Théorèmes sur les tangentes d'une conique qui sont normales à une seconde conique donnée

Autor(en): **Joly, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **26 (1890-1891)**

Heft 102

PDF erstellt am: **16.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-262540

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.

Vol. XXVI. N° 102. 1890.

THÉORÈMES

sur les tangentes d'une conique qui sont normales à une seconde conique donnée

par **H. JOLY**, inst.

Pl. I, II, III.

I. Etant données les coniques P et C, il s'agit de déterminer les tangentes de P qui sont normales à C. Les droites cherchées sont les tangentes communes à P et à la développée de C ; la développée étant de la 4e classe, il s'ensuit que les solutions sont au nombre de 8.

Si la conique P, considérée comme enveloppe, dégénère en deux points, les 8 droites ne sont pas autre chose que les normales à C passant par ces deux points. Le problème proposé est donc une généralisation du problème des normales à une conique.

On introduit ordinairement une nouvelle conique dite *directrice;* on appelle alors droites *perpendiculaires* deux droites telles que chacune d'elles passe par le pôle de l'autre par rapport à la conique directrice. Lorsque nous voudrons considérer les normales ordinaires, nous n'aurons qu'à faire dégénérer D en les points circulaires de l'infini.

Prenons pour triangle fondamental des coordonnées, le triangle autopolaire commun aux deux coniques C et D et soit

$$P=a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+2a_{12}uv+2a_{23}vw+2a_{31}wu+a_{33}w^3=0$$

l'équation tangentielle de P et

$$C=ax^2+by^2+cz^2=0$$

l'équation de C ; on sait que l'équation de la conique D peut être mise sous la forme

$$x^2+y^2+z^2=0$$

La normale à C au point (x_1, y_1, z_1), c'est-à-dire la droite passant par ce point et par le pôle de la tangente par rapport à D, aura pour équation

$$\frac{x(b-c)}{x_1}+\frac{y(c-a)}{y_1}+\frac{z(a-b)}{z_1}=0.$$

Si cette normale doit être tangente à P, ses coordonnées tangentielles

$$u:v:w=\frac{b-c}{x_1}:\frac{c-a}{y_1}=\frac{a-b}{z_1}$$

doivent satisfaire à l'équation $P=0$; on obtient ainsi, après avoir chassé les dénominateurs,

$$\begin{gathered}a_{11}(b-c)^2y_1^2z_1^2+a_{22}(c-a)^2z_1^2x_1^2+a_{33}(a-b)^2x_1^2y_1^2+\\+2a_{12}(b-c)(c-a)x_1y_1z_1^2+2a_{23}(c-a)(a-b)y_1z_1x_1^2+\\+2a_{31}(b-c)(a-b)z_1x_1y_1^2=0.\end{gathered}$$

Cette équation représente, en considérant x_1 y_1 comme coordonnées courantes, une courbe du 4^e degré que nous nommerons H. Les sommets du triangle des coordonnées sont des points doubles de cette courbe.

Les 8 points d'intersection de H avec C sont les pieds des normales cherchées. En prenant pour directrice les points circulaires de l'infini, nous aurons :

Les 8 pieds des normales cherchées sont sur une courbe du 4^e degré ayant 3 points doubles, savoir : le centre de la conique C et les points de l'infini sur les axes.

On voit aisément que la réciproque de ce théorème est vraie, c'est-à-dire :

Si 8 points d'une conique C sont sur une courbe du 4^e degré ayant pour points doubles le centre de C et les points de l'infini sur les axes, les 8 normales en ces points sont tangentes à la même conique.

La courbe H peut être construite de la manière suivante :

Soit d un diamètre de C et d' son conjugué. Les deux tangentes de P perpendiculaires à d' coupent d, chacune en un point; le lieu de ces points est la courbe H. En effet, on voit facilement que le lieu doit passer 2 fois par le centre et les points de l'infini sur les axes; de plus, les points d'intersection du lieu avec C sont les pieds des tangentes de P normales à C.

