

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Kapitel: Le problème de Riemann
Autor: Amstein, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-261785>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le problème de Riemann.

Au sujet de ce problème fondamental, M. Weber (p. 159 à 168), indique dans tous leurs détails les calculs nécessaires. En les suivant pas à pas, on arrivera sans difficulté aux résultats désirés. Au lieu d'une traduction à peu près littérale de cette partie de l'ouvrage de M. W., il sera plus utile de donner ici une application des formules trouvées à des cas particuliers en n'insistant que sur le commencement de la solution.

I. Les deux caractéristiques (k) et (k') sont paires.

Soit par exemple

$$(k) = \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad k' = \begin{pmatrix} 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad (k) + (k') = (\sqrt{x_1}) + (\sqrt{x_2}).$$

En formant les deux groupes

$$\begin{aligned} (k) + (k') &= \begin{pmatrix} 011 \\ 000 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}}{x_1} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 100 \end{pmatrix}}{x_2} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_2} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_1} = \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma''_1} + \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma''_2} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma''_2} + \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma''_1} = \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 100 \end{pmatrix}}{\gamma_2} + \frac{\begin{pmatrix} 110 \\ 100 \end{pmatrix}}{\gamma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma'_2} + \frac{\begin{pmatrix} 110 \\ 011 \end{pmatrix}}{\gamma'_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k) + (\sqrt{x_1}) &= \begin{pmatrix} 110 \\ 000 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}}{\gamma^o_3} + \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 110 \end{pmatrix}}{\xi_3} = \frac{\begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_2} + \frac{\begin{pmatrix} 010 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma^o_2} = \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 001 \end{pmatrix}}{x_6} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 001 \end{pmatrix}}{g''} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix}}{\gamma^o_1} + \frac{\begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}}{\xi_1} = \frac{\begin{pmatrix} 011 \\ 001 \end{pmatrix}}{g'} + \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 001 \end{pmatrix}}{x_5} = \frac{\begin{pmatrix} 011 \\ 110 \end{pmatrix}}{g} + \frac{\begin{pmatrix} 101 \\ 110 \end{pmatrix}}{x_4} \end{aligned}$$

on remarque qu'ils possèdent les 4 caractéristiques communes

$$\begin{aligned} (\sqrt{y_1}) &= (\sqrt{\xi_1}) = \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \end{pmatrix}, & (\sqrt{y_2}) &= (\sqrt{\xi_2}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 111 \end{pmatrix}, \\ (\sqrt{z_1}) &= (\sqrt{\gamma^o_1}) = \begin{pmatrix} 001 \\ 111 \end{pmatrix}, & (\sqrt{z_2}) &= (\sqrt{\gamma^o_2}) = \begin{pmatrix} 010 \\ 111 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posant, en conséquence,

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} &= \sqrt{s-1}, & \sqrt{x_2} &= \sqrt{z+1}, & \sqrt{y_1} &= \sqrt{s+1}, \\ \sqrt{y_2} &= \sqrt{z-1}, & \sqrt{z_1} &= \sqrt{s-z+\varepsilon}, & \sqrt{z_2} &= \sqrt{s-z+\varepsilon'}, \end{aligned}$$

on trouve aisément la formule

$$\sqrt{\frac{\chi_{(100)}^{(010)}}{\chi_{(100)}^{(001)}}} = \frac{\mathcal{F}_{(100)}^{(001)}}{\mathcal{F}_{(100)}^{(010)}} \cdot \frac{\mathcal{F}_{(100)}^{(010)}(v_1, v_2, v_3)}{\mathcal{F}_{(100)}^{(001)}(v_1, v_2, v_3)} = \sqrt{-1} \cdot \frac{\mathcal{F}_{(100)}^{(010)}(v_1, v_2, v_3)}{\mathcal{F}_{(100)}^{(001)}(v_1, v_2, v_3)}$$

Désignant par $x_i^{(v)}$, $y_i^{(v)}$, $z_i^{(v)}$ les valeurs que prennent les fonctions x_i , y_i , z_i pour $\zeta = \zeta_v$, soit $s = s_v$, $z = z_v$, on a ici

$$\begin{aligned} & \sqrt{\chi_{(100)}^{(010)}} = \\ & = \Sigma \pm \sqrt{x_1 y_1 z_1}, \sqrt{x_1^{(1)} y_2^{(1)} z_2^{(1)}}, \sqrt{x_2^{(2)} y_1^{(2)} z_2^{(2)}}, \sqrt{x_2^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\chi_{(100)}^{(001)}} = \\ & = \Sigma \pm \sqrt{x_2 y_2 z_2}, \sqrt{x_2^{(1)} y_1^{(1)} z_1^{(1)}}, \sqrt{x_1^{(2)} y_2^{(2)} z_1^{(2)}}, \sqrt{x_1^{(3)} y_1^{(3)} z_2^{(3)}}, \end{aligned}$$

et les arguments v_1 , v_2 , v_3 sont déterminés par la congruence

$$(v_1, v_2, v_3) \equiv \left(h \left(\int_{\alpha}^{\zeta} du_h + \int_{\beta}^{\zeta_1} du_h + \int_{\alpha}^{\zeta_2} du_h + \int_{\beta}^{\zeta_3} du_h \right) \right),$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque.

