faisant partie de la congruence, est perpendiculaire au plan xy . Nécessairement le point double est situé sur toutes les circonférences engendrées par deux faisceaux correspondants. D'ailleurs il serait aisé de le vérifier par le calcul. Ce fait permet la solution des problèmes fondamentaux sur la ligne droite.

Premier problème. D'une ligne droite imaginaire, on donne deux points imaginaires; construire la ligne droite.

Par la projection du plan supérieur sur le plan inférieur, la solution du problème est ramenée à une construction plane. En effet, envisagée de cette manière, la question proposée revient à celle-ci : Dans un plan, étant données les couples de points correspondants AA' , BB' , construire le correspondant C' d'un troisième point donné quelconque C .

Les deux droites AB et $A'B'$ peuvent être considérées comme deux rayons correspondants de deux faisceaux projectifs aux centres A et A' , ou bien B et B' . En vertu du théorème démontré plus haut, leur point d'intersection J appartient aux deux circonférences déterminées, l'une par les trois points $AA'J$ et l'autre par les trois points $BB'J$. Le second point commun à ces deux circonférences est le point double du plan (x_0, y_0) . Or, le point d'intersection de deux rayons quelconques des faisceaux A et B correspond au point de rencontre des rayons correspondants des faisceaux A' et B' . Par conséquent, pour avoir C' , il suffit de mener par C les rayons AC et BC qui rencontrent les circonférences $AA'J$ et $BB'J$ respectivement en M et N ; le point d'intersection des droites $A'M$ et $B'N$ sera le point C' . (Voir fig. 1, pl. I.)

Deuxième problème. D'une droite imaginaire on donne un point et la direction, on demande de construire la droite

Soit (ξ_1, η_1) le point, $(a + bi)$ le coefficient angulaire donné, de sorte que l'équation de la droite est

$$\eta - \eta_1 = (a + bi)(\xi - \xi_1).$$

Alors on connaît $l = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\operatorname{tg} \nu = \frac{b}{a}$ et il est facile de

trouver une autre couple de points correspondants. Soit, par exemple, A le point ξ_1 , A' le point η_1 , les deux ramenés dans le même plan. A la droite limitée AB , dont la longueur est 1, correspondra une droite $A'B'$ de la longueur l , et faisant l'angle ν avec la direction AB . Les points B et B' sont une seconde couple de points correspondants, et par là le problème est ramené au précédent.

Intersection de deux droites imaginaires. Soient les deux droites

$$(7) \quad \begin{cases} \eta = (a_1 + b_1 i) \xi + h_1 + k_1 i \\ \eta = (a_2 + b_2 i) \xi + h_2 + k_2 i. \end{cases}$$

De même que deux droites dans un plan se coupent toujours en un point réel, les deux congruences déterminées par ces deux équations possèdent un point imaginaire, c'est-à-dire une droite réelle commune. On peut demander de construire cette droite.

Au faisceau de rayons dans le plan inférieur

$$y - \beta = \operatorname{tg} \mu (x - \alpha),$$

où α et β sont des constantes et μ désigne un paramètre variable, correspondent dans le plan supérieur les deux faisceaux

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y - y_1 = \frac{b_1 + a_1 \operatorname{tg} \mu}{a_1 - b_1 \operatorname{tg} \mu} (X - x_1) \\ Y - y_2 = \frac{b_2 + a_2 \operatorname{tg} \mu}{a_2 - b_2 \operatorname{tg} \mu} (X - x_2), \end{array} \right.$$

où l'on a posé pour abrégier

$$\begin{array}{l|l} x_1 = a_1 \alpha - b_1 \beta + h_1 & x_2 = a_2 \alpha - b_2 \beta + h_2 \\ y_1 = b_1 \alpha + a_1 \beta + k_1 & y_2 = b_2 \alpha + a_2 \beta + k_2 \end{array}$$

Etant projectifs à un troisième faisceau, ces deux faisceaux sont eux-mêmes projectifs. De plus ils sont directement égaux; leur produit est par conséquent encore une circonférence passant par les deux centres (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . On vérifie aisément que les coordonnées du centre de cette circonférence ont pour expression

$$\frac{u (y_1 - y_2) + v (x_1 + x_2)}{2v}$$

$$\frac{v (y_1 + y_2) - u (x_1 - x_2)}{2v}$$

et que son rayon R est

$$R = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{2v} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

où

$$u = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$v = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Maintenant, la construction de la droite commune aux deux congruences (7) est facile. Soient ξ , η les traces de la droite cherchée dans les deux plans parallèles xy et XY , et soit la

première congruence donnée par les couples de points correspondants AA' , BB' , la seconde par les couples CC'' , DD'' , les points A, B, C, D se trouvant dans le plan inférieur, A', B', C'', D'' dans le plan supérieur. Afin d'obtenir dans le plan supérieur deux faisceaux projectifs, il s'agirait de construire dans ce plan (qu'on se figure toujours projeté sur le plan inférieur) les points E', E'', F', F'' correspondant à deux points quelconques E et F du plan inférieur. La construction est un peu simplifiée, si au lieu des points arbitraires E et F on choisit les points déjà donnés A et B , et qu'on cherche leurs correspondants A'' et B'' . Or, que l'on considère A' et A'' ou B' et B'' comme centres de deux faisceaux projectifs, les droites $A'B'$ et $A''B''$ (ou bien $B'A'$ et $B''A''$) seront deux rayons correspondants. Ils se rencontrent en un point J . Possédant ce point, on pourra tracer les deux circonférences déterminées, l'une par les trois points $A'A''J$, l'autre par les trois points $B'B''J$. Ces deux circonférences se coupent en deux points; l'un est J et l'autre est le point cherché η . Ce point η étant connu, le point ξ se trouvera alors de la manière indiquée précédemment. (Voir fig. 2, pl. I.)

La solution du problème proposé se simplifie encore dans le cas particulier, où $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$. En effet, dans cette hypothèse, les rayons correspondants des deux faisceaux (8) sont parallèles. Par conséquent, leur produit se compose de la droite joignant les deux centres (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

$$(9) \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

et de la droite à l'infini. Dans le cas général, toutes les circonférences telles que $A'A''J$, $B'B''J$ passaient par le point η ; maintenant, les droites $A'A''$, $B'B''$, etc., forment un faisceau ayant pour centre le point cherché η . Deux de ces droites, par exemple $A'A''$ et $B'B''$, suffisent pour déterminer ce dernier. On vérifie sans difficulté que les droites (9) constituent un faisceau. En effet, en remplaçant $x_1, y_1; x_2, y_2$ par leurs valeurs et en posant $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = m$, il vient

$$y - (b_1\alpha + a_1\beta + k_1) = \frac{(1-m)(b_1\alpha + a_1\beta) + k_1 - k_2}{(1-m)(a_1\alpha - b_1\beta) + h_1 - h_2} [x - (a_1\alpha - b_1\beta + h_1)]$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \alpha \left[a_1 \left(y - k_1 + \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \right) - b_1 \left(x - h_1 + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \right) \right] - \\ & - \beta \left[b_1 \left(y - k_1 + \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \right) + a_1 \left(x - h_1 + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \right) \right] + \\ & + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \left(y - k_1 + \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \right) - \frac{k_1 - k_2}{1 - m} \left(x - h_1 + \frac{h_1 - h_2}{1 - m} \right) = 0 \end{aligned}$$

qui prouve que la droite passe par le point

$$x = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{1 - m}, \quad y = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{1 - m}.$$

Lorsque $m = 1$, c'est-à-dire $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, ce point se trouve à l'infini et les droites imaginaires (7) sont parallèles.

Des considérations d'un autre ordre peuvent se rattacher à l'équation (1), p. 10. Qu'on se figure encore le plan supérieur projeté sur le plan inférieur. Sur deux rayons correspondants des faisceaux aux centres O et (h, k) , on marque deux points correspondants. Si celui des points qui peut être envisagé comme l'original (tandis que son correspondant est l'image) se trouve à la distance r de O, les deux points ont pour coordonnées

$$\text{l'original : } \begin{cases} r \cos \mu \\ r \sin \mu \end{cases}, \quad \text{l'image : } \begin{cases} ar \cos \mu - br \sin \mu + h \\ br \cos \mu + ar \sin \mu + k. \end{cases}$$

En posant pour abrégé

$$\begin{aligned} (a - 1) \cos \mu - b \sin \mu &= A \\ b \cos \mu + (a - 1) \sin \mu &= B, \end{aligned}$$

on trouve les relations

$$\begin{array}{l|l} B \cos \mu - A \sin \mu = b & \cos \mu = \frac{A(a - 1) + Bb}{C} \\ B \sin \mu + A \cos \mu = a - 1 & \sin \mu = \frac{B(a - 1) - Ab}{C} \\ A^2 + B^2 = (a - 1)^2 + b^2 = C & \frac{\partial A}{\partial \mu} = -B, \quad \frac{\partial B}{\partial \mu} = A. \end{array}$$

Alors la droite déterminée par les deux points marqués a pour équation

$$(10) \quad y - r \sin \mu = \frac{Br + k}{Ar + h} (x - r \cos \mu)$$

ou

$$(10^a) \quad (y - r \sin \mu) (Ar + h) - (x - r \cos \mu) (Br + k) = 0.$$

Dans cette équation on peut regarder μ comme constant et r comme un paramètre variable ou inversement, et dans les deux cas l'enveloppe de toutes ces droites présente un certain intérêt.

Soit premièrement μ constant et r variable. Afin de trouver l'enveloppe en question, on éliminera r entre l'équation (10^a) et celle qui en résulte, en différentiant l'équation (10^a) par rapport à r . La différentiation indiquée donne

$$-\sin \mu (Ar + h) + A(y - r \sin \mu) + \cos \mu (Br + k) - B(x - r \cos \mu) = 0,$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu}{2b};$$

cette valeur de r introduite dans l'équation (10^a) fournit comme équation de l'enveloppe cherchée

$$(11) \quad (Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu)^2 = 4b (hy - kx).$$

C'est l'équation d'une parabole, ou bien, si l'on veut regarder aussi μ comme variable, celle d'un système de paraboles. La droite $hy - kx = 0$ est une tangente commune à toutes ces courbes, et la droite

$$Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu = 0$$

représente pour chaque valeur de μ un diamètre de la parabole correspondante.

Avant d'entreprendre la discussion complète et la transformation de l'équation (11), il est utile de remarquer que la droite (10) est la projection sur le plan xy d'une droite dans l'espace faisant partie de la congruence (1). Cette droite a pour équations

$$(10^b) \quad \frac{x - r \cos \mu}{Ar + h} = \frac{y - r \sin \mu}{Br + k} = z$$

ou

$$\begin{cases} x - hz = r (Az + \cos \mu) \\ y - kz = r (Bz + \sin \mu) \end{cases}$$

En y considérant r comme variable, μ comme constant, l'ensemble de ces droites forme une surface réglée dont l'équation s'obtient par l'élimination de r entre les deux dernières équations. Il vient

$$\frac{x - hz}{y - kz} = \frac{Az + \cos \mu}{Bz + \sin \mu}, \quad \text{ou}$$

$$(13) \quad (Ak - Bh) z^2 + Bxz - Ayz + x \sin \mu - y \cos \mu + z (k \cos \mu - h \sin \mu) = 0.$$

Cette équation représente un parabolôide hyperbolique ou plutôt, si l'on envisage aussi μ comme un paramètre variable, un système de parabolôides hyperboliques. En remplaçant A et B par leurs valeurs, elle peut se mettre sous la forme

$$\cos \mu \left\{ (kz - y) [(a - 1) z + 1] - bz (hz - x) \right\} - \\ - \sin \mu \left\{ (kz - y) bz + [(a - 1) z + 1] (hz - x) \right\} = 0.$$

Cette équation prouve que toutes ces surfaces forment ce qu'on appelle un faisceau de surfaces. En effet, elles passent toutes par l'intersection des deux surfaces particulières

$$(14) \quad \begin{cases} (kz - y) [(a - 1) z + 1] - bz (hz - x) = 0 \\ (kz - y) bz + [(a - 1) z + 1] (hz - x) = 0. \end{cases}$$

