Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Vorwort: "Avec quelques-uns de mes camarades d'études..."
Autor: [s.n.]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.
Vol. XXIV. N° 99. 1888.

FONCTIONS ABÉLIENNES DU GENRE 3

UN CAS PARTICULIER

PAR
H. AMSTEIN

Pl. VI à X.

Avec quelques-uns de mes camarades d'études, j'ai eu la bonne fortune de suivre un cours général sur la théorie des fonctions abéliennes que mon vénéré maître, M. H. Weber, a fait une seule fois, en 1875, à l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich. Ce n'est que plusieurs années après que j'ai eu connaissance de son remarquable ouvrage intitulé : *Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3.* (Berlin, 1876, chez Georg Reimer.) A la page 4 de l'introduction, l'auteur s'exprime comme suit : « Es ist damit nicht ausgeschlossen, dass es ausser den hyperelliptischen Functionen noch andere besondere Fälle gibt, in denen die Verzweigungspunkte eine wichtige Rolle spielen. Es würde dies z. B. eintreten bei den Functionen, welche von der Gleichung $x^4 + y^4 + z^4 = 0$ abhängen, welche überhaupt, obwohl (oder vielleicht gerade weil) sie durch elliptische Functionen vollständig dargestellt werden können, ein interessantes Beispiel für unsere Theorie liefern würden. »

« *Cela n'exclut pas l'existence, en dehors des fonctions hyperelliptiques, d'autres cas particuliers, dans lesquels les points de ramification jouent un rôle important. Ce serait, par exemple, le cas des fonctions dépendant de l'équation* $\mathrm{x}^4 + \mathrm{y}^4 + \mathrm{z}^4 = 0$, *qui fourniraient un exemple intéressant à l'appui de notre théorie, lors même que (ou peut-être justement parce que) elles peuvent être représentées complètement par des fonctions elliptiques.* »

Après avoir lu et relu cet ouvrage avec le plus vif intérêt, je me suis décidé à traiter l'exemple proposé. Chemin faisant, j'ai rencontré certaines difficultés, auxquelles il fallait d'ailleurs s'attendre, de sorte qu'il m'a paru que ce travail, entrepris dans l'unique but de me familiariser autant que possible avec une théorie plus ou moins ardue, pourrait rendre quelque service à ceux qui ont l'intention d'aborder ces régions de la science. C'est dans cet espoir, qu'encouragé par quelques amis, j'ose soumettre le présent mémoire au public mathématique.

Je me représente un lecteur, en possession de la théorie des fonctions ϑ à trois variables et des caractéristiques à six éléments, et ayant devant lui l'ouvrage de M. Weber; à l'aide de ce travail, il lui sera aisé de suivre pas à pas l'ouvrage original.

Dans un second mémoire, je me propose de reprendre les problèmes fondamentaux de Jacobi et de Riemann, en ramenant ces questions sur le terrain des fonctions elliptiques.

Je saisis enfin cette occasion pour témoigner à mon vénéré maître toute ma gratitude de ce qu'il a bien voulu, à plusieurs reprises, s'intéresser aux efforts de son ancien élève.

Introduction.

L'équation qui sert de base à l'étude qu'on va entreprendre est la suivante :

$$x^4 + y^4 + z^4 = 0$$

ou

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{z}{x}\right)^4 = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{y}{x} = z\sqrt{i}, \qquad i = \sqrt{-1}$$

et

$$\frac{z}{x} = s\sqrt{i},$$

elle prend la forme

$$(1) \qquad s^4 + z^4 - 1 = 0,$$

d'où

$$(1^a) \qquad s = \sqrt[4]{1 - z^4}.$$

On remarque tout d'abord que les variables s et z entrent d'une manière symétrique dans l'équation (1). Les relations entre s et z seront donc parfaitement connues lorsqu'on aura étudié s en fonction de z.