II. Les caractéristiques (k) et (k') sont impaires.

Soit

$$(k) = (\sqrt{z_1}) = (\sqrt{\gamma_1^0}) = \binom{001}{111}, \quad (k') = (\sqrt{z_2}) = (\sqrt{\gamma_2^0}) = \binom{010}{111}.$$

Alors on a

$$(\sqrt{x_1 x_2}) = (\sqrt{y_1 y_2}) = (\sqrt{z_1 z_2}) = (k) + (k') = \binom{011}{000}$$

et les caractéristiques

$$(\sqrt{x_1 y_1 z_1}) = (k) + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k_1) = \binom{001}{111} + \binom{100}{100} + \binom{111}{111} = \binom{010}{100},$$

$$(\sqrt{x_1 y_1 z_2}) = (k') + (\sqrt{x_1 y_1}) = (k'_1) = \binom{010}{111} + \binom{100}{100} + \binom{111}{111} = \binom{001}{100},$$

sont paires. En admettant encore, comme dans le cas précédent,

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}, \quad \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}, \quad \sqrt{y_1} = \sqrt{\xi_1} = \sqrt{s+1},$$

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\xi_2} = \sqrt{z-1}, \quad \sqrt{z_1} = \sqrt{\gamma_1^0} = \sqrt{s-z+\varepsilon},$$

$$\sqrt{z_2} = \sqrt{\gamma_2^0} = \sqrt{s-z+\varepsilon'},$$

Fig. 1.

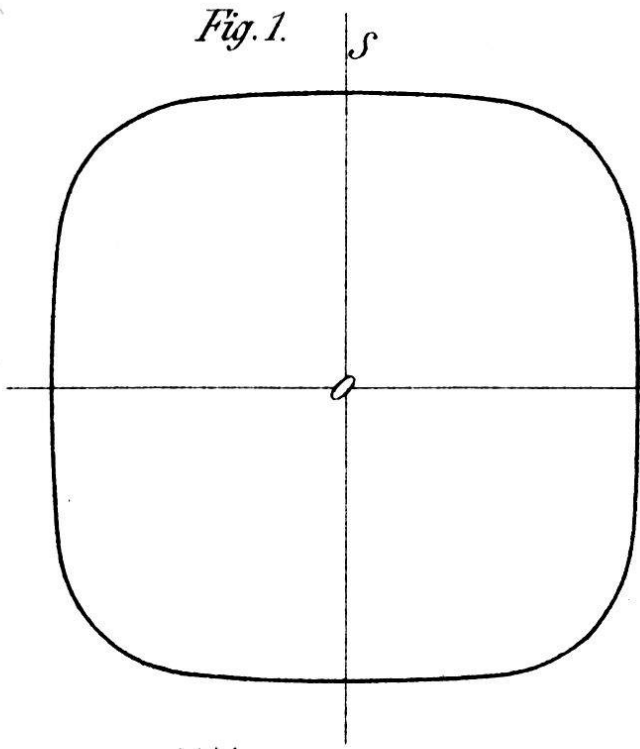


Fig. 6.

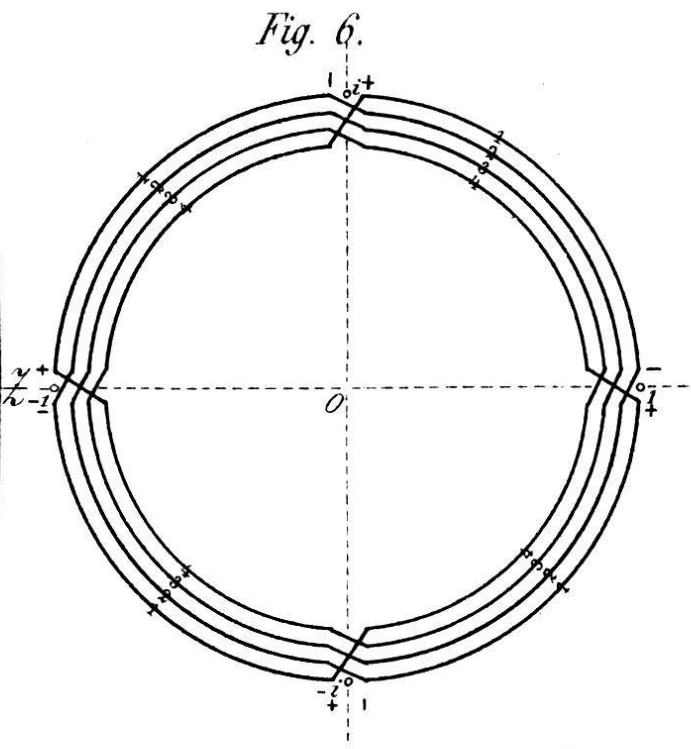


Fig. 4.

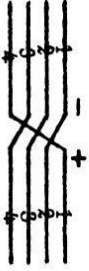


Fig. 5.

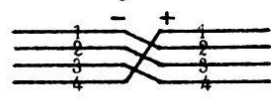


Fig. 7.

