Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 22 (1886)

Heft: 94

Artikel: Notice sur un théorème relatif aux podaires d'un certain système de coniques

Autor: Amstein, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-260952

NOTICE

SUR UN

Théorème relatif aux podaires d'un certain système de coniques,

PAR LE

Dr H. AMSTEIN

professeur à l'Académie de Lausanne.

Pl. II et III.

I.

Si l'on désigne par A, B et C des paramètres variables et que l'on admette un système de coordonnées rectangulaires, les courbes

$$(x^2+y^2)^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{1}$$

représentent les podaires des coniques

$$Ay^2 - 2Bxy + Cx^2 - (AC - B^2) = 0 \tag{2}$$

par rapport à l'origine, c'est-à-dire par rapport au centre commun des coniques.

Si, de plus, on attribue à A et C des valeurs positives et qu'on ait, en outre, $AC - B^2 > 0$, les coniques (2) sont des ellipses et leurs podaires des courbes fermées sans points doubles. (L'origine est un point conjugué.) On peut se proposer de déterminer la surface S de l'une quelconque de ces courbes. A cet effet, on transformera l'équation (1) en coordonnées polaires

$$r^2 = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi.$$

Alors l'aire cherchée est immédiatement donnée par

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(A+C)\frac{\varphi}{2} + (A-C)\frac{\sin 2\varphi}{4} - \frac{B}{2}\cos 2\varphi\Big]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}(A+C).$$

Cette formule montre que la surface des podaires (1) est indépendante du paramètre B. Il s'ensuit que la surface S est la même, quel que soit B, pourvu que la somme $(A+C)$ reste constante. Il existe, par conséquent, une infinité d'ellipses dont les podaires par rapport au centre ont la même surface. En effet, on peut admettre une relation quelconque entre A et B, $B=f(A)$, et poser $A+C=$ const. En considérant alors A comme seul paramètre variable, il est possible, dans beaucoup de cas, de déterminer l'enveloppe des coniques (2). Toutes les ellipses, inscrites à cette enveloppe, jouissent de la propriété indiquée.

Mais cette étude ne sera pas poursuivie dans ce sens. Les seuls cas qui seront traités avec un peu plus d'extension sont les suivants: 1° A et C sont constants et B variable, et 2° A et C sont variables, mais B et $A+C$ sont constants.

Afin de mieux reconnaître la nature des ellipses en question, on transformera l'équation (2) en coordonnées tangentielles moyennant les formules

$$u=-\frac{dy}{xdy-ydx}, \qquad v=\frac{dx}{xdy-ydx}.$$

Il viendra

$$Au^2+Cv^2+2Buv-1=0. \tag{3}$$

Dans le premier des cas mentionnés, c'est-à-dire si l'on considère seulement B comme paramètre variable, l'équation (3), mise sous la forme

$$(Au^2+Cv^2-1)+2Buv=0$$

fait voir que les coniques (3) sont inscrites au quadrilatère formé par les tangentes qui sont déterminées par les deux équations

$$Au^2+Cv^2-1=0,$$
$$uv=0.$$

On en tire

$$\begin{cases} u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A}} \\ v=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v=\pm\dfrac{1}{\sqrt{C}} \\ u=0. \end{cases}$$

En coordonnées ponctuelles, ces quatre droites ont pour équations

$$x = \pm \sqrt{A}, \qquad y = \pm \sqrt{C}.$$

Ainsi, les ellipses (2) sont inscrites au rectangle formé par les tangentes aux sommets de l'ellipse que l'on obtient, en faisant $B = 0$, à savoir

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{C} = 1.$$

Dans le second cas, soit

$$A + C = k^2,$$

k étant une constante et A le paramètre variable. L'équation (3) devient alors

$$(k^2 v^2 + 2Buv - 1) + A(u^2 - v^2) = 0$$

et l'on reconnaît que dans ce cas encore les ellipses (3) sont inscrites à un quadrilatère qui est donné par les équations

$$\begin{gathered} k^2 v^2 + 2Buv - 1 = 0 \\ u^2 - v^2 = 0, \end{gathered}$$

d'où il suit

$$\left\{\begin{aligned} u &= \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 - 2B}} \\ v &= \mp \frac{1}{\sqrt{k^2 - 2B}} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} u &= \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2B}} \\ v &= \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 + 2B}} \end{aligned}\right.$$