Or, on voit immédiatement que ces deux équations sont satisfaites par $kz - y = 0$, $hz - x = 0$. Ensuite, si on les rend homogènes en substituant à x, y, z les rapports $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$, elles sont vérifiées simultanément par $p = 0$, $z = 0$, ce qui veut dire que la droite à l'infini du plan $z = 0$ appartient à tous les parabolôides. En troisième lieu, on peut considérer les équations (14) comme étant homogènes par rapport aux expressions $kz - y$ et $hz - x$. Alors elles seront aussi satisfaites, si l'on annule leur déterminant, ce qui donne

$$[(a - 1) z + 1]^2 + b^2 z^2 = Cz^2 + 2(a - 1)z + 1 = 0,$$

$$\text{où} \quad C = (a - 1)^2 + b^2$$

comme précédemment. De cette équation on tire

$$z_1 = \frac{-(a - 1) + bi}{C}, \quad z_2 = \frac{-(a - 1) - bi}{C}$$

Il est utile de remarquer dès à présent que

$$\frac{bz_1}{(a-1)z_1+1} = i$$

et par suite

$$(a-1)z_1+1 = -ibz_1,$$

de même

$$\frac{bz_2}{(a-1)z_2+1} = -i$$

et partant

$$(a-1)z_2+1 = ibz_2;$$

puis

$$\begin{aligned} kz_1 - \frac{bz_1^2}{(a-1)z_1+1} &= kz_1 + \frac{bz_1^2}{ibz_1} = (k-ih)z_1 = \\ &= (k-ih) \frac{bi-(a-1)}{C} = -\frac{k(a-1)-bh}{C} + i \frac{h(a-1)+bk}{C} = y_0 - ix_0 \end{aligned}$$

et de même

$$kz_2 - \frac{bz_2^2}{(a-1)z_2+1} = y_0 + ix_0.$$

Introduisant successivement z_1 et z_2 à la place de z dans la première des équations (14) et la résolvant par rapport à y , on obtient

$$y = \frac{bz_1}{(a-1)z_1+1} x + \left[kz_1 - \frac{bz_1^2}{(a-1)z_1+1} \right] = ix + y_0 - ix_0$$

et

$$y = \frac{bz_2}{(a-1)z_2+1} x + \left[kz_2 - \frac{bz_2^2}{(a-1)z_2+1} \right] = -ix + y_0 + ix_0.$$

Or, on se rappellera que les directrices de la congruence linéaire

$$(A+Bi)\xi + (C+Di)\eta + E + Fi = 0$$

étaient (formules (4) p. 6)

$$z = \frac{Cp + Dq \pm i(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, \quad y = \pm ix + \frac{Eq - Fp \pm i(Ep + Fq)}{p^2 + q^2}.$$

Pour adapter ces formules au cas de la congruence

$$\eta = (a+bi)\xi + h + ki,$$

il suffit d'y faire les substitutions

$$A = a, \quad B = b, \quad C = -1, \quad D = 0, \quad E = h, \quad F = k,$$

$$p = A + C = a - 1, \quad q = B + D = b,$$

ce qui fournit

$$z = \frac{-(a-1) + bi}{(a-1)^2 + b^2}, \quad y = ix + \frac{hb - k(a-1) + i[h(a-1) + kb]}{(a-1)^2 + b^2} =$$

$$= ix + y_0 - ix_0$$

$$z = \frac{-(a-1) - bi}{(a-1)^2 + b^2}, \quad y = -ix + \frac{hb - k(a-1) - i[h(a-1) + kb]}{(a-1)^2 + b^2} =$$

$$= -ix + y_0 + ix_0.$$

Par conséquent, les deux droites imaginaires communes à tous les paraboloides hyperboliques, sont précisément les directrices de la congruence (1).

Ainsi, les surfaces composant le faisceau (13) passent toutes par une courbe gauche du 4^me ordre qui dégénère en quatre lignes droites, à savoir: 1° la droite $kz - y = 0$, $hz - x = 0$; 2° la droite à l'infini du plan $z = 0$; 3° et 4° les directrices imaginaires de la congruence (1).

De cette propriété des paraboloides (13) découle une propriété remarquable des paraboles (11). Ces dernières sont les contours apparents des dits paraboloides sur le plan xy . En effet, on sait qu'en désignant par a , b , c les cosinus directeurs de ses génératrices, le cylindre tangent à la surface du second ordre

$$u = f(x, y, z) = 0$$

est donné par la formule

$$2u \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2bc \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2ca \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) =$$

$$= \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

et que la courbe suivant laquelle il touche la surface se trouve dans le plan

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Or, en l'appliquant aux surfaces (13)

$$(13) \quad (Ak - Bh) z^2 + Bxz - Ayz + \\ + x \sin \mu - y \cos \mu + z (k \cos \mu - h \sin \mu) = 0$$

et en y faisant $a = b = 0$, $c = 1$, elle conduit à l'équation (11), à savoir

$$(11) \quad (Bx - Ay + h \sin \mu - k \cos \mu)^2 = 4b (hy - kx).$$

Les courbes de contact sont situées dans les plans

$$\frac{1}{2} Bx - \frac{1}{2} Ay + (Ak - Bh) z + \frac{1}{2} (k \cos \mu - h \sin \mu) = 0$$

ou

$$\cos \mu \left\{ bx - (a - 1) y + 2 [k(a - 1) - bh] z + k \right\} + \\ + \sin \mu \left\{ (a - 1) x + by - 2 [bk + h(a - 1)] z - h \right\} = 0,$$

qui forment un faisceau, comme cela devait être, puisque les paraboloides (13) forment eux-mêmes un faisceau. D'ailleurs, ces plans sont les plans polaires des paraboloides par rapport au point à l'infini de l'axe des z comme pôle.

Afin de soumettre les paraboles en question à une étude plus approfondie, on transformera l'équation (11) à l'aide des substitutions

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{A\xi + B\eta}{\sqrt{C}} \\ y = \frac{B\xi - A\eta}{\sqrt{C}} \end{array} \right. \quad \text{d'où il suit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{Ax + By}{\sqrt{C}} \\ \eta = \frac{Bx - Ay}{\sqrt{C}} \end{array} \right.$$

Elle prend alors la forme

$$\left[\eta + \frac{(Bh - Ak)(a - 1) + b(Ah + Bk)}{C^{\frac{3}{2}}} \right]^2 = \\ = 4b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}} \left[\xi + \frac{(Ah + Bk)(a - 1)}{C^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Posant encore pour simplifier

$$\xi + \frac{(Ah + Bk)(a - 1)}{C^{\frac{3}{2}}} = X$$

$$\eta + \frac{(Bh - Ak)(a - 1) + b(Ah + Bk)}{C^{\frac{3}{2}}} = Y,$$

il vient

$$Y^2 = 4b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}} X.$$

Par conséquent, une quelconque des paraboles a le paramètre

$$2b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}},$$

son foyer est donné par

$$(15) \quad X = b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}}, \quad Y = 0,$$

et sa directrice possède l'équation

$$(16) \quad X = -b \frac{Bh - Ak}{C^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, par le retour au système primitif de coordonnées, les expressions (15) fournissent comme coordonnées du foyer

$$(17) \quad \begin{cases} x = -\frac{h(a - 1) + bk}{C} = x_0 \\ y = -\frac{k(a - 1) - bh}{C} = y_0, \end{cases}$$

tandis que l'équation de la directrice (16) devient

$$(18) \quad Ax + By + h \cos \mu + k \sin \mu = 0.$$

On voit ainsi que *toutes les paraboles (11), sans être homofocales dans le sens général du mot, ont un foyer commun qui est précisément le point double du plan xy.* Quant aux directrices, elles forment un faisceau de rayons, car leur équation peut se mettre sous la forme

$$\cos \mu [(a - 1)x + by + h] + \sin \mu [-bx + (a - 1)y + k] = 0$$

qui prouve qu'elles passent toutes par le point d'intersection des droites

$$\begin{aligned}(a-1)x + by + h &= 0 \\ -bx + (a-1)y + k &= 0\end{aligned}$$

à savoir

$$\begin{cases} x = -\frac{h(a-1) - bk}{C} = x_1 \\ y = -\frac{k(a-1) + bh}{C} = y_1, \end{cases}$$

Dans la suite, ce point (x_1, y_1) jouera encore une fois un rôle important.

Maintenant il est facile de prévoir que l'équation (11) pourra aussi prendre la forme

$$(Ax + By + h \cos \mu + k \sin \mu)^2 = C [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2].$$

On en conclut que les droites imaginaires

$$(19) \begin{cases} y - y_0 + i(x - x_0) = 0 \\ y - y_0 - i(x - x_0) = 0, \end{cases}$$

qui joignent le point (x_0, y_0) aux points circulaires imaginaires à l'infini du plan xy sont deux tangentes communes à toutes les paraboles (11). Ceci montre une fois de plus que ces paraboles ont le point (x_0, y_0) pour foyer commun. De plus, on remarquera que les droites (19) sont les projections sur le plan xy des directrices de la congruence (1).

La propriété des paraboloides (13) consistant en ce que leurs cylindres tangents parallèles à l'axe des z sont coupés par des plans parallèles au plan xy suivant des paraboles ayant un foyer commun, est susceptible d'une certaine généralisation. En effet, par des calculs analogues, mais plus longs, on démontrerait qu'elle s'étend à tous les cônes tangents dont le centre commun se trouve en dehors du plan xy .

Pour résumer l'étude qui vient d'être faite, on peut dire : *Les droites faisant partie de la congruence (1) (leur nombre est doublement infini) se groupent suivant une infinité de paraboloides hyperboliques. Ces surfaces passent toutes par quatre droites dans l'espace dont deux sont réelles, tandis que les deux autres sont les directrices imaginaires de la congruence (1). Leur pro-*

jection centrale sur le plan xy est un système de paraboles ayant un foyer commun, pourvu que le centre de projection, qui d'ailleurs est complètement arbitraire, ne soit pas situé dans le plan xy . En particulier, leur contour apparent sur le plan xy consiste en un système de paraboles dont le foyer commun est le point double du plan.

Il existe une autre manière de grouper les droites de la congruence. En effet, si dans les équations de la droite (10^b)

$$(10^b) \frac{x - r \cos \mu}{r[(a-1) \cos \mu - b \sin \mu] + h} = \frac{y - r \sin \mu}{r[b \cos \mu + (a-1) \sin \mu] + k} = z$$

on envisage μ comme variable et r comme constant, et qu'on élimine μ entre elles, on obtient encore une surface réglée. Les équations (10^b) peuvent s'écrire

$$\begin{cases} x - hz = r \{ \cos \mu [1 + (a-1)z] - bz \sin \mu \} \\ y - kz = r \{ \sin \mu [1 + (a-1)z] + bz \cos \mu \}. \end{cases}$$

L'élimination indiquée s'effectue alors en élevant les deux membres de ces équations au carré et en ajoutant les résultats terme par terme; il vient

$$(20) \quad (x - hz)^2 + (y - kz)^2 = r^2 \{ [1 + (a-1)z]^2 + b^2 z^2 \} = r^2 [1 + 2(a-1)z + Cz^2].$$

Cette équation représente un hyperboloïde à une nappe ou bien, si l'on y considère r comme un paramètre variable, un système d'hyperboloïdes. On remarque tout d'abord que ces surfaces sont concentriques et que le centre a les coordonnées

$$x = -\frac{h(a-1)}{C}, \quad y = -\frac{k(a-1)}{C}, \quad z = -\frac{a-1}{C}.$$

L'une des séries de leurs sections circulaires se trouve dans les plans parallèles au plan $z = 0$, tandis que l'orientation de l'autre série varie avec r , c'est-à-dire qu'elle est différente pour les différents hyperboloïdes.

L'équation (20) fait reconnaître immédiatement que les hy-

perboloïdes passent tous par l'intersection des deux surfaces particulières

$$\begin{cases} (x - hz)^2 + (y - kz)^2 = 0 \\ Cz^2 + 2(a-1)z + 1 = 0 \end{cases}$$

et qu'en conséquence ils forment un faisceau de surfaces. De la dernière de ces deux équations on tire

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-(a-1) + ib}{C} \\ z_2 = \frac{-(a-1) - ib}{C} \end{cases}$$

En introduisant successivement z_1 et z_2 à la place de z dans la première équation, on trouve

$$\begin{aligned} y - kz_1 &= \pm i(x - hz_1) \\ y - kz_2 &= \pm i(x - hz_2), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} y &= \pm ix + \frac{-k(a-1) \pm ih(a-1) + ikb \pm hb}{C} \\ y &= \pm ix + \frac{-k(a-1) \pm ih(a-1) - ikb \mp hb}{C} \end{aligned}$$

ou encore, en séparant les doubles signes

$$\begin{cases} y = ix + \frac{hb - k(a-1) + i[h(a-1) + bk]}{C} = ix + y_0 - ix_0 \\ y = -ix + \frac{-hb - k(a-1) + i[bk - h(a-1)]}{C} = -ix + y_1 + ix_1 \\ y = ix + \frac{-bh - k(a-1) + i[h(a-1) - bk]}{C} = ix + y_1 - ix_1 \\ y = -ix + \frac{bh - k(a-1) - i[h(a-1) + bk]}{C} = -ix + y_0 + ix_0 \end{cases}$$

La courbe du 4^e ordre, commune à tous les hyperboloïdes, se compose donc des quatre droites imaginaires

$$\begin{aligned}
1^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) + ib}{C}, \quad y = ix + y_0 - ix_0 \\
2^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) - ib}{C}, \quad y = -ix + y_0 + ix_0 \\
3^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) - ib}{C}, \quad y = ix + y_1 - ix_1 \\
4^\circ \quad z &= \frac{-(a-1) + ib}{C}, \quad y = -ix + y_1 + ix_1.
\end{aligned}$$

Les droites (1°) et (2°) sont les directrices de la congruence (1), tandis que les droites (3°) et (4°) seraient les directrices de la congruence

$$\eta = (a - bi) \xi + h + ki.$$

La présence des deux dernières droites dans la courbe du 4° ordre s'explique par le fait que dans l'équation (20) la quantité b n'entre qu'au carré.