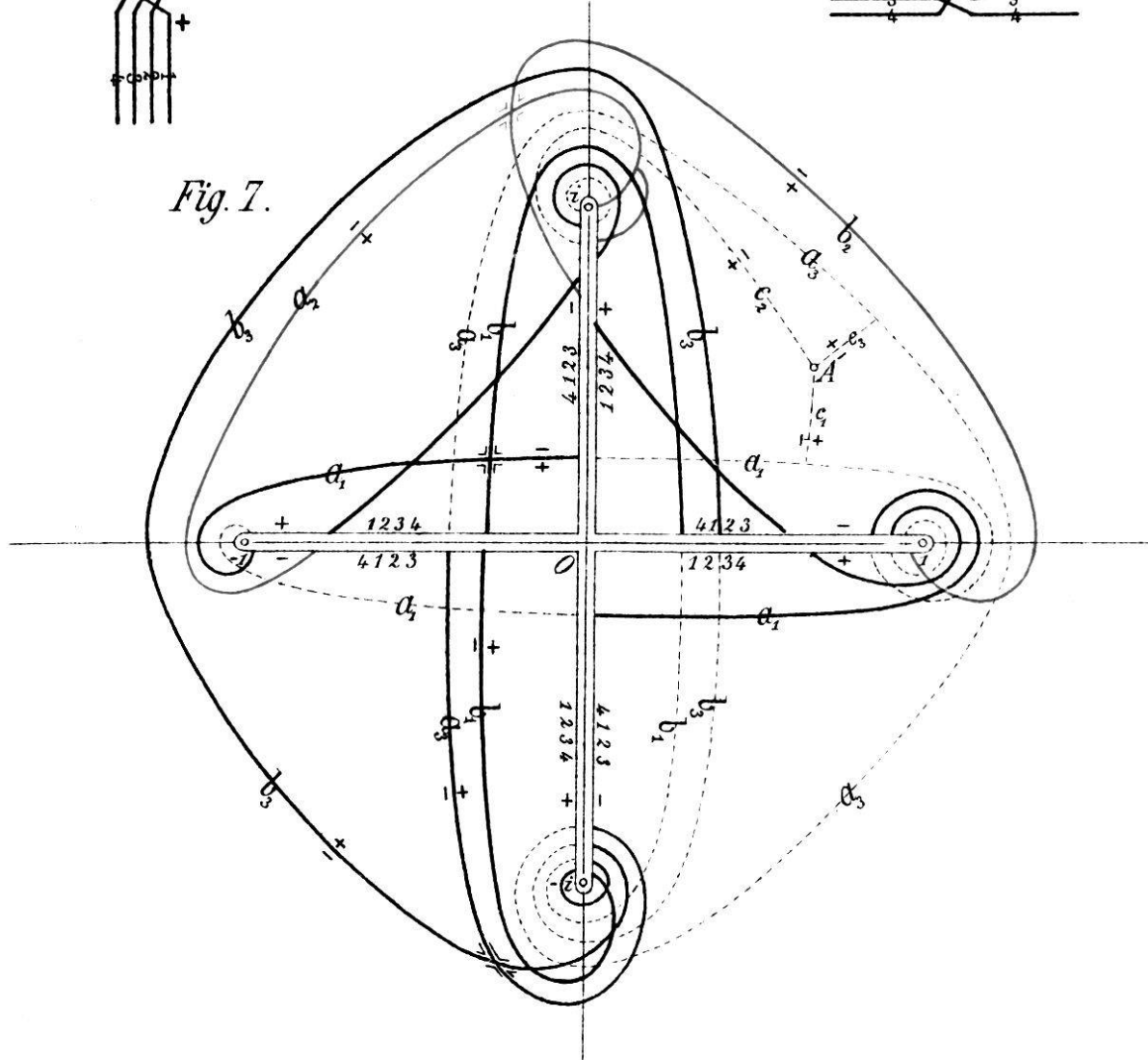


Fig. 2.