Par 3 points doubles et 8 points simples, il ne peut passer 2 courbes du 4^e^ ordre. La construction précédente nous montre que si C varie de manière que l'involution des diamètres conjugués ne change pas, la courbe H reste la même, c'est-à-dire :

P restant fixe, si C varie de manière à rester semblable à elle-même, les pieds des tangentes de P normales à C sont constamment sur la même courbe H.

Les considérations dualistiques de celles qui précèdent nous feraient voir que les tangentes en les pieds des 8 normales font partie d'une enveloppe E, de la classe 4, doublement tangente aux axes de C et à la droite de l'infini. Cette enveloppe ne change pas, si, P restant fixe, C varie de manière à conserver les mêmes foyers.

Si P dégénère en deux points, H dégénère en deux hyperboles équilatères passant par le centre et les points de l'infini sur les axes (la construction géométrique de H le montre suffisamment). E se compose alors de deux paraboles tangentes aux axes et les théorèmes précédents deviennent des théorèmes bien connus relatifs aux 4 normales abaissées d'un point à une conique donnée. (Voir : Steiner, *Journal de Crelle*, vol. 49, ou *Journal de Liouville*, vol. 20.

II. *La conique C et la directrice D étant données, appelons A_1, A_2 les points d'intersection de C avec un des côtés du triangle autopolaire commun à C et à D. Soient I_1, I_2, les points d'intersection d'une conique quelconque K avec le même côté ; M_1, M_2, les conjugués harmoniques des points I par rapport à A_1, A_2; N_1, N_2, les conjugués harmoniques des points M par rapport aux sommets du triangle ; les 6 points tels que N, situés sur les 3 côtés du triangle, sont sur une conique K'. Les coniques K et K' coupent C en 8 points tels que les 8 normales à C, en ces points, sont tangentes à la même conique.* (Fig. 1).

Soit

$$K = \alpha_{11} x^2 + \alpha_{22} y^2 + \alpha_{33} z^2 + 2\alpha_{12} xy + 2\alpha_{23} yz + 2\alpha_{31} xz = 0.$$

Les points d'intersection I_1, I_2 de K avec l'axe $z = 0$ sont donnés par

$$\alpha_{11} x^2 + 2\alpha_{12} xy + \alpha_{22} y^2 = 0$$

Si (x_1, y_1) est l'un de ces points, le point M correspondant aura pour coordonnées

$$(-by_1, ax_1)$$

et les coordonnées du point N seront

$$by_1, ax_1.$$

En substituant dans l'équation ci-dessus x et y respectivement par by et ax, nous aurons

$$\alpha_{11} b^2y^2 + \alpha_{22}a^2x^2 + 2\,\alpha_{12}\,abxy = 0$$

équation qui détermine les points N.

Sur chaque côté du triangle autopolaire on obtiendrait deux points analogues donnés par les équations

$$\alpha_{11}b^2y^2 + \alpha_{22}a^2x^2 + 2\,\alpha_{12}abxy = 0$$

$$\alpha_{22}c^2z^2 + \alpha_{33}b^2y^2 + 2\,\alpha_{23}bcyz = 0$$

$$\alpha_{33}a^2x^2 + \alpha_{11}c^2z^2 + 2\,\alpha_{31}cazx = 0.$$

L'équation

$$\mathrm{K}' = \alpha_{22}\alpha_{33}a^2x^2 + \alpha_{33}\alpha_{11}b^2y^2 + \alpha_{11}\alpha_{22}c^2z^2 + 2\,\alpha_{12}\alpha_{33}abxy + $$
$$+ 2\,\alpha_{23}\alpha_{11}bcyz + 2\,\alpha_{31}\alpha_{22}cazx = 0.$$

représente évidemment une conique passant par les 6 points N, c'est-à-dire la conique K'. Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients de la conique

$$\mathrm{S} = s_{11}x^2 + s_{22}y^2 + s_{33}z^2 + 2\,s_{12}xy + 2\,s_{23}yz + 2\,s_{31}zx = 0$$

de manière à rendre l'équation

$$\mathrm{KK}' + \mathrm{CS} = 0$$

de la forme $\mathrm{H} = 0$, c'est-à-dire qu'il faut faire passer, si cela est possible, par les points d'intersection de C avec K et K', une courbe du 4^e^ degré, ayant pour points doubles les 3 sommets du triangle fondamental.