Afin de trouver une autre propriété importante des hyperboloïdes, on transformera leur équation en coordonnées tangentielles tétraédriques. A cet effet, on rendra d'abord homogène l'équation (20) en remplaçant x, y, z par les rapports $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}$ et en multipliant par p^2 , ce qui donne

$$\begin{aligned}
(20^a) \quad f(x, y, z, p) &= x^2 + y^2 + (h^2 + k^2 - r^2C) z^2 - 2hxz - \\
&\quad - 2kyz - 2r^2(a-1) zp - r^2p^2 = 0.
\end{aligned}$$

La transformation se fait alors à l'aide des formules connues

$$\frac{1}{2} f'(x) = x - hz = u$$

$$\frac{1}{2} f'(y) = y - kz = v.$$

$$\frac{1}{2} f'(z) = (h^2 + k^2 - r^2C) z - hx - ky - r^2(a-1)p = w$$

$$\frac{1}{2} f'(p) = -r^2(a-1)z - r^2p = q,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1}{r^2 b^2} [r^2 b^2 - h^2] u - hkv - hw + h(a-1)q]$$

$$y = \frac{1}{r^2 b^2} [-hku + (r^2 b^2 - k^2)v - kw + k(a-1)q]$$

$$z = -\frac{1}{r^2 b^2} [hu + kv + w - (a-1)q]$$

$$p = \frac{1}{r^2 b^2} [(a-1)hu + (a-1)kv + (a-1)w - Cq].$$

Toute réduction faite, il vient

$$(21) \quad r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - w^2 - Cq^2 - 2hkuw - 2huw - 2kvw + 2h(a-1)uq + 2k(a-1)vq + 2(a-1)wq = 0.$$

Si l'on passe maintenant aux coordonnées tangentielles cartésiennes, en posant $q = 1$, et que l'on assigne ensuite à w une valeur particulière w_0 , l'ensemble des deux équations

$$(22) \quad \begin{cases} r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - w^2 - 2hkuw - 2huw - 2kvw + \\ \quad + 2h(a-1)u + 2k(a-1)v + 2(a-1)w - C = 0 \\ w = w_0 \end{cases}$$

représente un système de cônes concentriques tangents aux hyperboloïdes. Le centre commun est un point quelconque de l'axe des z , donné par l'équation $w = w_0$ ou par ses coordonnées

$$x = y = 0, \quad z = -\frac{1}{w_0},$$

et les courbes de contact se trouvent dans les plans

$$(h^2 + k^2)z - hx - ky + r^2 \{ [w_0(a-1) - C]z + w_0 - (a-1) \} = 0.$$

formant un faisceau qui n'est autre que le faisceau des plans polaires des hyperboloïdes par rapport au centre des cônes comme pôle.

Or, la forme de la première des équations (22) permet de reconnaître immédiatement que les sections de ces cônes faites par des plans parallèles au plan xy forment un système de sections coniques homofocales. Il est aisé de voir que cette propriété subsiste pour tous les cônes concentriques dont le centre se trouve en dehors du plan xy . En particulier, lorsque $w_0 = 0$, les deux équations

$$(23) \begin{cases} r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - 2hkuv + 2h(a-1)u + \\ \quad + 2k(a-1)v - C = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

sont l'expression analytique des cylindres tangents aux hyperboloïdes, ayant leurs génératrices parallèles à l'axe des z . Ces cylindres déterminent sur le plan xy le contour apparent des hyperboloïdes. Or, interprétée en coordonnées tangentielles trimétriques dans le plan xy , la première des équations (23) représente les bases des cylindres tangents. Afin d'obtenir le contour apparent en coordonnées ponctuelles, on rend d'abord la première des équations (23) homogène, en substituant aux variables u et v les rapports $\frac{u}{q}$ et $\frac{v}{q}$ et en multipliant par q^2 ; cela fournit

$$(24) \quad F(u, v, q) = r^2 b^2 (u^2 + v^2) - h^2 u^2 - k^2 v^2 - 2hkuv + \\ + 2h(a-1)uq + 2k(a-1)vq - Cq^2 = 0;$$

ensuite la transformation indiquée s'effectue au moyen des formules

$$\frac{1}{2} F'(u) = (r^2 b^2 - h^2) u - hkv + h(a-1)q = x$$

$$\frac{1}{2} F'(v) = -hku + (r^2 b^2 - k^2) v + k(a-1)q = y$$

$$\frac{1}{2} F'(q) = h(a-1)u + k(a-1)v - Cq = p,$$

desquelles on tire les valeurs de u, v, q . L'introduction de ces valeurs dans l'équation (24) conduit à l'équation cherchée. Tout calcul fait, on obtient

$$(r^2 C - k^2) x^2 + (r^2 C - h^2) y^2 + 2hkxy + 2r^2(a-1)p(hx + ky) = \\ = r^2 p^2 [r^2 b^2 - (h^2 + k^2)],$$

ou, en posant encore $p = 1$, ce qui équivaut au passage des coordonnées trimétriques aux coordonnées cartésiennes

$$(25) \quad r^2 \left\{ [(a-1)y - bx + k]^2 + [by + (a-1)x + h]^2 \right\} = (kx - hy - r^2 b)^2.$$

Cette équation est la même que celle qu'on aurait trouvée en cherchant l'enveloppe des droites (10)

$$(10) \quad y - r \sin \mu = \frac{Br + k}{Ar + h} (x - r \cos \mu),$$

si l'on considérait μ comme variable et r comme constant.

Il aurait été facile de reconnaître directement que les sections coniques (25) sont homofocales. En effet, la transformation

$$\begin{cases} x = \frac{h\xi - k\eta}{\sqrt{h^2 + k^2}} + x_0 \\ y = \frac{k\xi + h\eta}{\sqrt{h^2 + k^2}} + y_0 \end{cases}$$

amène l'équation

$$Cr^2\xi^2 + C\left(r^2 - \frac{h^2 + k^2}{C}\right) \left(\eta + \frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}\right)^2 - b^2r^2\left(r^2 - \frac{h^2 + k^2}{C}\right) = 0$$

qui peut s'écrire

$$(26) \quad \frac{\xi^2}{b^2 \frac{r^2 C - (h^2 + k^2)}{C^2}} + \frac{\left(\eta + \frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}\right)^2}{\frac{b^2 r^2}{C}} = 1.$$

Par conséquent, le centre commun a les coordonnées

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}$$

et les demi-axes sont

$$\frac{b}{C} \sqrt{r^2 C - (h^2 + k^2)} \quad \text{et} \quad \frac{br}{\sqrt{C}}$$

Suivant que $r^2 C$ est plus grand ou plus petit que $(h^2 + k^2)$, les courbes sont des ellipses ou des hyperboles. Pour $r^2 C = h^2 + k^2$, la courbe dégénère en l'axe H qu'on se figure double. Les courbes sont effectivement homofocales, car leur excentricité est constante et

et $= \frac{b\sqrt{h^2 + k^2}}{C}$. Les deux foyers ont les coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0 \\ \eta = -2b \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{C} \end{array} \right.$$

Exprimées dans le système primitif de coordonnées, elles deviennent

$$x = x_0, \quad y = y_0$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2bk\sqrt{h^2 + k^2}}{C\sqrt{h^2 + k^2}} + x_0 = -\frac{h(a-1) - bk}{C} = x_1 \\ y = \frac{-2bh\sqrt{h^2 + k^2}}{C\sqrt{h^2 + k^2}} + y_0 = -\frac{k(a-1) + bh}{C} = y_1 \end{array} \right.$$

Donc, l'un des foyers, (x_0, y_0) , est le point double du plan, tandis que l'autre, (x_1, y_1) , est le point double relativement à la congruence $\eta = (a - bi)\xi + h + ki$.

On sait que les sections coniques homofocales ont la propriété de posséder quatre tangentes imaginaires communes, dont les six points d'intersection sont : 1° les deux points circulaires imaginaires à l'infini, 2° les deux foyers imaginaires, et 3° les deux foyers réels des courbes. Or, l'équation (25) peut se mettre sous chacune des formes

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2C [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] = (kx - hy + r^2b)^2 \\ r^2C [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] = (kx - hy - r^2b)^2, \end{array} \right.$$

montrant que les sections coniques en question possèdent bien quatre tangentes imaginaires communes, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} y - y_0 = \pm i(x - x_0) \\ y - y_1 = \pm i(x - x_1) \end{array} \right.$$

et que les droites

$$kx - hy \pm r^2b = 0$$

en sont les directrices.

Les droites $y - y_0 = \pm i(x - x_0)$ peuvent être considérées comme les projections sur le plan xy des directrices de la congruence (1); les droites $y - y_1 = \pm i(x - x_1)$ ont la même signification relativement à la congruence $\eta = (a - bi)\xi + h + ki$.

L'étude qui vient d'être faite peut se résumer comme il suit : *La double infinité de droites appartenant à la congruence (1) se groupe selon une infinité d'hyperboloïdes à une nappe. Ces surfaces forment un faisceau passant par les directrices des congruences $\eta = (a \pm bi) \xi + h + ki$; une série de leurs sections circulaires est parallèle au plan xy , et leurs cônes tangents concentriques sont coupés par des plans parallèles au plan xy selon un système de sections coniques homofocales, pourvu que le centre commun se trouve en dehors du plan xy . En particulier, les sections coniques homofocales représentant le contour apparent des hyperboloïdes sur le plan xy ont pour foyers les points doubles de ce plan correspondant aux congruences $\eta = (a \pm bi) \xi + h + ki$.*

Il resterait encore à examiner les cas particuliers : 1° $h = k = 0$, 2° $b = 0$, 3° $a = 1, b = 0$. Dans le cas 2° les droites dans l'espace forment une gerbe, et dans le cas 3° elles sont toutes parallèles.

On n'entrera pas ici dans les détails de cette étude qui, du reste, n'offre aucune difficulté.

SECONDE PARTIE

Courbes imaginaires.

Soit l'équation d'une courbe

$$(1) \quad \eta = f(\xi).$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on peut la mettre sous la forme

$$X + Yi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Pour que le point $(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$ fasse partie de cette courbe, il faut que les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfassent aux conditions

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma = \varphi(\alpha, \beta) \\ \delta = \psi(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Par ces deux équations, γ et δ sont déterminés en fonction de α et β que l'on peut, en conséquence, envisager comme des variables indépendantes. Si l'on donne à α et β toutes les valeurs possibles, les équations

$$(3) \quad \frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta} = z$$

fournissent toutes les droites représentant les points de la courbe (1). En vertu des équations (2), ces droites appartiennent à une congruence. Or, on sait que les droites faisant partie d'une telle congruence sont tangentes en deux points à une surface à deux nappes. Il s'agit maintenant de déterminer cette surface. Dans la suite, elle sera désignée par S.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'une quelconque des droites

$$(3) \quad \begin{cases} x = \alpha + (\gamma - \alpha) z \\ y = \beta + (\delta - \beta) z. \end{cases}$$

Lorsque α et β varient, le point (x, y, z) se meut sur une surface. Aux accroissements arbitraires $d\alpha, d\beta$ des paramètres α et β correspondent des accroissements des quantités x, y, z, γ, δ , reliés aux premiers par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} dx = d\alpha + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} d\beta - d\alpha \right) z + (\gamma - \alpha) dz \\ dy = d\beta + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \delta}{\partial \beta} d\beta - d\beta \right) z + (\delta - \beta) dz. \end{cases}$$

Or, la droite (3) est tangente à la surface au point (x, y, z) , si l'on a

$$dx = (\gamma - \alpha) dz, \quad dy = (\delta - \beta) dz.$$

Introduisant ces valeurs dans les équations précédentes et posant, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \gamma_1, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \gamma_2, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = \delta_1, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \beta} = \delta_2,$$

il vient

$$(5) \quad \begin{cases} [1 + (\gamma_1 - 1) z] d\alpha + \gamma_2 z d\beta = 0 \\ \delta_1 z d\alpha + [1 + (\delta_2 - 1) z] d\beta = 0 \end{cases}$$

Les plans tangents à la surface S aux points A et B, où elle est touchée par la droite g de la congruence, se déterminent de la manière suivante. La droite g répond aux paramètres α et β . Si l'on donne à α et β des accroissements conformes aux équations (5), on obtient une droite consécutive g' qui, elle aussi, est tangente à la surface S aux points A' et B'. Soit A' le point d'intersection de g et g' . Alors le plan de ces deux droites est

évidemment le plan tangent à la surface au point B, et le coefficient angulaire de sa trace sur le plan xy est donné par

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = m.$$

L'élimination du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre ces deux équations permet d'établir une relation qui détermine z en fonction de α et β . On obtient

$$[1 + (\gamma_1 - 1)z] [1 + (\delta_2 - 1)z] = z^2 \gamma_2 \delta_1$$

ou

$$(6) \quad z^2 [\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1 - \gamma_1 - \delta_2 + 1] + z [\gamma_1 + \delta_2 - 2] + 1 = 0.$$

Cette équation étant du 2^d degré en z , il existe effectivement deux points de contact.