En coordonnées ponctuelles, les équations de ces quatre tangentes communes prennent la forme

$$\begin{gathered} x + y \pm \sqrt{k^2 + 2B} = 0 \\ x - y \pm \sqrt{k^2 - 2B} = 0. \end{gathered}$$

La surface S ne dépend évidemment pas de la position des axes des ellipses (3), mais bien de leur longueur. On peut, en conséquence, se figurer que les axes de toutes les ellipses considérées jusqu'ici coïncident avec les axes coordonnés. On ne restreint donc pas la généralité de cette étude en substituant aux courbes (1) et (2) les suivantes :

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 \tag{4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

pourvu que l'on y ajoute la condition

$$a^2 + b^2 = k^2.$$

En coordonnées tangentielles, les ellipses (5) sont données par l'équation

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1. \tag{6}$$

En la mettant sous la forme

$$a^2(u^2 - v^2) + (k^2v^2 - 1) = 0$$

on reconnaît que ces ellipses sont inscrites à un carré dont les côtés sont donnés par les deux équations

$$u^2 - v^2 = 0$$

$$k^2v^2 - 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} u = \pm \dfrac{1}{k} \\ v = \pm \dfrac{1}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \pm \dfrac{1}{k} \\ v = \mp \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

Exprimées en coordonnées ponctuelles, les quatre tangentes communes sont

$$x + y \pm k = 0$$

$$x - y \pm k = 0.$$

Aux cas limites $AC - B^2 = 0$ dans les formules (1) et (2) répondent ici les deux cas

$$a = k, \quad b = 0$$

et

$$a = 0, \quad b = k.$$

Dans cette hypothèse, l'équation (6) prend l'une ou l'autre des formes

$$k^2 u^2 = 1, \qquad k^2 v^2 = 1,$$

c'est-à-dire que les ellipses correspondantes dégénèrent, l'une en les deux points

$$x = \pm k, \qquad y = 0,$$

l'autre en les deux points

$$x = 0, \qquad y = \pm k.$$

Les podaires relatives à ces ellipses particulières s'obtiennent en faisant tour à tour $a = k$ et $b = k$ dans l'équation (4).

Elle donne,

$$(7)\quad \begin{cases} \text{pour } a = k : & \left(x \mp \frac{1}{2} k\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} k^2, \\ \text{pour } b = k : & x^2 + \left(y^2 \mp \frac{1}{2} k\right)^2 = \frac{1}{4} k^2, \end{cases}$$

de sorte que chacune des deux courbes du 4^{me} ordre dégénère en deux circonférences.

La constante k est arbitraire. On peut donc résumer ce qui précède, en énonçant le théorème suivant : — *Les podaires par rapport au centre commun de toutes les ellipses inscrites à un carré donné, ont la même surface.*

REMARQUE. En écrivant l'équation (4) sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(x^2 + y^2)^2 - k^2 y^2 = a^2 (x^2 - y^2),$$

$$(x^2 + y^2)^2 - k^2 x^2 = b^2 (y^2 - x^2),$$

on voit immédiatement que les podaires (4) passent toutes par les points où les droites $y = \pm x$ rencontrent les circonférences (7). (Voir fig. 1 et 2, pl. II.)

II.

Si dans les équations (4) et (5) on remplace b^2 par $-b^2$, tout en maintenant la condition

$$a^2 - b^2 = k^2,$$

les courbes

$$(8) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2$$

sont encore les podaires par rapport au centre des hyperboles

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et ces dernières touchent les mêmes quatre droites que les ellipses (5), à savoir

$$x + y \pm k = 0$$
$$x - y \pm k = 0.$$

Au premier abord, il ne semble pas que le théorème énoncé puisse être généralisé de sorte qu'il subsiste encore pour les podaires des hyperboles touchant les prolongements des quatre côtés du carré donné. En effet, l'aire S_1 des courbes (8) est fournie par

$$S_1 = 2\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} (a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)d\varphi = \left[(a^2-b^2)\varphi + \frac{a^2+b^2}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\operatorname{arctg}\frac{a}{b}} =$$
$$= (a^2 - b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b} + ab$$

et cette valeur est en général différente de $\frac{\pi k^2}{2}$.