Les coefficients de x^4, y^4, z^4, x^3y, y^3z, x^3z, y^3x, z^3y, z^3x, doivent être nuls.

En annulant les ceofficients de x^4, y^4, z^4, on obtient

$$s_{11} + \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}a = 0$$

$$s_{22} + \alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{11}b = 0$$

$$s_{33} + \alpha_{33}\alpha_{11}\alpha_{22}c = 0$$

En annulant les coefficients de x^3y, y^3z, z^3x, il vient

$$s_{12} + b\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{33} + a\alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{33} = 0$$

$$s_{23} + c\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{11} + b\alpha_{23}\alpha_{33}\alpha_{11} = 0$$

$$s_{31} + a\alpha_{33}\alpha_{31}\alpha_{22} + c\alpha_{31}\alpha_{11}\alpha_{22} = 0$$

De ces six équations on déduit

$$s_{11} = a\,\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}$$

$$s_{22} = b\,\alpha_{22}\alpha_{33}\alpha_{11}$$

$$s_{33} + c\,\alpha_{33}\alpha_{11}\alpha_{22}$$

$$s_{12} = -\,\alpha_{12}\alpha_{11}\alpha_{33}\,b - \alpha_{12}\alpha_{22}\alpha_{33}a$$

$$s_{23} = -\,\alpha_{23}\alpha_{22}\alpha_{11}\,c - \alpha_{23}\alpha_{33}\alpha_{11}b$$

$$s_{31} = -\,\alpha_{31}\alpha_{33}\alpha_{22}a - \alpha_{31}\alpha_{11}\alpha_{22}\,c$$

Le coefficient de x^3z étant

$$2\,as_{13} + 2\,ac\,\alpha_{11}\alpha_{13}\alpha_{22} + 2\,a^2\alpha_{13}\alpha_{33}\alpha_{22}$$

en remplaçant, dans cette expression, s_{13} par sa valeur, ce coefficient s'annule. Il en est de même des coefficients de y^3x, z^3y. Les 8 points considérés sont donc sur une courbe telle que $\mathrm{H} = 0$, donc, d'après un théorème précédent, les 8 normales en ces points sont tangentes à la même conique.

Nous nommerons K′ la *correspondante* de K; réciproquement K est la correspondante de K′.

Soient Δ et Δ' les discriminants de ces deux coniques, on a

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33}, & \alpha_{12}\alpha_{33}, & \alpha_{13}\alpha_{22} \\ \alpha_{12}\alpha_{33}, & \alpha_{33}\alpha_{11}, & \alpha_{23}\alpha_{11} \\ \alpha_{31}\alpha_{22}, & \alpha_{23}\alpha_{11}, & \alpha_{11}\alpha_{22} \end{vmatrix} a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2\alpha_{11}{}^2\alpha_{22}{}^2\alpha_{33}{}^2 \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} & \dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{33}} \\ \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & 1 & \dfrac{\alpha_{23}}{\alpha_{33}} \\ \dfrac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} & \dfrac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2c^2\,\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix} = a^2b^2c^2\,\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\,\Delta.$$

Si C n'est pas composée de 2 droites, et si P n'est pas tangente à l'un des côtés du triangle fondamental, aucun des coefficients a, b, c, α_{11}, α_{22}, α_{33} n'est nul; dans ce cas, K′ dégénère en deux droites en même temps que K. Nous verrons plus tard ce qui arrive lorsque P touche l'un des côtés du triangle.

En prenant pour conique directrice les points circulaires de l'infini, le théorème précédent devient :

Soient I_k les points d'intersection de K avec les axes de C. Déterminons sur chaque axe les symétriques M_k des points I_k par rapport au centre, puis les conjugués harmoniques N_k des points M_k par rapport aux sommets de C; on obtiendra en tout 4 points. De plus, menons par le centre de C les parallèles aux asymptotes de K, construisons les symétriques de ces parallèles par rapport aux axes, et enfin déterminons les diamètres conjugués d, d′ de ces symétriques. Il existe une conique K′ passant par les 4 points N_k et ayant pour direction des asymptotes les droites d, d′. K et K′, coupent la conique C en 8 points. Les normales à C en ces points sont 8 tangentes d'une même conique.