Si, au contraire, on élimine z entre les mêmes équations, on aura une équation pour déterminer m . Il vient successivement

$$\frac{d\alpha}{\gamma_1 d\alpha - d\alpha + \gamma_2 d\beta} = \frac{d\beta}{\delta_2 d\beta - d\beta + \delta_1 d\alpha}$$

$$\frac{1}{\gamma_1 - 1 + \gamma_2 m} = \frac{m}{\delta_2 m - m + \delta_1}$$

$$(7) \quad \gamma_2 m^2 + (\gamma_1 - \delta_2) m - \delta_1 = 0.$$

Les équations (6) et (7) se simplifient, si l'on tient compte des relations entre les dérivées partielles premières de γ et δ . En effet, quelle que soit d'ailleurs la fonction $f(\alpha + \beta i)$, on sait qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{df}{d(\alpha + \beta i)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = i \frac{df}{d(\alpha + \beta i)},$$

d'où l'on tire

$$i \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

ou

$$i(\gamma_1 + i\delta_1) = \gamma_2 + i\delta_2$$

et par suite

$$\gamma_1 = \delta_2, \quad \gamma_2 = -\delta_1$$

$$\gamma_1 \delta_2 - \gamma_2 \delta_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad \gamma_1 - \delta_2 = 0.$$

A l'aide des deux dernières relations, les équations (6) et (7) prennent la forme

$$(6^a) \quad z^2 [(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2] + 2z(\gamma_1 - 1) + 1 = 0$$

$$(7^a) \quad \gamma_2 (m^2 + 1) = 0$$

De l'équation (6^a) il suit

$$(8) \quad z = \frac{1 - \gamma_1 \pm i\gamma_2}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2} = \frac{1}{1 - \gamma_1 \mp i\gamma_2}$$

et l'équation (7^a) fournit, si $\gamma_2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$

$$(9) \quad m = \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm i.$$

De l'équation (9) on conclut que les traces sur le plan xy des plans tangents à la surface S forment deux séries de droites parallèles, ayant pour coefficient angulaire respectivement i et $-i$. Il s'ensuit que la surface elle-même se compose de deux surfaces cylindriques dont les génératrices sont à la fois parallèles au plan xy et aux traces des plans tangents.

On obtiendrait l'équation de cette surface en éliminant α et β entre les équations

$$(10) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{1 - \gamma_1 \mp i\gamma_2} \\ x = \alpha + (\gamma - \alpha)z \\ y = \beta + (\delta - \beta)z \end{cases}$$

Le cas où $\gamma_2 = 0$ mérite une attention spéciale. En effet, dans cette hypothèse, z devient réel

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1},$$

m n'est plus nécessairement imaginaire et les équations (10) sont remplacées par les suivantes :

$$(10^a) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{1 - \gamma_1} \\ x = \frac{\gamma - \alpha\gamma_1}{1 - \gamma_1} \\ y = \frac{\delta - \beta\gamma_1}{1 - \gamma_1} \end{cases}$$

Or, lorsque

$$\gamma_1 = F(\alpha, \beta) = 0$$

le point (α, β) se meut sur une courbe dans le plan xy . Alors les équations (10^a) représentent en général une courbe gauche réelle et les droites (3), tangentes à cette courbe, forment une surface développable dont la trace sur le plan xy est donnée par l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$. La courbe gauche devient plane ou se décompose en plusieurs courbes planes chaque fois que la courbe $F(\alpha, \beta) = 0$ dégénère en une ou plusieurs lignes droites.

Les deux nappes de la surface, bien qu'imaginaires, peuvent cependant se couper suivant une courbe réelle. Pour un point d'intersection les deux valeurs de z dans la formule (8) doivent être égales, ce qui n'est possible que lorsque $\gamma_2 = 0$. Par conséquent, la courbe gauche répondant à l'hypothèse $\gamma_2 = 0$ n'est autre que l'intersection réelle des deux nappes imaginaires de la surface S.

Dans le but d'établir la correspondance entre les valeurs de m et de x, y, z , on posera dans la première des équations (5)

$\frac{d\beta}{d\alpha} = m$ et on la résoudra par rapport à z , ce qui donnera

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1 - m\gamma_2}.$$

En écrivant encore ε à la place de $\pm i$ pour éviter dans la suite le double signe de i , on voit qu'à la valeur $m = \varepsilon$ correspond la valeur

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2}.$$

Mais on se souvient qu'au point (x, y, z) répondant à cette valeur de z , la trace sur le plan xy du plan tangent à la surface S n'a pas pour coefficient angulaire ε , mais bien $-\varepsilon$. Il s'ensuit qu'en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées courantes, les génératrices de la surface S possèdent les équations

$$(11) \quad \zeta = z, \quad \eta - y = -\varepsilon(\xi - x)$$

ou en remplaçant x, y, z par leurs valeurs

$$\zeta = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2},$$

$$\eta - \beta = \frac{\delta - \beta}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2} = -\varepsilon \left(\xi - \alpha - \frac{\gamma - \alpha}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2} \right)$$

ou

$$\eta = -\varepsilon \xi + \beta + \varepsilon \alpha + \frac{(\delta - \beta)(1 - \gamma_1 + \varepsilon \gamma_2)}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2} + \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha)(1 - \gamma_1 + \varepsilon \gamma_2)}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2}.$$

Enfin les équations (11) prennent la forme

$$(11^a) \left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \varepsilon \gamma_2} \\ \eta = -\varepsilon \xi + \beta + \varepsilon \alpha + \frac{(\delta - \beta)(1 - \gamma_1) + (\alpha - \gamma)\gamma_2}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2} + \\ + \varepsilon \frac{(\delta - \beta)\gamma_2 + (\gamma - \alpha)(1 - \gamma_1)}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2} \end{array} \right.$$

Elles expriment indifféremment les deux séries de génératrices, suivant qu'on attribue à ε la valeur $+i$ ou $-i$.

La tangente.

Par analogie, on appellera tangente à la courbe

$$\eta = f(\xi)$$

au point (x, y) la droite imaginaire

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x).$$

Or

$$x = \alpha + \beta i, \quad y = \gamma + \delta i,$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\gamma + \delta i)}{d(\alpha + \beta i)} = \frac{d\gamma}{d(\alpha + \beta i)} + i \frac{d\delta}{d(\alpha + \beta i)} = \\ &= \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + i \frac{\partial \delta}{\partial \alpha} = \gamma_1 - i \gamma_2, \end{aligned}$$

ensorte que l'équation de la tangente prend la forme

$$\eta - \gamma - \delta i = (\gamma_1 - i \gamma_2) (\xi - \alpha - \beta i)$$

ou

$$(12) (\gamma_1 - i \gamma_2) \xi - \eta + (\gamma - \alpha \gamma_1 - \beta \gamma_2) + i(\delta + \alpha \gamma_2 - \beta \gamma_1) = 0.$$

Traduite en géométrie, cette équation conduit, comme on sait, à une congruence linéaire ayant deux droites consécutives communes avec la congruence qui est le représentant géométrique

de la courbe imaginaire $\eta = f(\xi)$. On obtient les directrices de la tangente imaginaire (12) en faisant dans les formules (4), p. 6, à savoir

$$\zeta = \frac{Cp + Dq + \varepsilon(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, \quad \eta = \varepsilon\xi + \frac{Eq - Fp + \varepsilon(Ep + Fq)}{p^2 + q^2}$$

les substitutions suivantes

$$\begin{aligned} A &= \gamma_1, & B &= -\gamma_2, & C &= -1, & D &= 0, \\ E &= \gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2, & F &= \delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1, \\ p &= A + C = \gamma_1 - 1, & q &= B + D = -\gamma_2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} (13) \quad \zeta &= \frac{-(\gamma_1 - 1) - \varepsilon\gamma_2}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2} = \frac{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2}{(1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2)(1 - \gamma_1 + \varepsilon\gamma_2)} = \frac{1}{1 - \gamma_1 + \varepsilon\gamma_2} \\ \eta &= \varepsilon\xi + \frac{-(\gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2)\gamma_2 - (\delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1)(\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2} + \\ &+ \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2)(\gamma_1 - 1) - (\delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1)\gamma_2}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2}. \end{aligned}$$

Après quelques réductions, cette dernière équation devient

$$\begin{aligned} (14) \quad \eta &= \varepsilon\xi + \beta - \varepsilon\alpha + \frac{(\delta - \beta)(1 - \gamma_1) + (\alpha - \gamma)\gamma_2}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2} - \\ &- \varepsilon \frac{(\delta - \beta)\gamma_2 + (\gamma - \alpha)(1 - \gamma_1)}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2}. \end{aligned}$$

En comparant les équations (13) et (14) avec les équations (11^a) on reconnaît que les directrices de la tangente (12) ne sont autres que les génératrices de la surface S dont il a été question jusqu'ici. Par conséquent, lorsque la tangente varie, ses directrices engendrent cette même surface.

Dans le cas particulier où $\gamma_2 = 0$, les deux valeurs de ζ coïncident et deviennent réelles. La tangente (12) prend la forme

$$(15) \quad \gamma_1\xi - \eta + (\gamma - \alpha\gamma_1) + i(\delta - \beta\gamma_1) = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette congruence étant réel, les droites qui en font partie forment une gerbe dont le centre est donné par les formules (5), p. 7, à savoir

$$\xi = -\frac{CE + DF}{C^2 + D^2} \zeta, \quad \eta = -\frac{CF - DE}{C^2 + D^2} \zeta, \quad \zeta = \frac{C}{A + C}.$$

Or, dans le cas actuel

$$A = \gamma_1, \quad C = -1, \quad D = 0, \quad E = \gamma - \alpha\gamma_1, \quad F = \delta - \beta\gamma_1,$$

puis

$$\zeta = \frac{1}{1 - \gamma_1}, \quad \xi = \frac{\gamma - \alpha\gamma_1}{1 - \gamma_1}, \quad \eta = \frac{\delta - \beta\gamma_1}{1 - \gamma_1}.$$

Ce sont là précisément les formules (10^a). Il s'ensuit que le lieu géométrique des centres des tangentes à la courbe imaginaire $\eta = f(\xi)$ qui répondent à l'hypothèse $\gamma_2 = 0$, est identique à l'intersection réelle des deux surfaces cylindriques imaginaires (10).

La courbe définie par les formules (10^a) est encore susceptible d'une autre interprétation importante. En effet, lorsque le point (α, β) du plan inférieur est assujéti à se mouvoir sur une courbe $F(\alpha, \beta) = 0$, les droites appartenant à la congruence (1) engendrent une surface réglée dont l'une quelconque des sections parallèles au plan xy se détermine au moyen des formules

$$(16) \quad \begin{cases} z = \text{const.} \\ x = \alpha(1 - z) + \gamma z \\ y = \beta(1 - z) + \delta z \end{cases}$$

La tangente au point (x', y', z) à cette courbe est donnée par les équations

$$\eta - y' = \frac{d\beta(1 - z) + (\delta_1 d\alpha + \delta_2 d\beta)z}{d\alpha(1 - z) + (\gamma_1 d\alpha + \gamma_2 d\beta)z} (\xi - x'), \quad \zeta = z$$

qui en vertu des relations

$$\delta_2 = \gamma_1, \quad \delta_1 = -\gamma_2$$

peuvent s'écrire

$$(17) \quad \eta - y' = \frac{\frac{d\beta}{d\alpha} [1 + (\gamma_1 - 1)z] - \gamma_2 z}{1 + (\gamma_1 - 1)z + \frac{d\beta}{d\alpha} \gamma_2 z} (\xi - x'), \quad \zeta = z$$

Dans le plan de la courbe se trouve une génératrice de la surface S , à savoir

$$(18) \quad \zeta = z, \quad \eta - y_0 = i(\xi - x_0).$$

Est-il possible que la tangente (17) devienne identique à cette génératrice? Telle est la question qui se présente naturellement

à l'esprit. La réponse est affirmative pour tous les cas où l'équation $\gamma_2 = 0$ est satisfaite par des valeurs réelles de α et β .

D'abord de la condition

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha} [1 + (\gamma_1 - 1)z] - \gamma_2 z}{1 + (\gamma_1 - 1)z + \frac{d\beta}{d\alpha} \gamma_2 z} = i$$

on tire

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{i [1 + (\gamma_1 - 1)z] + \gamma_2 z}{1 + (\gamma_1 - 1)z - i\gamma_2 z} = i.$$

Ensuite, pour que le point (x_0, y_0, z) appartienne à la surface S, il faut que l'on ait

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1 - i\gamma_2}$$

ou

$$(19) \quad 1 - \gamma_1 - i\gamma_2 = \frac{1}{z}.$$

Dans cette équation, z doit être réel et différent de zéro; par conséquent elle se décompose en ces deux

$$\gamma_2 = 0, \quad 1 - \gamma_1 = \frac{1}{z},$$

desquelles on déduit les valeurs réelles

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0.$$

Or, il est évident que l'équation linéaire

$$(20) \quad \beta - \beta_0 = i(\alpha - \alpha_0)$$

est compatible avec la condition (19); en même temps elle fournit $\frac{d\beta}{d\alpha} = i$.