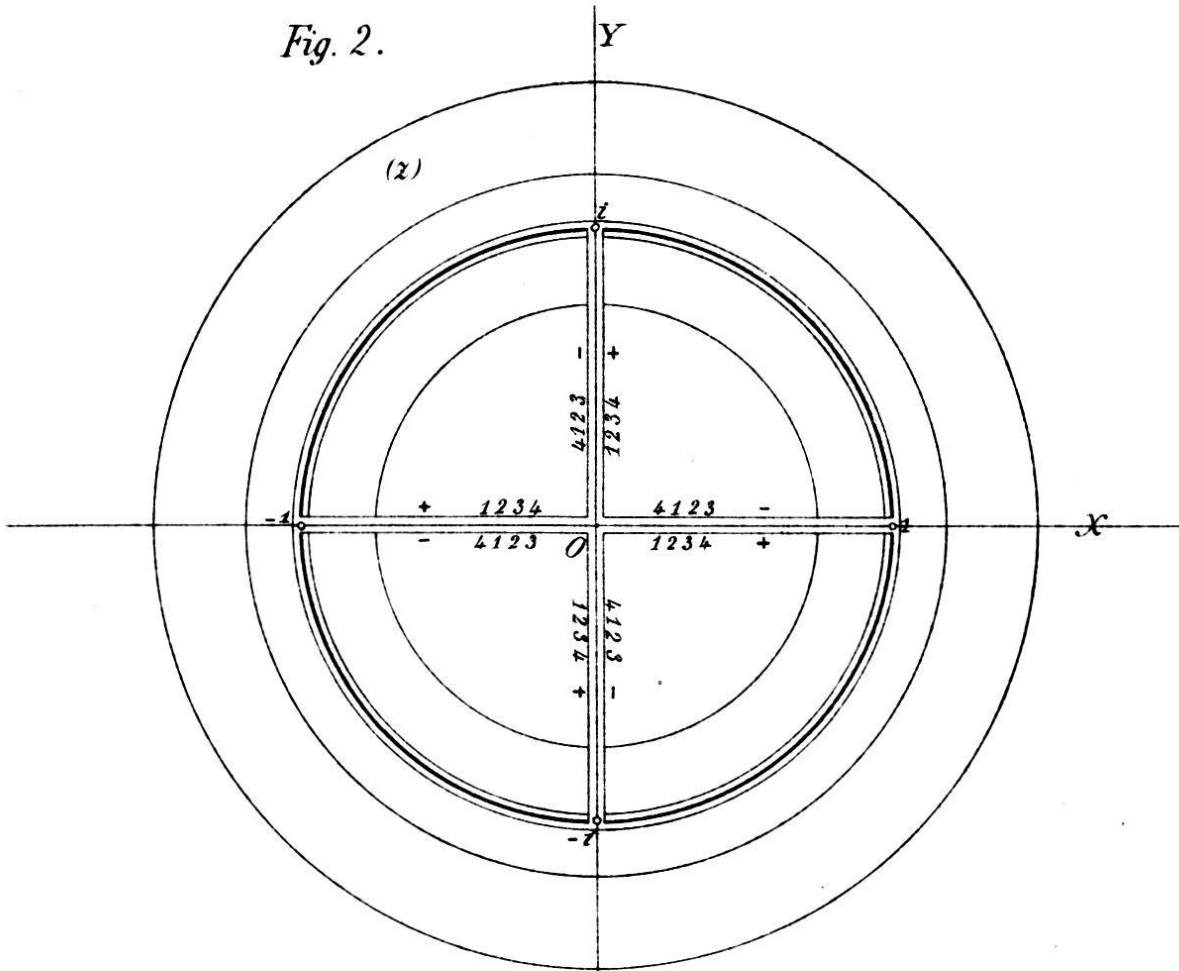


Fig. 3.

