Vérification[s]

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\alpha}^{\alpha'} du_{\mathrm{h}} + \int_{\beta}^{\beta'} du_{\mathrm{h}}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\omega_1,\ \frac{1}{2}\omega_2,\ \frac{1}{2}\omega_3\right),$$

où α, β sont les zéros d'une fonction abélienne $\sqrt{x}$, α', β' les zéros d'une autre fonction abélienne $\sqrt{x'}$ et ω_1, ω_2, ω_3 un système de périodes à la caractéristique $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$.

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\ \sqrt{g}$.

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^\circ}) + (\sqrt{g}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{110} = \binom{111}{011},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} = -\frac{1}{5}\pi(2-i) - \\ -\frac{\pi i}{10}(3+i) + \frac{1}{10}\pi(3+i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2}a_{21} + \frac{1}{2}a_{22} + \frac{1}{2}a_{23} + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{10}\pi i(3+i) - \\ -\frac{2}{10}\pi(2-i) - \frac{1}{10}\pi(2-i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = \frac{1}{2}a_{31} + \frac{1}{2}a_{32} + \frac{1}{2}a_{33} + \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{10}\pi(3+i) - \\ -\frac{1}{10}\pi(2-i) - \frac{2}{10}\pi(3+i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

et

$$\mathrm{V}_{\mathrm{h}} = \int_{\mathrm{III}\ e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\ e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_{\mathrm{II}\ e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\ e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_{\mathrm{h}}.$$

Or, il est à remarquer qu'il ne serait pas exact d'écrire

$$\int_{\mathrm{III}\; e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\; e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}},$$

vu que les limites inférieures, 0, dans la surface de Riemann adoptée, ne coïncident pas, mais sont séparées par des lignes de passage. Cette remarque s'applique également à $\int_{\mathrm{II}\; e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\; e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h$ et, en général, à toutes les intégrales de ce genre. Voici comment on peut procéder. On fera décrire à la variable z une ligne continue, partant de la limite inférieure $e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3^{me} nappe et allant d'abord jusqu'à 0, puis de 0 à $+1$. Arrivé en $+1$, z contournera ce point un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'il arrive dans la nappe voulue, ce qui est permis, attendu que les intégrales relatives à ces courbes infiniment petites sont négligeables. Ensuite z ira de $+1$ à 0 et enfin de 0 à la limite supérieure $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$. De cette manière on obtient

$$\mathrm{V}_1 = \int_{\mathrm{III}\; e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\mathrm{IV}\; 0}^{1} du_1^{(-)} + \int_{\mathrm{III}\; 1}^{0} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 +$$

$$+ \int_{\mathrm{II}\; e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\mathrm{II}\; 0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{III}\; 1}^{0} du_1^{(-)} + \int_{\mathrm{II}\; 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 =$$

$$= \Big[\int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\; 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1\Big] - \Big[\int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\; 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1\Big] +$$

$$+ \int_{\mathrm{IV}\; 0}^{1} du_1^{(-)} - \int_{\mathrm{III}\; 0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{II}\; 0}^{1} du_1^{(+)} - \int_{\mathrm{III}\; 0}^{1} du_1^{(-)} =$$

$$= -\frac{1}{20}\pi i(7-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) -$$

$$-\frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) = -\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i$$

et de même

$$V_2 = \frac{3}{10}\pi - \frac{9}{10}\pi i, \qquad V_3 = -\frac{1}{10}\pi + \frac{3}{10}\pi i.$$

Les valeurs trouvées peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
V_1 &= \underline{-\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},\\
V_2 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \; \underline{+\frac{4}{5}\pi - \frac{7}{5}\pi i},\\
V_3 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \; \underline{+\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i}.
\end{aligned}$$

La formule en question est vérifiée si dans les trois intégrales les expressions soulignées forment un système de périodes. On peut donc poser, en supprimant le facteur π

$$-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i = m_1 i + \frac{1}{\pi}(a a_{11} + b a_{12} + c a_{13}) =$$
$$= m_1 i - \frac{2}{5}(2-i)\,a - \frac{1}{5}i(3+i)\,b + \frac{1}{5}(3+i)\,c,$$

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i = m_2 i + \frac{1}{\pi}(a a_{21} + b a_{22} + c a_{23}) =$$
$$= m_2 i - \frac{1}{5}i(3+i)\,a - \frac{2}{5}(2-i)\,b - \frac{1}{5}(2-i)\,c,$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i = m_3 i + \frac{1}{\pi}(a a_{31} + b a_{32} + c a_{33}) =$$
$$= m_3 i + \frac{1}{5}(3+i)\,a - \frac{1}{5}(2-i)\,b - \frac{2}{5}(3+i)\,c.$$

Les nombres entiers a, b, c, m_1, m_2, m_3 doivent satisfaire aux six équations résultant de la séparation des parties réelles et imaginaires qui, après multiplication par 5, prennent la forme

$$\begin{array}{rl|l}
-1 = & -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c,\\
4 = & a - 4b - 2c & -7 = m_2 - 3a + 2b + c,\\
2 = & 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c.
\end{array}$$

On en tire

$$a=0,\quad b=-1,\quad c=0,$$
$$m_1=-5,\quad m_2=-5,\quad m_3=0.$$

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\sqrt{g'}$.