Le point (x_0, y_0, z) est maintenant déterminé; en appelant γ_0, δ_0 les valeurs que prennent respectivement γ et δ pour $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$, on a en effet

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_0 (1 - z) + \gamma_0 z \\ y_0 = \beta_0 (1 - z) + \delta_0 z, \end{cases}$$

La génératrice (18) peut être considérée comme étant l'image dans le plan $z = \text{const.}$ de la droite imaginaire (20). En suppo-

sant pour un instant l'identité des droites (17) et (18), il s'ensuit que de son côté le point de contact (x', y', z) de la tangente (17) est l'image du point (α', β') satisfaisant simultanément aux équations

$$\begin{aligned} F(\alpha', \beta') &= 0 \\ \beta' - \beta_0 &= i(\alpha' - \alpha_0). \end{aligned}$$

Soient γ', δ' les valeurs de γ et δ correspondant à $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$. Alors on a, puisque le point (x', y', z) appartient non-seulement à la courbe (16), mais aussi à la surface S

$$\begin{cases} x' = \alpha'(1 - z) + \gamma'z \\ y' = \beta'(1 - z) + \delta'z \end{cases}$$

Afin de démontrer *a posteriori* que les valeurs x_0, y_0, x', y' trouvées de la façon indiquée rendent effectivement identiques les droites (17) et (18), il suffit de prouver que le point (x_0, y_0, z) fait partie de la tangente (17), en d'autres termes, on doit avoir

$$\frac{y_0 - y'}{x_0 - x'} = i.$$

Or, de l'équation

$$\gamma + \delta i = f(\alpha + \beta i)$$

il suit, par hypothèse,

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \delta_0 i &= f(\alpha_0 + \beta_0 i) \\ \gamma' + \delta' i &= f(\alpha' + \beta' i). \end{aligned}$$

Remplaçant dans cette dernière égalité β' par sa valeur, à savoir

$$\beta' = \beta_0 + i(\alpha' - \alpha_0)$$

il vient

$$\gamma' + \delta' i = f(\alpha' + i\beta_0 - \alpha' + \alpha_0) = f(\alpha_0 + \beta_0 i) = \gamma_0 + \delta_0 i.$$

Par conséquent

$$\gamma' = \gamma_0, \quad \delta' = \delta_0$$

et puis

$$\begin{aligned} \frac{y_0 - y'}{x_0 - x'} &= \frac{\beta_0(1 - z) + \delta_0 z - [\beta_0 + i(\alpha' - \alpha_0)](1 - z) - \delta_0 z}{\alpha_0(1 - z) + \gamma_0 z - \alpha'(1 - z) - \gamma_0 z} = \\ &= \frac{i(\alpha_0 - \alpha')(1 - z)}{(\alpha_0 - \alpha')(1 - z)} = i. \end{aligned}$$

Ainsi, l'identité des droites (17) et (18) est bien établie.

Partant de l'égalité

$$\gamma - \delta i = f(\alpha - \beta i)$$

que l'on obtient en substituant les expressions conjuguées à toutes les quantités imaginaires entrant dans l'équation

$$\gamma + \delta i = f(\alpha + \beta i);$$

on vérifierait de même l'identité des droites

$$\eta - y' = -i(\xi - x''), \quad \zeta = z$$

$$\eta - y_0 = -i(\xi - x_0), \quad \zeta = z,$$

où x'' et y'' signifient les valeurs conjuguées respectivement de x' et y' .

Les génératrices de la surface S

$$\eta - y_0 = \pm i(\xi - x_0), \quad \zeta = z$$

se rencontrent au point réel

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad \zeta = z.$$

Celui-ci est par conséquent un foyer de la courbe (16). La fonction $F(\alpha, \beta)$ est arbitraire, et par suite l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$ donne naissance à une infinité de surfaces réglées. Or, le point (x_0, y_0, z) est indépendant de la fonction F . Il en résulte que *les sections faites dans ces surfaces par le plan $z = c$, où c est une constante différente de zéro, possèdent toutes le foyer commun (x_0, y_0, z) .*

De plus, lorsque z varie, le foyer (x_0, y_0, z) décrit en général une courbe gauche qui n'est autre que l'intersection réelle des deux nappes de la surface S, c'est-à-dire la courbe représentée par les formules (10^a).

Comme exemple à l'appui de ces généralités sur les courbes imaginaires, il ne sera pas inutile d'étudier quelques courbes particulières. Les courbes choisies sont trois courbes spéciales du second degré.

La parabole.

Soit l'équation de la courbe à étudier

$$(1) \quad \xi^2 = 2p\eta,$$

où p signifie une constante réelle. Puisque

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{p}$$

le rapport des éléments linéaires aux points correspondants η et ξ est égal à la valeur absolue de $\frac{\xi}{p}$ et l'élément $d\eta$ fait avec l'élément $d\xi$ un angle qui est égal à la déviation de $\frac{\xi}{p}$. Entre le plan supérieur et le plan inférieur la similitude dans les parties infiniment petites règne partout, à l'exception des points $\xi = 0$ et $\xi = \infty$. Posant

$$\xi = x + yi, \quad \eta = X + Yi,$$

l'équation (1) devient

$$(x + yi)^2 = 2p (X + Yi),$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad \begin{cases} 2pX = x^2 - y^2 \\ 2pY = 2xy. \end{cases}$$

Ces relations montrent qu'à des lignes droites parallèles aux axes coordonnés dans le plan supérieur correspondent dans le plan inférieur des hyperboles équilatères qui, en vertu de la similitude dans les parties infiniment petites, se coupent sous un angle droit. Deux quelconques de ces courbes orthogonales se coupent en deux points réels. Il s'ensuit qu'à chaque point du plan supérieur correspondent en général deux points du plan inférieur, symétriques par rapport au centre O. La même chose ressort directement de l'équation (1) ou des formules

$$\begin{cases} x = \sqrt{p} \sqrt{X + \sqrt{X^2 + Y^2}} \\ y = \sqrt{p} \sqrt{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}} \end{cases}$$

déduites des équations (2).

Soit

$$y = x \operatorname{tg} \mu,$$

alors on a

$$\begin{cases} 2pX = (1 - \operatorname{tg}^2 \mu) x^2 \\ 2pY = 2 \operatorname{tg} \mu x^2, \end{cases}$$

puis

$$\frac{Y}{X} = \frac{2 \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg}^2 \mu} = \operatorname{tg} 2\mu.$$

Par conséquent, lorsque le point ξ parcourt la droite $y = x \operatorname{tg} \mu$, son image η décrit cette autre droite $Y = X \operatorname{tg} 2\mu$. Mais tandis

que le point ξ se meut sur la droite entière, le point η est restreint à un rayon partant de l'origine.

Afin de faciliter le langage, ces droites seront désignées dans la suite respectivement par μ et 2μ .

Si l'on pose

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

il suit

$$\begin{cases} X = \frac{r^2}{2p} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi \\ Y = \frac{r^2}{2p} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi \end{cases}$$

Il s'ensuit que lorsque le point ξ parcourt une fois la circonférence de rayon r

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

η décrit deux fois la circonférence de rayon $\frac{r^2}{2p}$

$$X^2 + Y^2 = \frac{r^4}{4p^2}.$$

Ceci établi, il serait facile de construire des points correspondants. En effet, si l'on projette comme précédemment le plan supérieur sur le plan inférieur, la figure (3) montre la position relative d'un point (X, Y) et des deux points correspondants (x, y) et $(-x, -y)$.

La correspondance entre les points des deux plans est parfaitement établie, si l'on donne par exemple un point B' sur la droite 2μ et les points correspondants B et B_1 sur la droite μ . Or, pour construire tous les points correspondants situés sur les droites μ et 2μ , on peut procéder de la manière suivante (fig. 4). Sur la droite μ se trouve une involution $AA_1, BB_1, CC_1, \text{etc.}$, dont les points doubles sont l'origine et le point à l'infini. D'un point S sur une circonférence quelconque dans le plan, on la projette sur celle-ci. Par là on détermine une involution curviligne dont le pôle P est le point d'intersection des sécantes joignant les couples de points conjugués. Le faisceau formé par les sécantes est projectif avec la ponctuelle simple $A', B', C', \text{etc.}$, sur la droite 2μ . En le coupant par une droite quelconque, on est en présence de deux ponctuelles projectives A'', B'', C'', \dots ,

$A', B', C' \dots$ et dès lors il est facile de construire autant de points correspondants que l'on voudra.

Si maintenant on demandait de construire les points D et D_1 , correspondant au point donné D' , on chercherait d'abord D'' ; ce point trouvé, on aurait la sécante PD'' , d'où l'on remonterait aisément aux points cherchés. Dans la figure (4), on s'est servi des points doubles de l'involution AA_1, BB_1, \dots pour déterminer le pôle P , ce qui simplifie un peu les opérations.

La construction indiquée est encore utile, lorsque le point donné E' n'appartient pas à la droite 2μ . En effet, dans ce cas, on mènera la droite OE' ; alors les points E et E_1 seront situés sur la bissectrice de l'angle $E'OX$. Pour les trouver, il suffit de transporter le point E' sur la droite 2μ , moyennant un arc de cercle dont le centre est O et le rayon OE' , de construire sur la droite μ les points correspondants et de les ramener ensuite à leur place.

Cette construction deviendra en partie superflue, quand on connaîtra l'enveloppe des droites joignant les points de la droite μ aux points correspondants de la droite 2μ . A cet effet, soient

$$x \text{ et } y = x \operatorname{tg} \mu$$

les coordonnées d'un point quelconque de la droite μ ; les coordonnées du point correspondant de la droite 2μ seront

$$X = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}{2p} x^2, \quad Y = \frac{\operatorname{tg} \mu}{p} x^2$$

et la droite, déterminée par ces points, aura pour équation

$$\eta - y = \frac{Y - y}{X - x} (\xi - x)$$

ou

$$(3) \quad x^2 \sin \mu + x \cos \mu (\eta \cos 2\mu - \xi \sin 2\mu) + 2p \cos^2 \mu (\xi \sin \mu - \eta \cos \mu) = 0.$$

En la différentiant par rapport à x

$$(3^a) \quad 2x \sin \mu + \cos \mu (\eta \cos 2\mu - \xi \sin 2\mu) = 0$$

et en éliminant ensuite x entre les équations (3) et (3^a), il vient

$$(4) \quad (\xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu)^2 = 8p \sin \mu (\xi \sin \mu - \eta \cos \mu).$$

Telle est l'enveloppe des droites (3). Si, dans cette équation, on

regarde μ comme variable, elle représente un système de paraboles. Par la transformation à l'aide des formules

$$\begin{cases} \xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu = Y + 2p \sin 2\mu \\ \xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\mu = X + 2p \cos^2 \mu, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \xi = (X + 2p \cos^2 \mu) \cos 2\mu + (Y + 2p \sin 2\mu) \sin 2\mu \\ \eta = (X + 2p \cos^2 \mu) \sin 2\mu - (Y + 2p \sin 2\mu) \cos 2\mu \end{cases}$$

l'équation (4) prend la forme

$$Y^2 = -8p \sin^2 \mu X$$

Cette équation montre que les coordonnées du foyer de l'une quelconque des paraboles sont

$$Y = 0, \quad X = -2p \sin^2 \mu$$

et que sa directrice possède l'équation

$$X = 2p \sin^2 \mu.$$

Au moyen des coordonnées ξ, η , le foyer est donné par

$$\xi = 2p, \quad \eta = 0$$

et la directrice par l'équation

$$\xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\mu = 2p.$$

Il s'ensuit que toutes ces paraboles ont un foyer commun et que leurs directrices enveloppent une circonférence dont l'origine est le centre et le rayon $= 2p$ (voir fig. 5). Elles passent toutes par l'origine, et en ce point la droite μ est une tangente à la courbe correspondante, tandis que la droite 2μ en est un diamètre. La construction de ces paraboles est donc des plus faciles. D'une propriété très connue de la parabole, ainsi que des formules

$$X = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}{2p} x^2, \quad Y = \frac{\operatorname{tg} \mu}{p} x^2$$

qui ne renferment x qu'au carré, on conclut qu'on aurait obtenu la même parabole en joignant le point (X, Y) au point $(-x, -y)$. Cette observation permet de construire facilement des points correspondants sur les droites μ et 2μ . En effet, pour trouver sur la droite μ les points A et A_1 correspondant à un point A' donné sur le diamètre 2μ , il suffit de mener par A' les deux

tangentes à la parabole; celles-ci couperont la droite μ aux deux points cherchés.