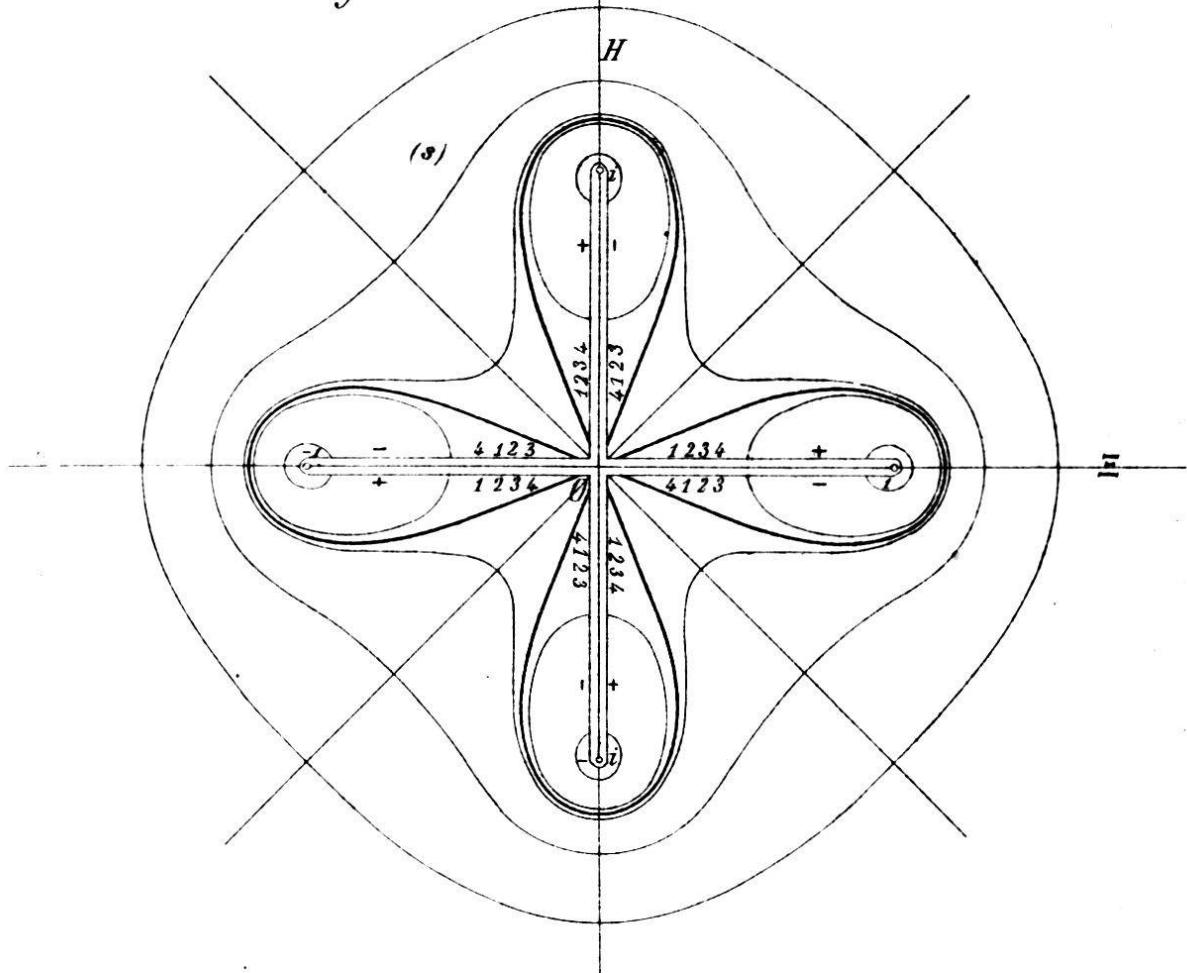


Fig. 8^a

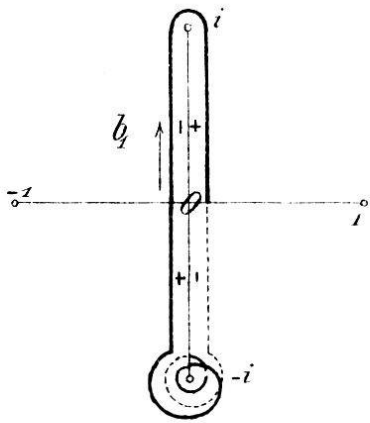


Fig. 8^b

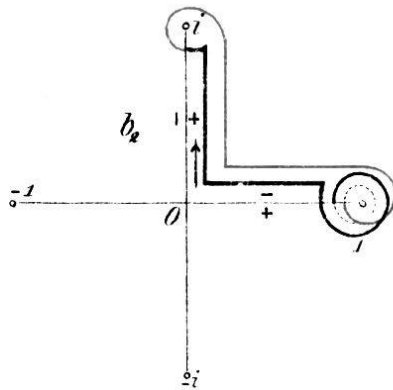


Fig. 8^c

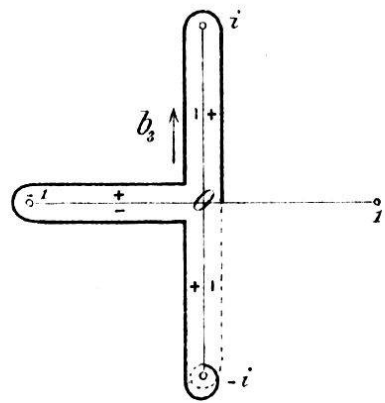


Fig. 8^d

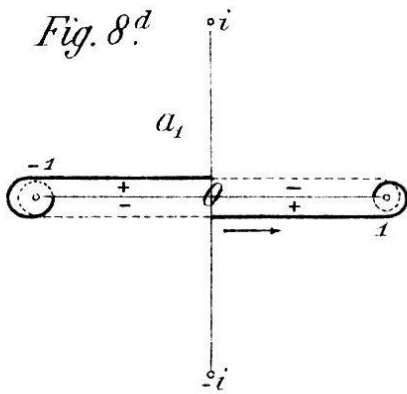


Fig. 8^e

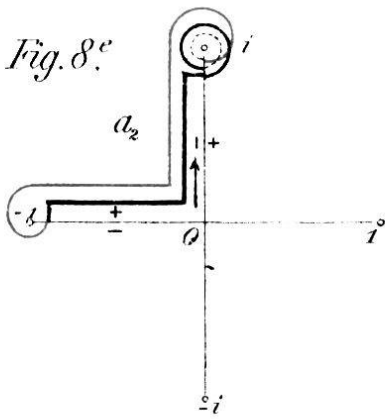


Fig. 8^f

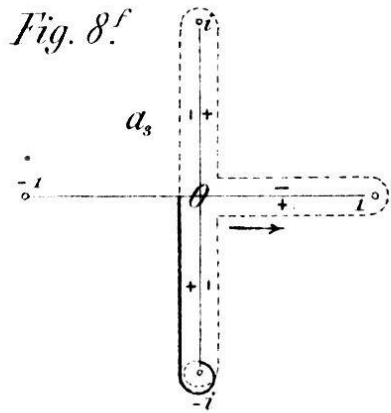


Fig. 9^a

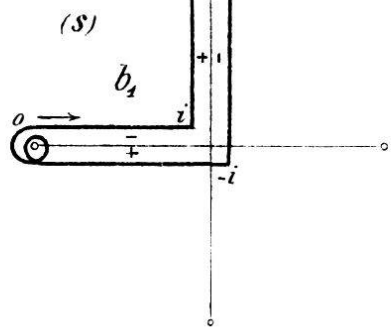


Fig. 9^b

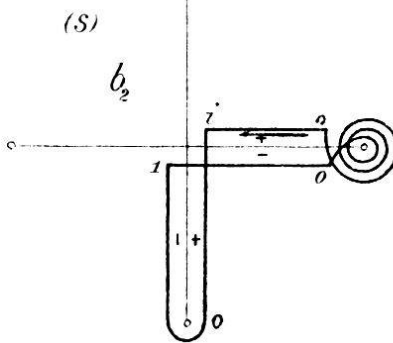