Cependant, si l'on ne craint pas d'introduire les parties imaginaires des courbes (8) et leurs surfaces négatives, il est encore possible de généraliser le théorème dans le sens indiqué. La différence entre S_1 et $\frac{\pi k^2}{2}$ provient évidemment du fait que l'intégration doit être interrompue dans les intervalles

$$\text{de} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} \quad \text{à} \quad \varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$$

$$\text{et de} \quad \varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{a}{b} \quad \text{à} \quad \varphi = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{a}{b},$$

car l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)\frac{\varphi}{2} + \frac{a^2+b^2}{4}\sin 2\varphi\right],$$

prise entre les limites 0 et 2π, donne bien

$$S = \pi\,\frac{k^2}{2}.$$

La différence

$$S - S_1 = \pi\,\frac{a^2-b^2}{2} - (a^2-b^2)\,\text{arctg}\,\frac{a}{b} - ab$$

est donc nécessairement due aux parties imaginaires de la courbe (8). Il est facile de s'en rendre compte. En effet, lorsque

$$\pi - \text{arctg}\,\frac{a}{b} \geqq \varphi \geqq \text{arctg}\,\frac{a}{b}$$

ou $$2\pi - \text{arctg}\,\frac{a}{b} \geqq \varphi \geqq \pi + \text{arctg}\,\frac{a}{b},$$

$$r^2 = a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi$$

devient négatif ou

$$r = i\sqrt{b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

imaginaire, et par conséquent l'aire de la partie correspondante de la courbe, c'est-à-dire l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int r^2\,d\varphi$$

prise entre ces limites, prend aussi une valeur négative. D'ailleurs, en calculant directement

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\text{arctg}\,\frac{a}{b}}^{\pi-\text{arctg}\,\frac{a}{b}}(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi+\text{arctg}\,\frac{a}{b}}^{2\pi-\text{arctg}\,\frac{a}{b}}(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_{\text{arctg}\,\frac{a}{b}}^{\pi-\text{arctg}\,\frac{a}{b}}(a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi$$

on trouve la valeur prévue

$$S_2 = \pi \frac{a^2 - b^2}{2} - (a^2 - b^2) \operatorname{arctg} \frac{a}{b} - ab$$

et ensuite $$S = S_1 + S_2 = \pi \frac{a^2 - b^2}{2} = \pi \frac{k^2}{2}.$$

Ainsi, en interprétant la surface des podaires (8) de la manière indiquée, l'on voit que le théorème relatif à la constance des aires des courbes (4) subsiste encore pour les courbes (8). L'interprétation adoptée n'a pas une grande portée pratique, il est vrai; en revanche, elle jette une lumière particulière sur les intégrales définies dont les éléments, essentiellement positifs, deviennent négatifs dans certains intervalles.

Il peut être intéressant de remarquer que les parties imaginaires de la courbe (8) proviennent de celles des tangentes à l'hyperbole (9) qui, tout en ayant un coefficient angulaire réel, touchent l'hyperbole en un point dont les coordonnées sont purement imaginaires (et non complexes). En effet, toute tangente à l'hyperbole (9) est donnée par l'équation

$$y = \mu x \mp \sqrt{\mu^2 a^2 - b^2},$$

où μ signifie un paramètre réel; son point de contact a les coordonnées

$$x_1 = \frac{\mu a^2}{\sqrt{\mu^2 a^2 - b^2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{\mu^2 a^2 - b^2}}$$

et le point correspondant de la podaire est donné par

$$x_2 = \frac{\mu \sqrt{\mu^2 a^2 - b^2}}{1 + \mu^2}, y_2 = - \frac{\sqrt{\mu^2 a^2 - b^2}}{1 + \mu^2}.$$

Dans le cas où $\mu^2 < \frac{b^2}{a^2}$, ces quatre valeurs sont purement imaginaires; cependant, le point (x_2, y_2) se trouve sur la droite réelle $y = - \frac{1}{\mu} x$, comme cela doit être.