Cette construction devient illusoire lorsque $\mu = 0$ ou $\mu = \pi$, car dans ces cas la parabole se réduit à la droite $\eta = 0$. D'ailleurs, c'est sur cette droite que sont situés les points doubles du plan, à savoir l'origine et le foyer des paraboles. On trouve ces points caractéristiques en posant $\eta = \xi$ dans l'équation (1), ou $X = x$, $Y = y$ dans les équations (2), ce qui donne

$$\xi = 0; \quad \xi = 2p$$

ou

$$x = y = 0; \quad x = 2p, y = 0.$$

L'équation (4) est susceptible de la forme suivante

$$\begin{aligned} (\xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\mu - 2p)^2 &= (\xi - 2p)^2 + \eta^2 = \\ &= [\eta + i(\xi - 2p)] [\eta - i(\xi - 2p)] \end{aligned}$$

Cette forme prouve que les droites imaginaires $\eta = \pm i(\xi - 2p)$ sont des tangentes communes à toutes les paraboles en question. Il sera possible d'établir plus loin la connexion entre ces deux droites et les génératrices de la surface à deux nappes S répondant à la congruence (1).

Les droites de la congruence (1) qui joignent les points de la droite 2μ , remise dans le plan supérieur, aux points correspondants de la droite μ , engendrent une surface réglée, dont l'équation s'obtient en éliminant x entre les équations

$$\frac{\xi - x}{\frac{x^2}{2p}(1 - \operatorname{tg}^2 \mu) - x} = \frac{\eta - x \operatorname{tg} \mu}{\frac{x^2}{p} \operatorname{tg} \mu - x \operatorname{tg} \mu} = \zeta$$

ou

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta - x(1 - \zeta) \operatorname{tg} \mu &= \frac{x^2 \zeta}{p} \operatorname{tg} \mu \\ \xi - x(1 - \zeta) &= \frac{x^2 \zeta}{2p} (1 - \operatorname{tg}^2 \mu). \end{aligned} \right.$$

On trouve d'abord

$$\frac{\eta - x(1 - \zeta) \operatorname{tg} \mu}{\xi - x(1 - \zeta)} = \operatorname{tg} 2\mu,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu}{(1 - \zeta) \operatorname{tg} \mu}$$

et en introduisant cette valeur dans la première des équations (5)

$$(6) \quad 2p \sin \mu (\eta \cos \mu - \xi \sin \mu) (1 - \zeta)^2 = \zeta (\xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu)^2.$$

La surface du 3^me degré représentée par cette équation possède la génératrice double

$$\zeta = 1, \quad \xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu = 0.$$

La partie intéressante de son contour apparent sur le plan xy est la parabole (4), et l'on remarquera qu'on l'obtient en faisant dans l'équation (6) $\zeta = -1$. En d'autres termes, le cylindre tangent parallèle à l'axe des z touche la surface suivant une courbe située dans le plan $\zeta = -1$. La section déterminée dans la surface (6) par un plan parallèle au plan xy , est une parabole; or, on sait d'une manière générale que toutes ces courbes, répondant à différentes valeurs de μ , doivent avoir un foyer commun. En effet, ζ étant constant, on trouve que les coordonnées du foyer sont indépendantes de μ

$$(7) \quad \eta = 0, \quad \xi = -p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta}$$

et de plus, en mettant l'équation (6) sous la forme

$$\begin{aligned} \left[\xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\mu + p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta} \right]^2 &= \eta^2 + \left[\xi + p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta} \right]^2 = \\ &= \left\{ \eta + i \left[\xi + p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta} \right] \right\} \left\{ \eta - i \left[\xi + p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta} \right] \right\} \end{aligned}$$

on reconnaît que les droites

$$(8) \quad \eta = \pm i \left[\xi + p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta} \right]$$

sont tangentes à toutes ces courbes.

Maintenant, si l'on rend à ζ sa variabilité, le lieu géométrique des foyers (7) est l'hyperbole

$$(9) \quad \eta = 0, \quad 2\xi\zeta + p(1 - \zeta)^2 = 0.$$

Avant de constater, pour confirmer la théorie générale, que les droites (8) sont les génératrices de la surface S , et que l'hyperbole (9) est l'intersection réelle de ses deux nappes, il sera peut-être intéressant de chercher encore l'équation de la surface

réglée, engendrée par les droites qui joignent les points de la circonférence dans le plan supérieur

$$X = \frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi, \quad Y = \frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi$$

aux points correspondants de la circonférence dans le plan inférieur

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

On l'obtient en éliminant φ entre les équations

$$\frac{\xi - r \cos \varphi}{\frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi - r \cos \varphi} = \frac{\eta - r \sin \varphi}{\frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi - r \sin \varphi} = \zeta$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi - r \cos \varphi \right) \zeta = \xi - r \cos \varphi \quad \left| \begin{array}{l} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{array} \right. \\ \left(\frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi - r \sin \varphi \right) \zeta = \eta - r \sin \varphi \quad \left| \begin{array}{l} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Il vient successivement (les opérations nécessaires étant indiquées d'une manière généralement usitée

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\xi + \frac{r^2}{2p} \zeta \right) \sin \varphi - \eta \cos \varphi = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \xi - \frac{r^2}{2p} \zeta \\ -\eta \end{array} \right. \\ \eta \sin \varphi + \left(\xi - \frac{r^2}{2p} \zeta \right) \cos \varphi = r(1 - \zeta) \quad \left| \begin{array}{l} \eta \\ \xi + \frac{r^2}{2p} \zeta \end{array} \right. \end{array} \right.,$$

$$\left\{ \left[\left(\xi^2 - \frac{r^4}{4p^2} \zeta^2 \right) + \eta^2 \right] \sin \varphi = r(1 - \zeta) \eta \right.$$

$$\left. \left[\left(\xi^2 - \frac{r^4}{4p^2} \zeta^2 \right) + \eta^2 \right] \cos \varphi = r(1 - \zeta) \left(\xi + \frac{r^2}{2p} \zeta \right).$$

Elevant au carré et ajoutant terme par terme, on trouve finalement

$$(10) \quad \left[\left(\xi^2 - \frac{r^4}{4p^2} \zeta^2 \right) + \eta^2 \right]^2 = r^2 (1 - \zeta)^2 \left[\left(\xi + \frac{r^2}{2p} \zeta \right)^2 + \eta^2 \right].$$

Sans entrer dans une discussion détaillée, on peut cependant reconnaître immédiatement la propriété suivante de cette surface du 4^{me} ordre. Les sections parallèles au plan xy sont des

épicycloïdes engendrées par un point à la distance $\frac{\zeta r^2}{2p}$ du centre du cercle mobile; le cercle fixe et le cercle mobile étant d'ailleurs du même rayon $= \pm \frac{1}{2} r (1 - \zeta)$. Quelle que soit la valeur particulière de r , elles possèdent le foyer

$$\zeta = \zeta, \quad \eta = 0, \quad \xi = -p \frac{(1 - \zeta)^2}{2\zeta}.$$

Parmi ces courbes se trouvent la circonférence simple

$$\zeta = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

et la circonférence double

$$\zeta = 1, \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{r^4}{4p^2}.$$

Enfin il importe d'établir l'équation de la surface à deux nappes, à laquelle les droites de la congruence (1) sont tangentes doubles. A cet effet, il suffit, comme on sait, d'éliminer α et β entre les équations (10), p. 34, qui, dans le cas actuel, où

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2p}, & \delta &= \frac{\alpha\beta}{p}, \\ \gamma_1 &= \frac{\alpha}{p}, & \gamma_2 &= -\frac{\beta}{p} \end{aligned}$$

prennent la forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \frac{p}{p - \alpha + \varepsilon\beta} \\ \xi &= \alpha(1 - \zeta) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2p} \zeta \\ \eta &= \beta(1 - \zeta + \frac{\alpha}{p} \zeta). \end{aligned} \right.$$

La première et la dernière de ces équations fournissent

$$\begin{aligned} \beta &= \pm \sqrt{\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta}}, & \alpha &= \pm \varepsilon \sqrt{\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta}} - p \frac{1 - \zeta}{\zeta}, \\ \alpha^2 &= -\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta} \mp 2\varepsilon p \frac{1 - \zeta}{\zeta} \sqrt{\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta}} + p^2 \frac{(1 - \zeta)^2}{\zeta^2}. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans la seconde des équations (11), on obtient

$$(12) \quad \eta\zeta + \varepsilon \left[\xi\zeta + \frac{p(1-\zeta)^2}{2} \right] = 0.$$

Ainsi, les deux nappes de la surface cherchée ont pour équations .

$$\begin{cases} \eta\zeta + i \left[\xi\zeta + \frac{p(1-\zeta)^2}{2} \right] = 0 \\ \eta\zeta - i \left[\xi\zeta + \frac{p(1-\zeta)^2}{2} \right] = 0. \end{cases}$$

Elles se coupent effectivement suivant l'hyperbole réelle

$$\eta = 0, \quad \xi\zeta + \frac{p(1-\zeta)^2}{2} = 0$$

et leurs génératrices sont respectivement

$$\zeta = \text{const.}, \quad \eta = \pm i \left[\xi + \frac{p(1-\zeta)^2}{2\zeta} \right].$$

L'hyperbole équilatère.

Soit à représenter la courbe

$$(1) \quad \eta = \frac{a + bi}{\xi}.$$

Posant comme précédemment

$$\xi = x + yi, \quad \eta = X + Yi$$

et séparant les parties réelles et imaginaires, il vient

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{ax + by}{x^2 + y^2} \\ Y = \frac{bx - ay}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

et réciproquement

$$(2^a) \quad \begin{cases} x = \frac{aX + bY}{X^2 + Y^2} \\ y = \frac{bX - aY}{X^2 + Y^2} \end{cases}$$

Aux deux systèmes de droites $x = \text{const.}$ et $y = \text{const.}$ correspondent dans le plan supérieur deux systèmes de circonférences qui se coupent orthogonalement. Les courbes du premier système se touchent à l'origine, où elles ont la tangente commune $aX + bY = 0$, et leurs centres sont situés sur la droite $bX - aY = 0$. Les circonférences du second système possèdent à l'origine la tangente commune $bX - aY = 0$, et leurs centres se trouvent sur la droite $aX + bY = 0$. Si l'on projette encore le plan supérieur sur le plan inférieur, alors au point déterminé (x, y) correspond le point d'intersection (différent de l'origine) des deux circonférences correspondantes. Cette relation, d'ailleurs parfaitement symétrique, entre les deux plans permettrait de construire des points correspondants; mais il est facile de trouver une construction purement géométrique.

Les points doubles du plan s'obtiennent en identifiant ξ et η dans l'équation (1). Si l'on pose pour simplifier

$$\begin{cases} a = \rho \cos \nu \\ b = \rho \sin \nu \end{cases}$$

et partant

$$a + bi = \rho (\cos \nu + i \sin \nu) = \rho e^{i\nu},$$

on trouve

$$\xi = \pm \sqrt{\rho} e^{\frac{\nu i}{2}}.$$

Il existe par conséquent deux points doubles; leurs coordonnées sont

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\rho} \cos \frac{\nu}{2} \\ y = \pm \sqrt{\rho} \sin \frac{\nu}{2} \end{cases}$$

Lorsque le point inférieur se meut sur la ligne droite (μ)

$$y = x \operatorname{tg} \mu,$$

son image parcourt cette autre droite ($\nu - \mu$)

$$Y = X \operatorname{tg} (\nu - \mu)$$

et lorsque le point (x, y) décrit la circonférence

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

son image se meut également sur une circonférence, à savoir

$$\begin{array}{l} X = \frac{\rho}{r} \cos (\nu - \varphi) \\ Y = \frac{\rho}{r} \sin (\nu - \varphi) \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{ou } X^2 + Y^2 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2. \end{array} \right.$$

La correspondance entre les points des droites μ et $(\nu - \mu)$ est uniforme; en d'autres termes, les ponctuelles μ et $(\nu - \mu)$ sont projectives. Pour établir cette projectivité, il suffit d'une seule couple de points, car à l'origine, considérée comme appartenant à l'une des droites, correspond chaque fois le point à l'infini de l'autre droite. De cette façon, on connaît trois couples de points correspondants, ce qui permet de résoudre le problème suivant: Etant donné sur la droite μ le point D, construire sur la droite $(\nu - \mu)$ le correspondant D', et, dans le cas actuel, la construction est très simple. En effet, si la couple donnée est CC', la parallèle à DC', menée par le point C, détermine sur la droite $(\nu - \mu)$ le point cherché D'. (Voir fig. 6.)

La droite joignant les points correspondants (x, y) et (X, Y) des droites μ et $(\nu - \mu)$ a pour équation

$$(3) \quad \rho \cos^2 \mu [\eta \cos (\nu - \mu) - \xi \sin (\nu - \mu)] + x \rho \cos \mu \sin (\nu - 2\mu) + x^2 (\xi \sin \mu - \eta \cos \mu) = 0,$$

dans laquelle x est envisagé comme un paramètre variable: Elle enveloppe l'hyperbole

$$(4) \quad \xi^2 \sin \mu \sin (\mu - \nu) + \xi \eta \sin \nu - \eta^2 \cos \mu \cos (\mu - \nu) = \frac{1}{4} \rho \sin^2 (\nu - 2\mu)$$

qui dans cette équation est rapportée à son centre et dont les asymptotes sont les droites $\eta = \xi \operatorname{tg} (\nu - \mu)$ et $\eta = \xi \operatorname{tg} \mu$. Lorsque $\mu = \frac{1}{2} \nu$, les deux asymptotes coïncident et la courbe se confond avec la droite $\eta = \xi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu$.