Fig. 9^c

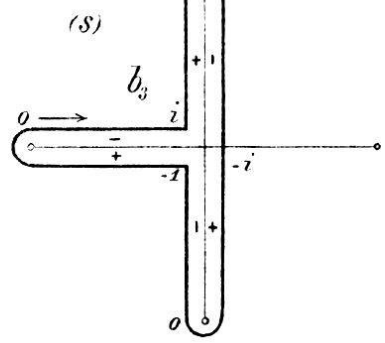


Fig. 9^d

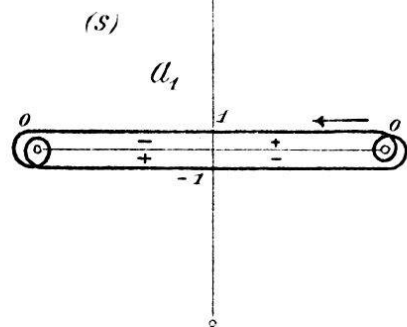


Fig. 9^e

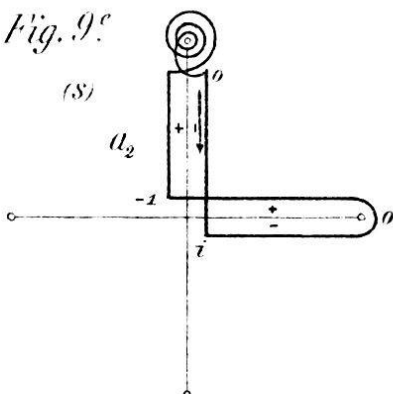


Fig. 9^f

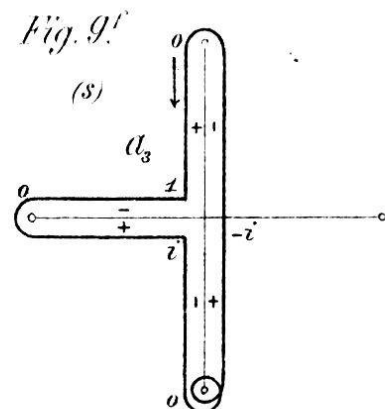


Fig. 10^a

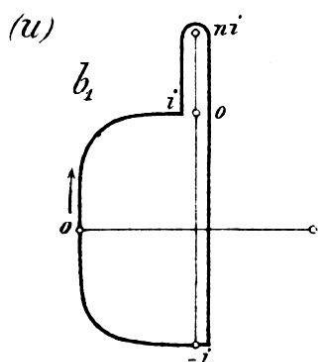


Fig. 10^b

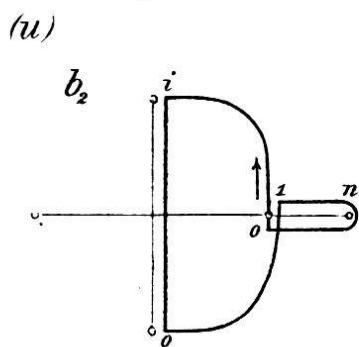


Fig. 10^c

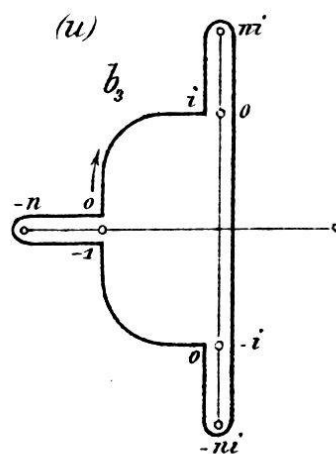


Fig. 10^d

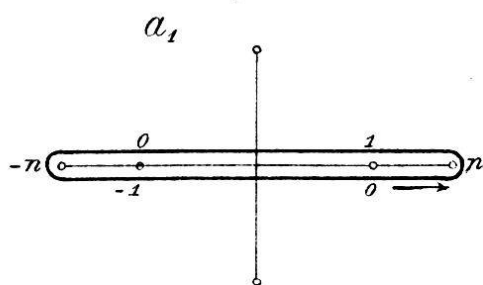


Fig. 10^e