III. Lorsque K dégénère en deux droites $t=0$, $m=0$, K′ se compose aussi de deux droites $t'=0$ et $m'=0$. Soit, dans ce cas

$$t = t_1x + t_2y + t_3z = 0 \quad \text{et}$$

$$m = m_1x + m_2y + m_3z = 0$$

on obtient pour t' et m'

$$t' = \frac{a}{t_1}x + \frac{b}{t_2}y + \frac{c}{t_3}z = 0$$

$$m' = \frac{a}{m_1}x + \frac{b}{m_2}y + \frac{c}{m_3}z = 0.$$

La courbe du 4e ordre

$$(tt' - C)(mm' - C) = 0$$

fait partie du faisceau

$$KK' + \lambda\, CS = 0.$$

Or, $tt' - C = 0$ et $mm' - C = 0$ sont deux coniques passant par les sommets du triangle fondamental; donc, d'après un théorème connu, les 4 normales aux points d'intersection de C avec t, t' sont concourantes. Il en est de même pour les 4 normales aux points d'intersection de m, m' avec C. La conique tangente aux 8 normales dégénère en 2 points.

Si l'on considère le pôle de t' par rapport à C, t est l'harmonicale de ce pôle par rapport au triangle fondamental. On a donc, comme cas particulier du théorème II, le théorème suivant dû à Joachimsthal (*Journal de Crelle,* vol. 26. Voir aussi Cayley, même journal, vol. 56) :

Si d'un point donné, on fait passer les 4 droites normales à une conique donnée, un côté quelconque du quadrilatère des pieds des normales sera l'harmonicale, par rapport au triangle fondamental, du pôle du côté opposé.

IV. Etant donnés 5 points sur la conique C, soit P, la conique tangente aux 5 normales en ces points; il existe encore 3 autres droites normales à C et tangentes à P. Soit

$$K = \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\,\alpha_{12}xy + 2\,\alpha_{23}yz + 2\,\alpha_{31}xz = 0$$

une conique quelconque, mais passant par 4 des 5 points donnés. Si l'on détermine λ de manière que la *correspondante* de

$$K + \lambda C = 0$$

passe par le 5e point (x_1, y_1) et par conséquent (II) par les pieds des 3 autres normales, on aboutit à une équation de la forme

$$abc\,(ax_1{}^2 + by_1{}^2 + c)\,\lambda^2 + A\lambda + B = 0,$$

A et B étant fonctions des coefficients de $K = 0$ et de $C = 0$. Il y a en général 2 solutions; mais, comme (x_1, y_1) est sur $C = 0$, le coefficient de λ^2 est nul; une des racines de l'équation est infinie, ce qui donne la conique $C = 0$ qui correspond à elle-même. *Outre la conique $C = 0$, il existe toujours une conique et une seule, passant par 4 des pieds, telle que sa correspondante passe par les 4 autres.*

Etant donnée la conique C, les points circulaires de l'infini étant conique directrice, cherchons la conique correspondant à un cercle. Soit K ce cercle. Appelons O_1, O_2 les points circulaires de la droite de l'infini; B_1, B_2 les points de l'infini sur les axes; A_1, A_2 les points d'intersection de C avec la droite de l'infini.

Les points O_1, O_2 sont conjugués harmoniques par rapport à B_1, B_2. Appelons M_1, M_2 les quatrièmes harmoniques de O_1, O_2 par rapport à A_1 A_2 : les paires O_1, O_2; A_1, A_2; M_1, M_2 forment une involution ayant B_1 et B_2 pour points doubles. Or M_1 et M_2 sont, d'après II, les points d'intersection de K′ (correspondante de K), avec la droite de l'infini; l'involution ci-dessus n'est pas autre chose que l'involution que détermine sur la droite de l'infini le faisceau

$$K' + \lambda C = 0$$

$C = 0$, $K = 0$, $K' = 0$ représentant les équations des courbes C, K, K′ rapportées aux axes de C.