En transformant l'équation (4) à l'aide des formules

$$\begin{cases} \xi = x \cos \frac{1}{2} \nu - y \sin \frac{1}{2} \nu \\ \eta = x \sin \frac{1}{2} \nu + y \cos \frac{1}{2} \nu \end{cases}$$

elle prend la forme

$$\frac{x^2}{\rho \cos^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \nu \right)} - \frac{y^2}{\rho \sin^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \nu \right)} = 1.$$

Il s'ensuit que les axes de l'hyperbole sont respectivement

$$\sqrt{\rho} \cos \left(\mu - \frac{\nu}{2} \right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\rho} \sin \left(\mu - \frac{\nu}{2} \right)$$

et que, μ signifiant maintenant un paramètre variable, toutes ces hyperboles sont homofocales. L'excentricité étant $=\sqrt{\rho}$, les foyers communs sont encore les points doubles du plan. D'ailleurs, on vérifie aisément que l'équation (4) peut s'écrire des deux manières suivantes

$$\begin{aligned} & \left[\xi \cos \frac{1}{2} \nu + \eta \sin \frac{1}{2} \nu - \sqrt{\rho} \cos^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \nu \right) \right]^2 = \\ & = \cos^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \nu \right) \left[\left(\xi - \sqrt{\rho} \cos \frac{1}{2} \nu \right)^2 + \left(\eta - \sqrt{\rho} \sin \frac{1}{2} \nu \right)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\xi \cos \frac{1}{2} \nu + \eta \sin \frac{1}{2} \nu + \sqrt{\rho} \cos^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \nu \right) \right]^2 = \\ & = \cos^2 \left(\mu - \frac{1}{2} \nu \right) \left[\left(\xi + \sqrt{\rho} \cos \frac{1}{2} \nu \right)^2 + \left(\eta + \sqrt{\rho} \sin \frac{1}{2} \nu \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

De ces deux équations ressort de nouveau la propriété déjà citée des hyperboles en question; de plus, elles font voir que ces courbes possèdent les quatre tangentes communes

$$\eta \mp \sqrt{\rho} \sin \frac{1}{2} \nu = \pm i \left(\xi \mp \sqrt{\rho} \cos \frac{1}{2} \nu \right).$$

Afin de trouver aussi l'enveloppe de la droite

$$(5) \quad \eta - r \sin \varphi = \frac{\rho \sin (\nu - \varphi) - r^2 \sin \varphi}{\rho \cos (\nu - \varphi) - r^2 \cos \varphi} (\xi - r \cos \varphi)$$

qui joint les points correspondants

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{\rho}{r} \cos (\nu - \varphi) \\ Y = \frac{\rho}{r} \sin (\nu - \varphi) \end{array} \right.$$

où φ est considéré comme variable et r comme constant, on pourrait éliminer φ entre l'équation (5) mise sous la forme

$$(5^a) \quad \eta[\rho \cos(\nu - \varphi) - r^2 \cos \varphi] - \xi[\rho \sin(\nu - \varphi) - r^2 \sin \varphi] = \\ = r\rho \sin(2\varphi - \nu)$$

et celle qu'on en déduit en la différentiant par rapport à φ

$$(6) \quad \eta[\rho \sin(\nu - \varphi) + r^2 \sin \varphi] + \xi[\rho \cos(\nu - \varphi) + r^2 \cos \varphi] = \\ = 2r\rho \cos(2\varphi - \nu).$$

Mais les calculs nécessaires pour opérer cette élimination seraient longs et manqueraient de symétrie, de sorte qu'il vaut mieux résoudre les deux dernières équations par rapport à ξ et η . Toute réduction faite, on trouve pour l'enveloppe cherchée

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\rho^2 - r^4}{r\rho} \xi &= \frac{3}{2} \rho \cos \varphi + \frac{1}{2} \rho \cos(3\varphi - 2\nu) - \frac{1}{2} r^2 \cos(3\varphi - \nu) - \\ &\quad - \frac{3}{2} r^2 \cos(\varphi - \nu) \\ \frac{\rho^2 - r^4}{r\rho} \eta &= \frac{3}{2} \rho \sin \varphi - \frac{1}{2} \rho \sin(3\varphi - 2\nu) - \frac{1}{2} r^2 \sin(3\varphi - \nu) + \\ &\quad + \frac{3}{2} r^2 \sin(\varphi - \nu) \end{aligned} \right.$$

Afin de reconnaître la nature de cette courbe, on transforme ces équations au moyen des formules

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \xi \cos \frac{1}{2} \nu + \eta \sin \frac{1}{2} \nu \\ y &= -\xi \sin \frac{1}{2} \nu + \eta \cos \frac{1}{2} \nu. \end{aligned} \right.$$

Posant ensuite $\varphi - \frac{1}{2} \nu = \psi$, on obtient finalement

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 2 \frac{r\rho}{\rho + r^2} \cos^3 \psi \\ y &= 2 \frac{r\rho}{\rho - r^2} \sin^3 \psi. \end{aligned} \right.$$

Ce sont là les équations de la développée d'une ellipse. En effet, on sait que la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est donnée par les formules

$$\begin{cases} x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \psi \\ y = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \psi. \end{cases}$$

Or, il y a identité entre cette courbe et la courbe trouvée, si a et b satisfont aux équations

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{2r\rho}{\rho + r^2} = \frac{a^2 - b^2}{a} \\ \frac{2r\rho}{\rho - r^2} = -\frac{a^2 - b^2}{b} \end{cases}$$

sous la condition $\rho < r^2$. Mais en remplaçant ψ par $-\psi$, c'est-à-dire en comptant l'angle ψ en sens inverse, on voit que dans le cas où $\rho > r^2$, il suffit de substituer à la seconde des équations (8) la suivante

$$\frac{2r\rho}{r^2 - \rho} = -\frac{a^2 - b^2}{b}$$

pour obtenir une valeur positive de b . On en conclut que les ellipses en question et par conséquent aussi leurs développées (7) sont les mêmes pour $r^2 > \rho$ et $r^2 < \rho$. Lorsque $r^2 = \rho$, le petit axe de l'ellipse se réduit à zéro. Dans cette hypothèse, les points (x, y) et (X, Y) se meuvent sur la même circonférence passant par les points doubles du plan et les droites (5) dont on a cherché l'enveloppe, sont parallèles.

Des équations (8) on tire

$$a = \frac{r^2 + \rho}{2r}, \quad b = \frac{r^2 - \rho}{2r},$$

puis

$$a^2 - b^2 = \rho$$

Il s'ensuit que les ellipses dont les courbes (7) représentent les développées sont homofocales, et que leurs foyers sont les points doubles du plan.

On pourrait établir maintenant l'équation de la surface S , à laquelle les droites de la congruence (1) sont tangentes doubles. Mais comme cette surface est imaginaire, elle offre peu d'intérêt. Il n'en est pas de même des courbes réelles suivant lesquelles

ses deux nappes se coupent. Pour les trouver, on part des formules (2), après y avoir remplacé X, Y par γ, δ , et x, y par α, β , afin de les mettre en harmonie avec la théorie générale :

$$\begin{cases} \gamma = \frac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \rho \frac{\alpha \cos \nu + \beta \sin \nu}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \delta = \frac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \rho \frac{\alpha \sin \nu - \beta \cos \nu}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

On en tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \gamma_1 &= \rho \frac{(\beta^2 - \alpha^2) \cos \nu - 2\alpha\beta \sin \nu}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \gamma_2 &= \rho \frac{(\alpha^2 - \beta^2) \sin \nu - 2\alpha\beta \cos \nu}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \end{aligned}$$

Or, γ_2 s'annule lorsque

$$(\alpha^2 - \beta^2) \sin \nu - 2\alpha\beta \cos \nu = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad &\text{pour } \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu \\ 2^\circ \quad &» \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \nu. \end{aligned}$$

Si donc le point (α, β) se meut sur l'une ou l'autre des droites

$$(9) \quad \begin{cases} \beta = \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu \\ \beta = -\alpha \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \nu \end{cases}$$

les droites de la congruence (1) enveloppent une courbe plane dont les équations s'obtiennent en éliminant α et β entre les équations

$$(10) \quad \begin{cases} \zeta = \frac{1}{1 - \gamma_1} \\ \xi = \alpha (1 - \zeta) + \gamma \zeta \\ \eta = \beta (1 - \zeta) + \delta \zeta \end{cases}$$

tout en tenant compte des relations (9). On trouve moyennant la première des équations (10)

$$1^{\circ} \text{ pour } \beta = \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu$$

$$\alpha = \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho \zeta}{1-\zeta}}$$

$$\beta = \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho \zeta}{1-\zeta}}$$

$$\gamma = \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho(1-\zeta)}{\zeta}}$$

$$\delta = \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho(1-\zeta)}{\zeta}}$$

$$2^{\circ} \text{ pour } \beta = -\alpha \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \nu$$

$$\alpha = \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho \zeta}{\zeta-1}}$$

$$\beta = -\cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho \zeta}{\zeta-1}}$$

$$\gamma = -\sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho(\zeta-1)}{\zeta}}$$

$$\delta = \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\frac{\rho(\zeta-1)}{\zeta}}$$

et on remarquera que les premières formules répondent au cas où $\zeta < 1$, et les secondes au cas où $\zeta > 1$. Les deux autres des équations (10) fournissent ensuite

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \xi = 2 \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho \zeta (1-\zeta)} \\ \eta = 2 \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho \zeta (1-\zeta)} \end{array} \right. \quad (11^a) \left\{ \begin{array}{l} \xi = -2 \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho \zeta (\zeta-1)} \\ \eta = 2 \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho \zeta (\zeta-1)} \end{array} \right.$$

Les enveloppes cherchées sont ainsi

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ l'ellipse} \\ \frac{\xi^2}{4\rho \cos^2 \frac{1}{2} \nu} + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{\eta^2}{4\rho \sin^2 \frac{1}{2} \nu} + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ \eta = \xi \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu \end{array} \right. \quad (12^a) \left\{ \begin{array}{l} \text{et } 2^{\circ} \text{ l'hyperbole} \\ \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\xi^2}{4\rho \sin^2 \frac{1}{2} \nu} = \frac{1}{4} \\ \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\eta^2}{4\rho \cos^2 \frac{1}{2} \nu} = \frac{1}{4} \\ \eta = -\xi \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \nu. \end{array} \right.$$

Lorsque le point (α, β) est assujéti à rester sur la courbe quelconque $F(\alpha, \beta) = 0$, les droites de la congruence engendrent une surface réglée. Or, on se souviendra que la section faite par le plan $\zeta = \text{const.}$ dans cette surface, possède des foyers dont les coordonnées sont données par les formules (11) et (11^a), et que le lieu géométrique de ces foyers, ζ étant considéré comme va-

riable, est précisément soit l'ellipse, soit l'hyperbole qui viennent d'être trouvées. On vérifiera ce fait dans deux cas qui se distinguent par leur simplicité.

Premier cas. Le point (α, β) se meut sur la droite

$$\beta = \alpha \operatorname{tg} \mu,$$

son image dans le plan $\zeta = 1$ sur la droite

$$\delta = \gamma \operatorname{tg} (\nu - \mu).$$

Les génératrices de la surface correspondante ont alors pour équations

$$\frac{\xi - \alpha}{\frac{a + b \operatorname{tg} \mu}{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \alpha} - \alpha} = \frac{\eta - \alpha \operatorname{tg} \mu}{\frac{b - a \operatorname{tg} \mu}{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \alpha} - \alpha \operatorname{tg} \mu} = \zeta$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \alpha (1 - \zeta) + \rho \zeta \frac{\cos (\nu - \mu) \cos \mu}{\alpha} \\ \eta = \alpha (1 - \zeta) \operatorname{tg} \mu + \rho \zeta \frac{\sin (\nu - \mu) \cos \mu}{\alpha} \end{array} \right.$$

En éliminant α entre ces deux équations, il vient

$$(13) \quad (\xi \sin \mu - \eta \cos \mu) [\xi \sin (\nu - \mu) - \eta \cos (\nu - \mu)] = \\ = \rho \zeta (\zeta - 1) \sin^2 (2\mu - \nu).$$

C'est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Si on la transforme encore à l'aide des formules

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x \cos \frac{1}{2} \nu - y \sin \frac{1}{2} \nu \\ \eta = x \sin \frac{1}{2} \nu + y \cos \frac{1}{2} \nu \end{array} \right.$$

elle prend la forme plus simple

$$\frac{x^2}{4\rho\zeta(1-\zeta)\cos^2(\mu - \frac{1}{2}\nu)} - \frac{y^2}{4\rho\zeta(1-\zeta)\sin^2(\mu - \frac{1}{2}\nu)} = 1$$

et qui permet de reconnaître que la section de la surface déterminée par le plan $\zeta = \text{const.}$ est une hyperbole ayant pour foyers les points

$$\zeta = \text{const.}, \quad y = 0, \quad x = \pm 2 \sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)}$$

ou $\zeta = \text{const.}$, $y = \pm 2 \sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)}$, $x = 0$,

suivant que ζ est plus petit ou plus grand que l'unité. Exprimées en ξ, η , les coordonnées des foyers deviennent

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } \zeta < 1: \\ \zeta = \text{const.} \\ \xi = \pm 2 \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)} \\ \eta = \pm 2 \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)} \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \text{pour } \zeta > 1: \\ \zeta = \text{const.} \\ \xi = \mp 2 \sin \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)} \\ \eta = \pm 2 \cos \frac{1}{2} \nu \sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)} \end{array} \right.$$

et ce sont bien là les formules (11) et (11^a). On peut remarquer encore que l'hyperbole (4) est le contour apparent sur le plan xy de l'hyperboloïde (13).