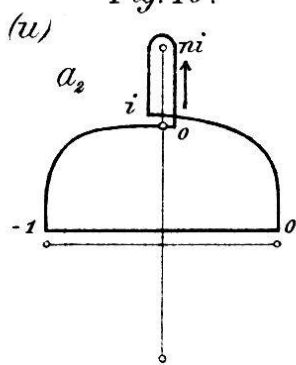


Fig. 10^f

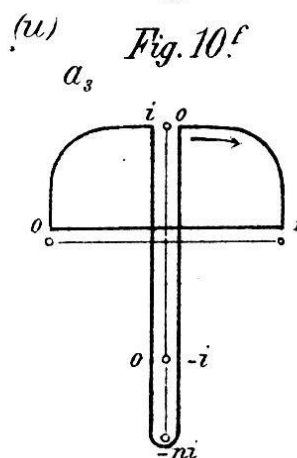


Fig. 11^a

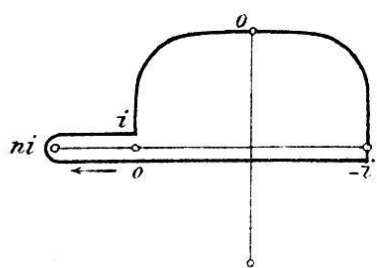


Fig. 11^b

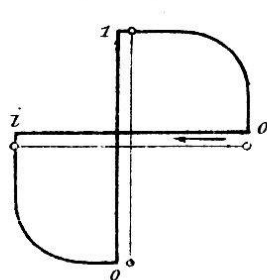


Fig. 11^c

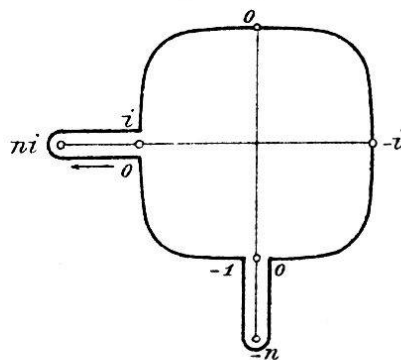


Fig. 11^d

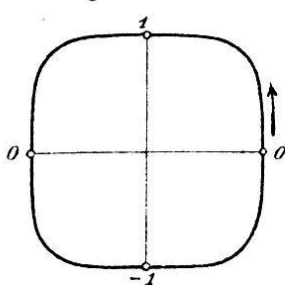


Fig. 11^e

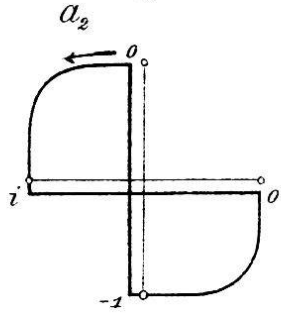
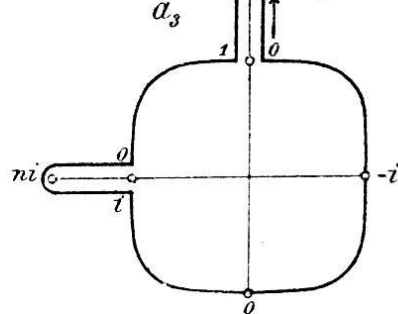
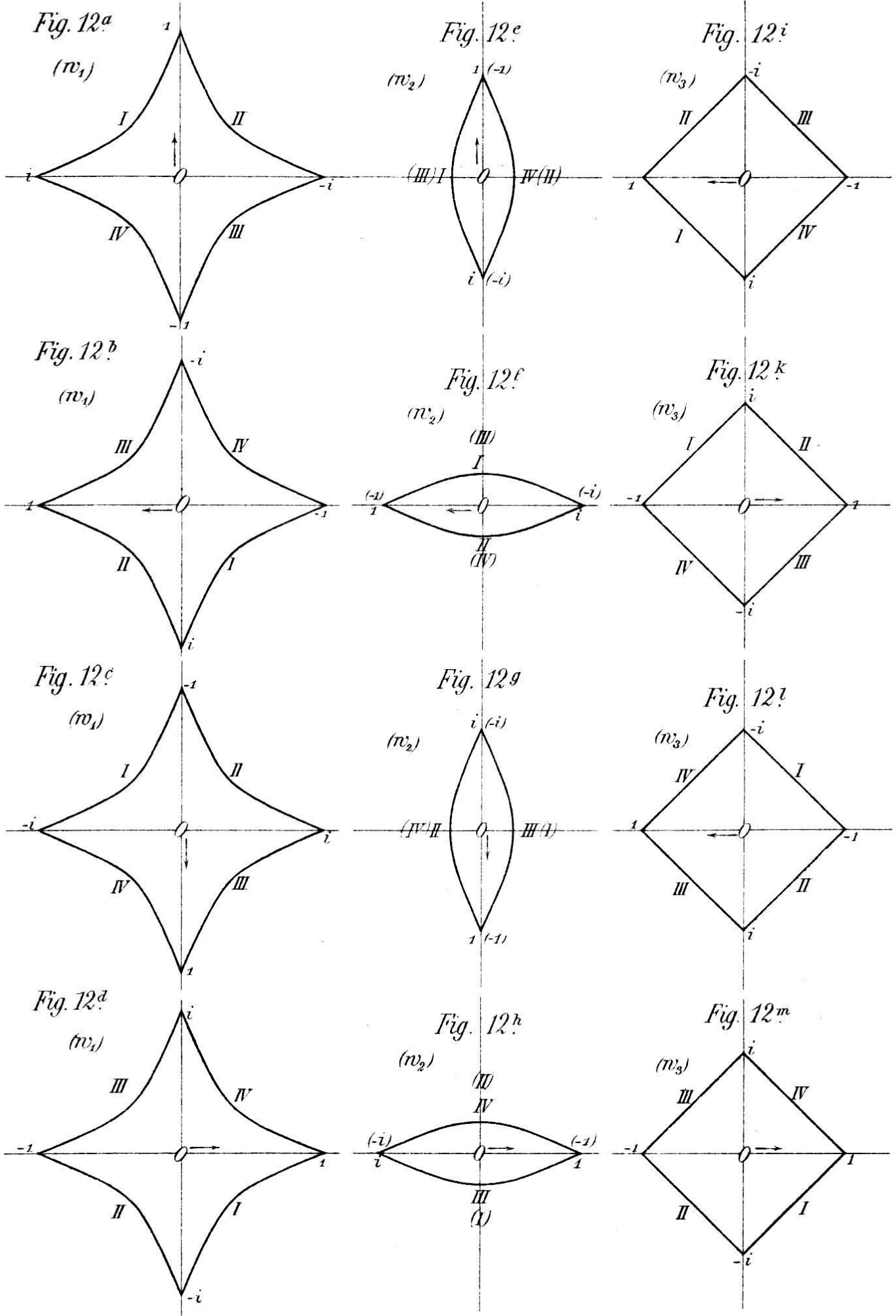