Si donc on veut représenter les parties imaginaires des courbes (8) et (9) par une courbe réelle, on peut procéder

Fig. 1

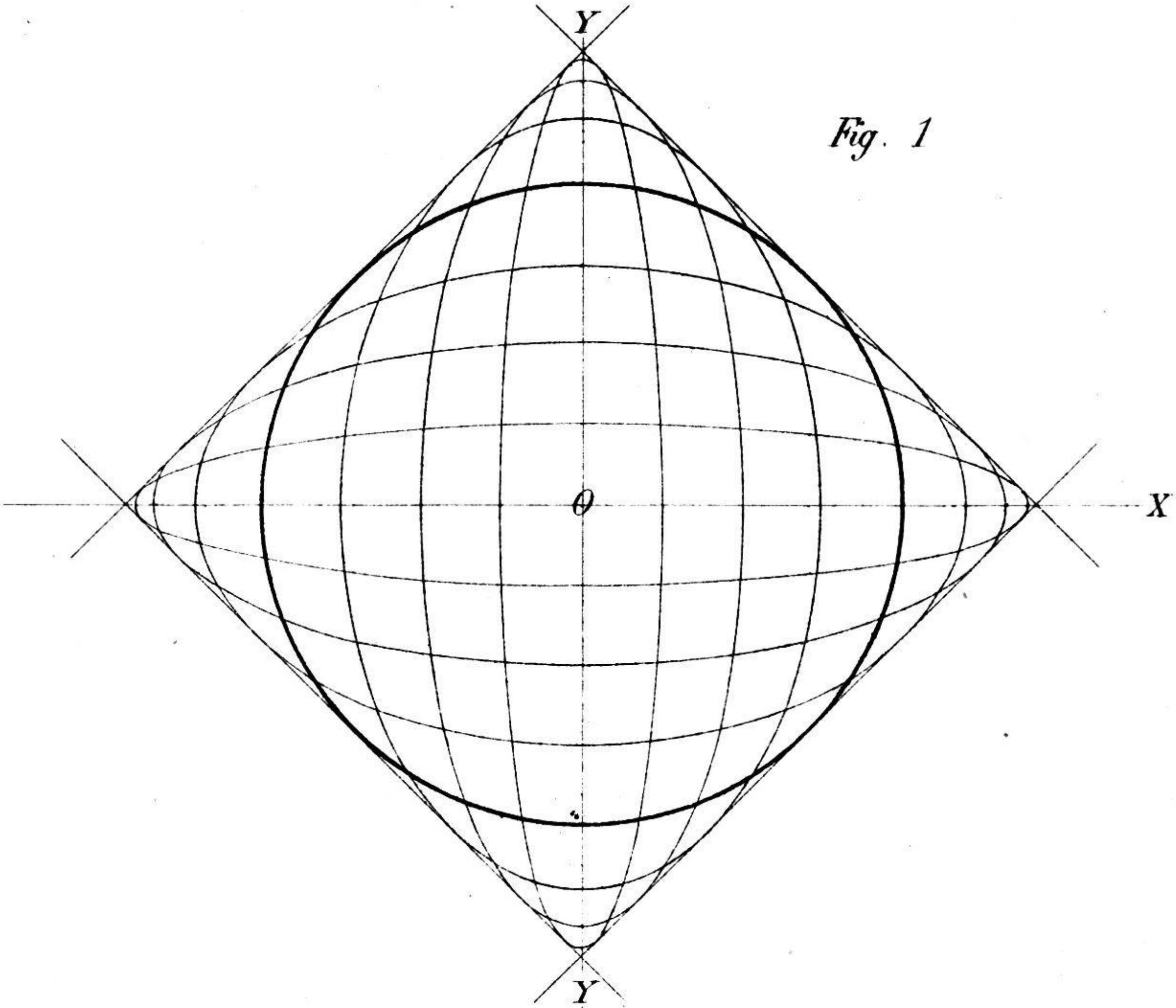
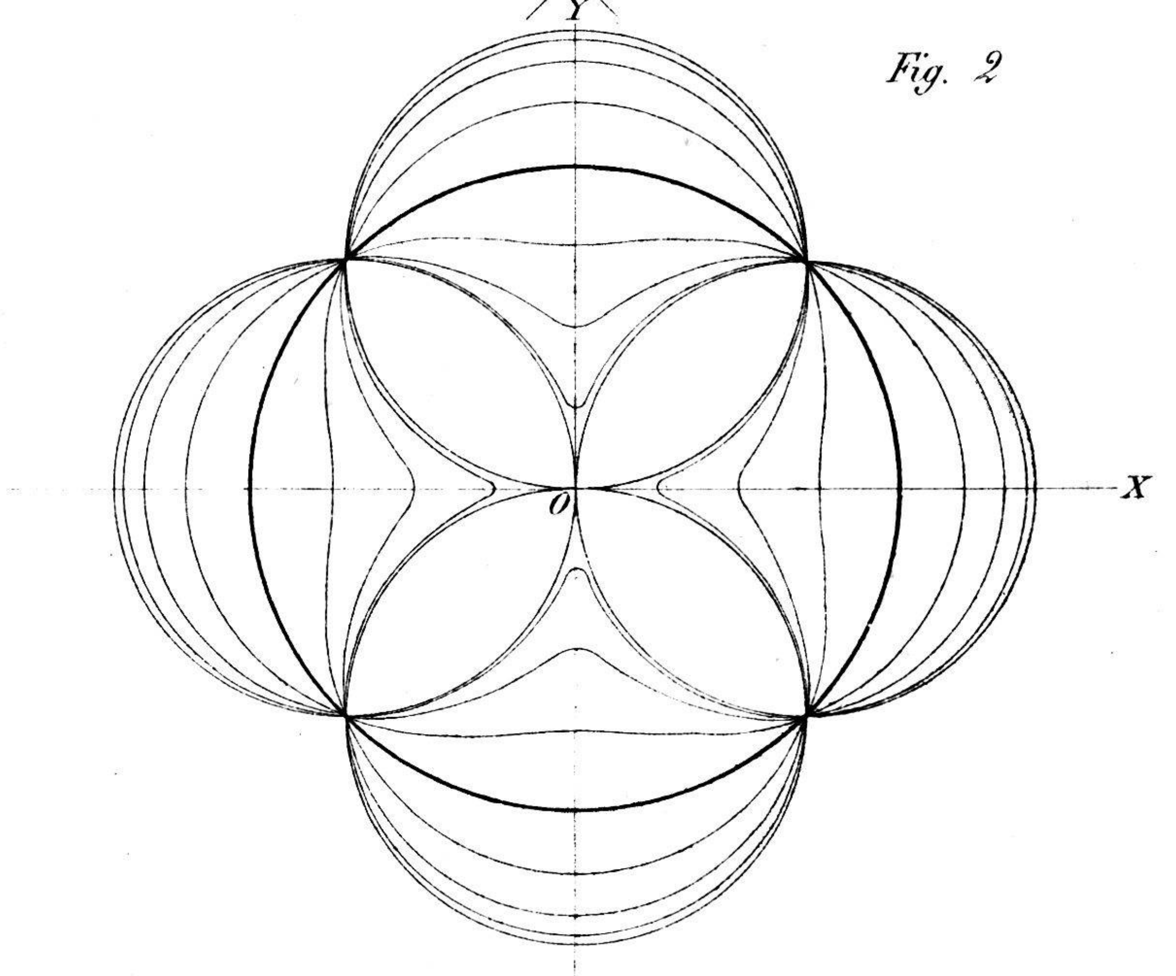