Une des coniques de ce faisceau passe donc par les points O_1, O_2, c'est-à-dire est un cercle. Donc :

Etant donnés 8 points sur C, tels que les normales en ces points soient tangentes à la même conique, si 4 de ces points sont sur un même cercle, il en est de même des 4 autres.

Soient, sur la conique C, 4 points A, B, R, T, formant un quadrilatère inscriptible dans un cercle. A une conique quelconque G passant par ces points, correspond une conique G′ qui généralement n'est pas un cercle. G′ détermine, sur C, quatre nouveaux points situés sur un cercle. Les normales en ces 8 points sont tangentes à la même conique.

Si G varie de manière à parcourir le faisceau ayant pour points de base A, B, R, T, la courbe P reste constamment tangente aux 4 normales à C aux points A, B, R, T; G′ varie et détermine sur C une infinité de quadrilatères inscriptibles dans un cercle.

Nous ferons voir que *le lieu des cercles circonscrits à ces quadrilatères est une ligne droite.* Soit un cercle ayant pour équation

$$K = x^2 + y^2 + 2\,\alpha x + 2\,\beta y + q = 0 \quad \text{et soit}$$

G une conique de la forme

$$K + \lambda C = 0.$$

La conique G′ correspondante a pour équation

$$G' = (1+\lambda b)(q+\lambda c)a^2x^2 + (q+\lambda c)(1+\lambda a)b^2y^2 + 2\alpha(1+\lambda b)cax$$
$$+ 2\beta(1+\lambda a)bcy + (1+\lambda a)(1+\lambda b)c^2 = 0$$

L'équation de C étant

$$C = ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

la conique

$$G' + (q + \lambda c)(a + b + \lambda ab)\, C = 0$$

représente une conique passant par les points d'intersection de G′ avec C. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$-(q+\lambda c)ab(x^2+y^2) + 2\alpha(1+\lambda b)cax + 2\beta(1+\lambda a)bcy + R = 0$$

Elle représente un cercle quel que soit λ. Les coordonnées du centre sont :

$$X = \frac{\alpha(1+\lambda b)c}{(q+\lambda c)b}$$

$$Y = \frac{\beta(1+\lambda a)c}{(q+\lambda c)a}$$

Eliminant λ, on trouve

$$X\, b\beta\,(c - aq) - Y\, a\alpha(c - bq) + c\alpha\beta\,(a - b) = 0$$

Cette équation représentant le lieu des centres, celui-ci est bien une ligne droite.

VI. Etant données la conique C et la directrice D, soit

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^3 + 2\,a_{12}uv + 2\,a_{13}vw + 2\,a_{31}wu = 0$$

l'équation d'une conique P en coordonnées tangentielles ayant le triangle autopolaire commun aux deux coniques C et D pour triangle fondamental. Si P est tangente au côté ($w=0$, $v=0$) du triangle, on doit avoir $a_{11}=0$. La courbe du 4^e degré qui détermine sur C les pieds des normales qui sont tangentes à P, sera

$$a_{22}(c-a)^2z^2x^2 + a_{33}(a-b)^2x^2y^2 + 2a_{12}(b-c)(c-a)xyz^2 +$$
$$+ 2a_{23}(c-a)(a-b)yzx^2 + 2a_{31}(b-c)(a-b)zxy^2 = 0$$

Cette courbe se compose du côté $x=0$ du triangle autopolaire et d'une courbe du 3ᵉ degré ayant pour point double le sommet S, opposé au côté $x=0$.

Deux des 8 normales sont confondues avec le côté $x=0$; les deux pieds de ces normales sont les points d'intersection A_1 A_2 de C avec $x=0$.

Outre $x=0$, il y a 6 autres normales. Soit S_1, S_2, S_3 le triangle fondamental.