Fig. 11^f





on arrive à la formule

$$\sqrt{-\frac{\chi_{(111)}^{(001)}}{\chi_{(111)}^{(010)}}} = -\frac{\mathcal{G}_{(100)}^{(001)}}{\mathcal{G}_{(100)}^{(010)}} \cdot \frac{\mathcal{G}_{(111)}^{(001)}(v_1 v_2 v_3)}{\mathcal{G}_{(111)}^{(010)}(v_1 v_2 v_3)},$$

dans laquelle

$$\sqrt{\chi_{(111)}^{(001)}} = \Sigma \pm x_1 \sqrt{z_1}, y_1^{(1)} \sqrt{z_1^{(1)}}, \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} z_2^{(2)}}, \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} z_2^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{(111)}^{(010)}} = \Sigma \pm x_1 \sqrt{z_2}, y_1^{(1)} \sqrt{z_2^{(1)}}, \sqrt{x_1^{(2)} x_2^{(2)} z_1^{(2)}}, \sqrt{y_1^{(3)} y_2^{(3)} z_1^{(3)}}.$$

Les variables v_1, v_2, v_3 conservent toujours la même signification.

III. La caractéristique (k) est impaire, (k') paire.

Soit $(k) = (\sqrt{x}) = \binom{001}{101}, (k') = \binom{010}{101}.$

Les deux groupes

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1 x_2}) &= \binom{011}{000} = \frac{\binom{100}{100}}{x_1} + \frac{\binom{111}{100}}{x_2} = \frac{\binom{100}{111}}{\xi_2} + \frac{\binom{111}{111}}{\xi_1} = \frac{\binom{010}{011}}{\gamma''_1} + \frac{\binom{001}{011}}{\gamma''_2} = \\ &= \frac{\binom{010}{111}}{\gamma^0_2} + \frac{\binom{001}{111}}{\gamma^0_1} = \frac{\binom{101}{100}}{\gamma_2} + \frac{\binom{110}{100}}{\gamma_1} = \frac{\binom{101}{011}}{\gamma'_2} + \frac{\binom{110}{011}}{\gamma'_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1 y_1}) &= \binom{011}{011} = \frac{\binom{100}{100}}{x_1} + \frac{\binom{111}{111}}{\xi_1} = \frac{\binom{100}{111}}{\xi_2} + \frac{\binom{111}{100}}{x_2} = \frac{\binom{010}{010}}{\xi_6} + \frac{\binom{001}{001}}{x_6} = \\ &= \frac{\binom{010}{110}}{\xi_5} + \frac{\binom{001}{101}}{x_3} = \frac{\binom{101}{001}}{x_3} + \frac{\binom{110}{010}}{\xi_5} = \frac{\binom{101}{110}}{x_4} + \frac{\binom{110}{101}}{\xi_4} \end{aligned}$$

font reconnaître qu'on peut poser

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}, \quad \sqrt{x_2} = \sqrt{z+1}, \quad \sqrt{y_1} = \sqrt{\xi_1} = \sqrt{s+1}.$$

$$\sqrt{y_2} = \sqrt{\xi_2} = \sqrt{z-1}, \quad \sqrt{z_1} = \sqrt{\gamma^0_1} = \sqrt{s-z+\varepsilon},$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_3} = \sqrt{z-i}, \quad \sqrt{y} = \sqrt{\xi_3} = \sqrt{z+i}$$

et qu'alors les deux caractéristiques

$$(k_1) = (\sqrt{xyz_1}) = \binom{001}{101} + \binom{010}{110} + \binom{001}{111} = \binom{010}{100},$$

$$(k'_1) = (k') + (\sqrt{yz_1}) = \binom{010}{101} + \binom{010}{110} + \binom{001}{111} = \binom{001}{100}$$

sont paires. En introduisant ces fonctions et caractéristiques dans les formules générales, il vient

$$\mp (1+i) \sqrt{\frac{\chi_{\binom{001}{101}}}{\chi_{\binom{010}{101}}}} = \frac{\mathcal{F}_{\binom{001}{100}}}{\mathcal{F}_{\binom{010}{100}}} \cdot \frac{\mathcal{F}_{\binom{001}{101}}(v_1, v_2, v_3)}{\mathcal{F}_{\binom{010}{101}}(v_1, v_2, v_3)},$$

où

$$\sqrt{\chi_{\binom{001}{101}}} = \Sigma \pm x \sqrt{x}, z_1^{(1)} \sqrt{x^{(1)}}, \sqrt{y^{(2)} x_1^{(2)} y_1^{(2)}}, \sqrt{y^{(3)} x_2^{(3)} y_2^{(3)}},$$

$$\sqrt{\chi_{\binom{010}{101}}} = \Sigma \pm \sqrt{xx_1 x_2}, \sqrt{x^{(1)} y_1^{(1)} y_2^{(1)}}, \sqrt{y^{(2)} x_1^{(2)} y_2^{(2)}}, \sqrt{y^{(3)} x_2^{(3)} y_1^{(3)}}.$$

Il serait inutile d'insister encore sur le problème de Jacobi, attendu qu'à l'aide de ce qui vient d'être dit, le lecteur suivra facilement jusqu'au bout l'ouvrage si souvent cité. Notre travail peut donc s'arrêter ici, d'autant plus que les deux problèmes de Jacobi et de Riemann seront repris, dans un second mémoire, à un point de vue tout différent et spécialement approprié au cas particulier qui a fait l'objet de cette étude.