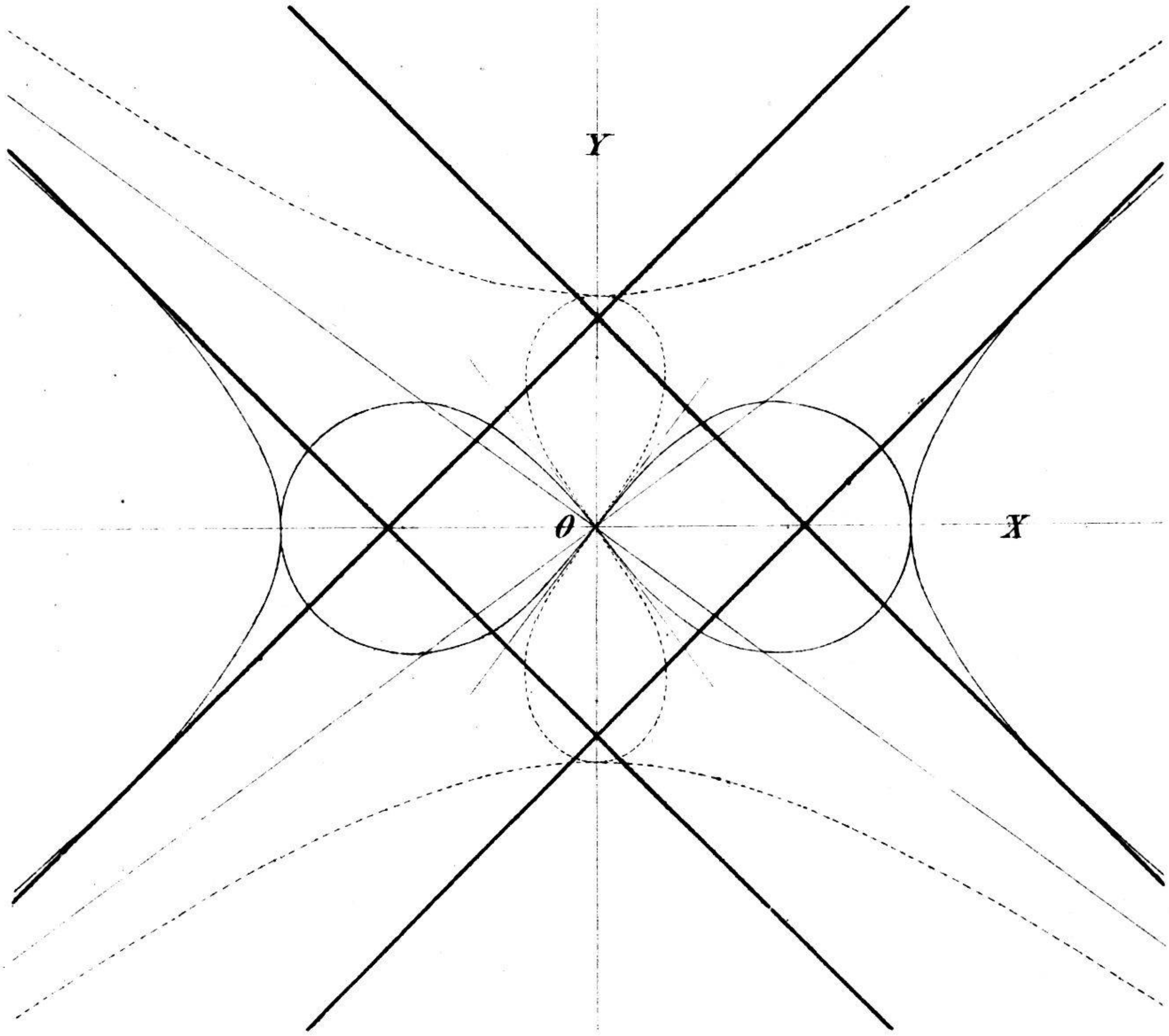
Fig. 2



H. Amstein.

LITH. J. CHAPPUIS, LAUSANNE.

Fig. 3



H. Amstein.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.

d'après la méthode adoptée dans la théorie des imaginaires, c'est-à-dire qu'il suffira de tourner d'un angle droit dans le sens positif tout rayon vecteur affecté du coefficient i. Cela revient évidemment à remplacer dans les équations (8) et (9) x par ix et y par iy, ce qui donne

$$(8^a) \qquad (x^2 + y^2)^2 = b^2 y^2 - a^2 x^2$$

$$(9^a) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Ainsi, pour rester dans les conditions du théorème énoncé, il faut adjoindre à l'hyperbole (9) une autre (9^a) qui a les mêmes asymptotes, mais se trouve placée dans les deux quadrants du plan, où la première n'a pas de points réels. L'aire de la podaire de la conique (9^a) entre alors négativement dans le calcul de la surface S. (Voir fig. 3, pl. III.)

Il est superflu de démontrer que les hyperboles (9^a) touchent les quatre droites imaginaires

$$x + y \pm ik = 0,$$

$$x - y \pm ik = 0.$$