Deuxième cas. Le point (α, β) se meut sur la circonférence

$$\alpha = r \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \varphi$$

et par conséquent son image sur la circonférence

$$\gamma = \frac{\rho}{r} \cos(\nu - \varphi), \quad \delta = \frac{\rho}{r} \sin(\nu - \varphi).$$

Dans ce cas, les génératrices de la surface réglée sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \cos \varphi [r(1-\zeta) + \zeta \frac{\rho}{r} \cos \nu] + \sin \varphi \zeta \frac{\rho}{r} \sin \nu \\ \eta = \cos \varphi \zeta \frac{\rho}{r} \sin \nu + \sin \varphi [r(1-\zeta) - \zeta \frac{\rho}{r} \cos \nu] \end{array} \right.$$

et l'élimination de φ entre elles fournit

$$(15) \quad (\xi^2 + \eta^2) \left[r^2 (1-\zeta)^2 + \zeta^2 \frac{\rho^2}{r^2} \right] + 2\zeta(1-\zeta)\rho \cos \nu (\eta^2 - \xi^2) - 4\xi\eta\rho(1-\zeta)\sin \nu = \left[r^2 (1-\zeta)^2 - \zeta^2 \frac{\rho^2}{r^2} \right]^2.$$

C'est l'équation de la surface cherchée. Celle-ci est du 4^me ordre et son contour apparent sur le plan xy est la courbe (7). Par la transformation au moyen des formules (14), l'équation (15) prend la forme

$$(15^a) \quad \frac{x^2}{\left[r(1-\zeta) + \frac{\rho}{r} \zeta \right]^2} + \frac{y^2}{\left[r(1-\zeta) - \frac{\rho}{r} \zeta \right]^2} = 1.$$

Elle montre que les sections parallèles au plan xy de la surface sont des ellipses. Les foyers de l'une quelconque de ces courbes sont les points déjà trouvés dans le cas précédent. La surface (15^a) est facile à construire. Pour $r^2 = \rho$, elle devient le *conocuneus de Wallis*

$$\frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho(1-2\zeta)^2} = 1,$$

ayant pour directrice la droite $\zeta = \frac{1}{2}$, $y = 0$, et pour plan directeur $x = 0$.

La circonférence.

Soit

$$(1) \quad \xi^2 + \eta^2 = a^2$$

et a une constante réelle. Alors

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}.$$

Il s'ensuit que $\xi = 0$ et $\xi = \pm a$ sont les points singuliers de la fonction η . Les points qui, après la projection du plan supérieur sur le plan inférieur, deviennent les points doubles du plan, sont

$$\xi = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

De l'équation (1) on tire

$$(2) \quad \begin{cases} X^2 - Y^2 = y^2 - x^2 + a^2 \\ XY = -xy. \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque $y^2 - x^2 + a^2 = \text{const.}$, c'est-à-dire lorsque le point ξ se meut sur une hyperbole équilatère, le point η décrit aussi une hyperbole équilatère. La même chose a lieu dans le cas où $xy = \text{const.}$ Aux points $x = \pm \alpha$, $y = \pm \beta$ du plan inférieur correspondent ainsi deux points symétriques par rapport à l'origine du plan supérieur.

La représentation transmise par la fonction η est connue. On sait, par exemple, que lorsque le point (α, β) parcourt une circonférence du centre O , son image (γ, δ) décrit une courbe de *Cassini*.

Afin d'établir d'autres relations entre les deux plans, on posera

$$(3) \quad \begin{cases} x + yi = a \cos(\varphi + \psi i) \\ X + Yi = a \sin(\varphi + \psi i). \end{cases}$$

Ces valeurs satisfont identiquement à l'équation de la circonférence, et l'introduction de la variable $(\varphi + \psi i)$ constitue une représentation des plans $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$ sur un troisième plan, celui de la variable $(\varphi + \psi i)$. Des équations (3), si l'on désigne par $\cos h\psi$, $\sin h\psi$ (*cosinus* et *sinus hyperboliques* de ψ), respectivement les expressions

$$\frac{1}{2}(e^{\psi} + e^{-\psi}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(e^{\psi} - e^{-\psi})$$

il résulte

$$(4) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi \cos h\psi \\ y = -a \sin \varphi \sin h\psi \end{cases} \quad \Bigg| \quad (4^a) \quad \begin{cases} X = a \sin \varphi \cos h\psi \\ Y = a \cos \varphi \sin h\psi \end{cases}$$

En éliminant premièrement ψ entre les équations (4), puis entre les équations (4^a), on trouve

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \varphi} = 1 \quad \Bigg| \quad \frac{X^2}{a^2 \sin^2 \varphi} - \frac{Y^2}{a^2 \cos^2 \varphi} = 1.$$

Interprétées dans le même plan, ces deux équations représentent un seul système d'hyperboles homofocales, puisque $\cos \varphi = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)$. Si donc le point inférieur parcourt une des hyperboles, son image se meut en général sur une autre hyperbole du système. Les deux hyperboles correspondantes se confondent dans les cas où $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$.

Éliminant en second lieu φ entre les équations (4) et (4^a), on obtient

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = 1 \quad \Bigg| \quad (5^a) \quad \frac{X^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{Y^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = 1.$$

Ce sont des ellipses homofocales telles que chaque ellipse se correspond à elle-même sans que pour cela les points correspondants coïncident.

La construction de points correspondants n'offre aucune difficulté. En effet, deux points correspondants P, P' étant donnés, on détermine d'abord les axes des ellipses passant par ces points, ce qui se fait facilement à l'aide des relations $x^2 + X^2 = a^2 \cos^2 h\psi$,

$y^2 + Y^2 = a^2 \sin^2 h\psi$, ensuite, afin d'obtenir d'autres couples de points sur la même ellipse, on peut se servir du procédé indiqué dans la fig. 7, dans laquelle $OA = a \cos h\psi$, $OB = a \sin h\psi$, angle $AOC = \text{angle } EOF = \varphi$.

Comme dans les cas précédents, on cherchera maintenant l'enveloppe de la droite qui joint le point (x, y) au point correspondant (X, Y) . L'équation de cette droite est

$$\eta + a \sin \varphi \sin h\psi = \operatorname{tg} h\psi \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\sin \varphi - \cos \varphi} (\xi - a \cos \varphi \cos h\psi)$$

ou

$$(6) \quad \sin \varphi (\eta - \xi \operatorname{tg} h\psi) - \cos \varphi (\eta + \xi \operatorname{tg} h\psi) = -a \sin h\psi.$$

Si en premier lieu on y considère φ comme paramètre variable, on est conduit à l'enveloppe suivante

$$(7) \quad \frac{\xi^2}{\frac{1}{2} a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{2} a^2 \sin^2 h\psi} = 1.$$

Cette équation représente encore des ellipses homofocales, ayant pour foyers les points doubles du plan. Deux ellipses appartenant l'une au système (5), l'autre au système (7), qui répondent à la même valeur de ψ , sont semblables et semblablement placées. Le parallélogramme $ABA'B'$ (fig. 7), inscrit à la première, est circonscrit à la seconde.

Si, au contraire, dans l'équation (6), mise sous la forme

$$(6^a) \quad \eta (\sin \varphi - \cos \varphi) + a \sin h\psi = \xi \operatorname{tg} h\psi (\cos \varphi + \sin \varphi)$$

on envisage ψ comme paramètre variable, et que l'on différentie par rapport à ψ , il vient

$$a \cos h\psi = \xi \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos^2 h\psi},$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad \cos^3 h\psi = \xi \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{a}$$

et l'équation (6^a) fournit ensuite

$$(8^a) \quad \sin^3 h\psi = \eta \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{a}.$$

Les deux équations (8) et (8^a) ou l'équation unique qui s'en suit par l'élimination de ψ

$$(9) \quad \left(\xi \frac{\sin \varphi + \cos \varphi}{a} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\eta \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{a} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

représentent l'enveloppe cherchée. Or, on reconnaît que l'équation (9) est celle de la développée d'une hyperbole. En effet, la développée de l'hyperbole

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

est donnée par l'équation

$$(10) \quad \left(\frac{\alpha \xi}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\beta \eta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

et les équations (9) et (10) sont identiques pourvu que l'on ait

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} = \frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} = \frac{a}{\sin \varphi - \cos \varphi},$$

c'est-à-dire si

$$\alpha = \frac{1}{2} a (\sin \varphi + \cos \varphi)$$

$$\beta = \frac{1}{2} a (\sin \varphi - \cos \varphi)$$

et par la suite

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} a^2.$$

Ainsi les hyperboles (φ étant maintenant considéré comme variable), dont les courbes (9) sont les développées, sont homofocales et leurs foyers sont les points doubles du plan.

Dans le but de trouver l'intersection réelle des deux nappes de la surface S, on formera γ_1 et γ_2 ou, si l'on ne veut pas changer de notation $\frac{\partial X}{\partial x}$ et $\frac{\partial X}{\partial y}$.

D'abord des équations (2) on tire

$$2X^2 = a^2 + y^2 - x^2 + \sqrt{(a^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2},$$

où la racine est nécessairement positive. Ensuite il vient

$$\frac{\partial X}{\partial y} = y \frac{a^2 + x^2 + y^2 + \sqrt{(a^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}}{2X \sqrt{(a^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}}$$

Or, $\frac{\partial X}{\partial y}$ ne peut s'annuler que pour $y=0$. Dans cette hypothèse

$$Y = 0, \quad X = \pm \sqrt{a^2 - x^2} = \pm a \cos \lambda,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \mp \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda},$$

où, pour simplifier, on a posé $x = a \cos \lambda$. En introduisant ces valeurs dans les équations (10^a), p. 34, à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{1}{1 - \frac{\partial X}{\partial x}} \\ \xi = x + (X - x) \zeta \\ \eta = y + (Y - y) \zeta \end{array} \right.$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda \pm \cos \lambda} \\ \xi = \frac{\pm a}{\sin \lambda \pm \cos \lambda} \\ \eta = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de λ entre les deux premières de ces équations donne

$$(11) \quad \eta = 0, \quad \frac{\xi^2}{\frac{1}{2} a^2} - \frac{\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

La courbe cherchée est par conséquent une hyperbole dont le centre est le point $\zeta=0, \eta=0, \xi = \frac{1}{2}$ et le demi-axe réel $= \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Si, en dernier lieu, on cherche les surfaces réglées, engendrées par les droites de la congruence donnée :

1° Lorsque le point inférieur est assujetti à rester sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = 1.$$

et 2° lorsqu'il se meut sur l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \varphi} = 1$$

on trouve dans le premier cas l'hyperboloïde

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{\eta^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = \zeta^2 + (1 - \zeta)^2$$

et, dans le second cas, la surface du 4^me ordre

$$\frac{\xi^2}{a^2 [\zeta \sin \varphi + (1 - \zeta) \cos \varphi]^2} - \frac{\eta^2}{a^2 [\zeta \cos \varphi - (1 - \zeta) \sin \varphi]^2} = 1.$$

Dans les deux cas, on constate aisément que les sections faites dans ces surfaces par le plan $\zeta = \text{const.}$ sont homofocales et que le lieu géométrique des foyers, ζ étant de nouveau variable, est précisément l'hyperbole (11). Le contour apparent sur le plan xy de l'hyperboloïde est l'ellipse (7), celui de la surface du 4^me ordre est la courbe, représentée par l'équation (9).



INFLUENCE DE L'ACIDE BORIQUE

SUR DIFFÉRENTES FERMENTATIONS

Communication de M. A. HERZEN.



La présence d'une certaine quantité d'acide borique exerce sur la marche de certaines fermentations une influence très curieuse, tantôt favorable, tantôt défavorable. Ainsi :

1° La transformation de l'amidon en glucose, au moyen du ferment salivaire ou pancréatique, n'est point influencée par l'acide borique, même si le véhicule de l'infusion est une *solution saturée* d'acide borique.

2° La transformation du glucose en alcool est *favorisée* par la présence de l'acide borique, même en très petite quantité; le moût, par exemple, fermente plus vite et donne un vin con-