On trouve successivement

$$(\omega)=(\sqrt{g^\circ})+(\sqrt{g'})=\binom{100}{101}+\binom{011}{001}=\binom{111}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1=\frac{1}{2}\pi i,\quad \frac{1}{2}\omega_2=-\frac{1}{2}\pi,\quad \frac{1}{2}\omega_3=-\frac{1}{2}\pi,$$

$$V_1=\int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{IV}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}du_1+\int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}du_1=\Big[\int_{\mathrm{IV}\,0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}}du_1+\int_{\mathrm{III}\,0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}du_1\Big]-$$

$$-\Big[\int_{\mathrm{II}\,0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}du_1+\int_{\mathrm{III}\,0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}}du_1\Big]+\int_{\mathrm{IV}\,0}^{1}du_1^{(-)}-\int_{\mathrm{III}\,0}^{1}du_1^{(+)}=$$

$$=\frac{1}{4}\pi(1-i)+\frac{1}{20}\pi(3+i)+0-\frac{1}{10}\pi(2-i)=\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1=\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i=\frac{1}{2}\pi i+\underline{\frac{1}{5}\pi-\frac{3}{5}\pi i},$$

$$V_2=-\frac{3}{10}\pi-\frac{3}{5}\pi i=-\frac{1}{2}\pi+\underline{\frac{1}{5}\pi-\frac{3}{5}\pi i},$$

$$V_3=\frac{1}{10}\pi+\frac{1}{5}\pi i=-\frac{1}{2}\pi+\underline{\frac{3}{5}\pi+\frac{1}{5}\pi i},$$

$1=-4a+b+3c$	$-3=m_1+2a-3b+c$	$a=-1$	$m_1=0$
$1=a-4b-2c$	$-3=m_2-3a+2b+c$	$b=0$	$m_2=-5$
$3=3a-2b-6c$	$1=m_3+a+b-2c$	$c=-1$	$m_3=0$

Vérification pour $\sqrt{g^{\circ}}\,\sqrt{g''}$.

Il vient

$$(\omega) = (\sqrt{g^{\circ}}) + (\sqrt{g''}) = \binom{100}{101} + \binom{111}{001} = \binom{011}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i,\ \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i,$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$\mathrm{V}_1 = \int_{\overset{\bullet}{\mathrm{III}}\ e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\overset{\mathrm{III}}{}e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\overset{\bullet}{\mathrm{II}}\ e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\overset{\mathrm{IV}}{}e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 = [\int_{\overset{\bullet}{\mathrm{III}}\ 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\overset{\bullet}{\mathrm{IV}}\ 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1] -$$

$$-[\int_{\overset{\bullet}{\mathrm{III}}\ 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\overset{\bullet}{\mathrm{II}}\ 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1] + \int_{\overset{\bullet}{\mathrm{II}}\ 0}^{1} du_1^{(+)} - \int_{\overset{\bullet}{\mathrm{IV}}\ 0}^{1} du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{20}\pi(3+i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) =$$

$$= \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i - \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$\mathrm{V}_2 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i + \underline{\frac{4}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$\mathrm{V}_3 = -\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{10}\pi i = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i + \underline{\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i},$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
-1 = -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c & a = 0 & m_1 = -5 \\
4 = a - 4b - 2c & -2 = m_2 - 3a + 2b + c & b = -1 & m_2 = 0 \\
2 = 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c & c = 0 & m_3 = 0
\end{array}$$

Si $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{\xi_1}$; $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1\sqrt{x_1\xi_1} + a_2\sqrt{x_2\xi_2},$$

où a_1 et a_2 désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine (Wurzelfunction)* du 2[d] degré et du 2[d] ordre. Sa caractéristique est $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1\xi_1})$ et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes a_1, a_2 peuvent être déterminées de manière que $\sqrt{\Psi}$ s'annule en un des zéros α, β d'une fonction abélienne $\sqrt{q}$, par exemple en α. M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros c_1, c_2, c_3 de cette fonction $\sqrt{\Psi}$ sont en même temps les zéros de la fonction $\vartheta_{(\omega)}(\int_\alpha^\zeta du_h)$, à la condition toutefois que $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Lorsque (ω) est une caractéristique impaire, $\sqrt{\Psi}$ dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques $(\sqrt{q})$ et $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$. Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction $\vartheta_{(\omega)}(\int_\alpha^\zeta du_h)$ impaire s'annule pour $\zeta = \alpha$ et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

Détermination de c^0_1, c^0_2, c^0_3.

Parmi les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3, répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du ϑ fondamental $\vartheta(\int_\alpha^\zeta du_h)$. Il correspond à $(\omega) = \binom{000}{000}$, soit $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$ et sera désigné par c^0_1, c^0_2, c^0_3. On peut le trouver de la manière suivante :