Une conique K, passant par les pieds de 4 de ces normales ainsi que par le sommet S_1, opposé à $x=0$, a pour correspondante une conique formée de la droite $x=0$ qui donne les deux pieds A_1, A_2 et d'une autre droite g qui passe par les pieds des deux autres normales.

La conique K coupe les côtés S_1, S_2 et S_1, S_3 en deux autres points. Le pôle, par rapport à C, de la ligne qui joint ces points, a la droite g pour harmonicale par rapport au triangle S_1, S_2, S_3.

En prenant pour directrice les points circulaires de l'infini, le côté $x=0$ devenant la droite de l'infini, on a ce qui suit :

Les tangentes d'une parabole P normales à une conique C sont au nombre de 6, déterminées par l'intersection avec C d'une courbe unicursale du 3ᵉ ordre passant par les points de l'infini sur les axes et ayant pour point double le centre de C. La droite de l'infini peut être considérée comme normale double.

Une conique K, passant par le centre de C et 4 pieds des normales, coupe encore chaque axe en un point autre que le centre. Si L est le pôle de la ligne qui joint ces points, l'harmonicale de L par rapport au triangle formé par les axes et la droite de l'infini passe par les pieds des deux autres normales.

Ce théorème sert à déterminer 2 des pieds, quand on en connaît 4; il peut s'énoncer ainsi :

Etant donnés 6 points A, B, R, T, E, F sur la conique C, de manière que les normales en ces points soient tangentes à une parabole, la conique passant par A, B, R, T et le centre de C, coupe les axes de celle-ci en deux points outre le centre.

La ligne qui joint ces deux points coupe C en deux points M, N. Les normales à C aux points E, F, M, N concourent en un même point. (Fig. 2.)

On obtient un théorème tout à fait analogue au théorème précédent en supposant que la conique P soit tangente à un axe au lieu d'être une parabole.

VII. Si la conique P est tangente aux deux axes, la courbe du 4ᵉ degré qui détermine les pieds des normales se compose des 2 axes et d'une hyperbole équilatère H ayant ses asymptotes parallèles aux axes (elle ne passe pas par le centre de C comme dans le cas des normales issues d'un point). Les axes étant des normales doubles, il reste 4 droites normales à C et tangentes à P.

La conique correspondante de l'hyperbole H se compose des axes. *Les 4 sommets de la conique C n'étant pas sur un cercle, les 4 pieds des normales ne sont jamais sur un cercle.*

Etant donnés sur C, les 4 points A, B, R, T, tels que les normales en ces points et les axes soient tangentes d'une conique P, le symétrique de l'un de ces points par rapport au centre de C est sur le cercle qui passe par les trois autres. (Fig. 3.)

Pour le démontrer, soit

$$C = ax^2 + by^2 + c = 0$$

l'équation de la conique proposée, la directrice se composant des points circulaires de l'infini. Soient de plus

$$mx + ny + p = 0 \qquad \text{et}$$

$$rx + sy + q = 0$$

les équations respectives de RT et AB.

Nous pouvons déterminer r et s de manière que

$$(mx + ny + p)(rx + sy + q) + ax^2 + by^2 + c = 0$$

soit l'équation d'une hyperbole équilatère passant par les points de l'infini sur les axes. Pour cela, les coefficients de x^2 et y^2 doivent être nuls ; on doit donc avoir

$$r = -\frac{a}{m} \text{ et } s = -\frac{b}{n}$$

et l'équation de AB devient

$$\frac{a}{m} x + \frac{b}{n} y - q = 0$$

ou, en remplaçant mnq par k

$$anx + bmy - k = 0.$$

Comme AB doit passer par le point A (x_1, y_1), on doit avoir

$$k = anx_1 + bmy_1$$

L'hyperbole H a pour équation

$$(anx + bmy - k)(mx + ny + p) - mn(ax^2 + by^2 + c) = 0$$

ou

$$xy(an^2 + bm^2) + x(pan - km) + y(pbm - kn) - pk - mnc.$$

$$axx_1 + byy_1 + c = 0 \text{ et } xy_1 - yx_1 = 0$$

sont les équations respectives de la tangente en A et de la droite AA'.

Déterminons α, β, γ de manière que

$$(xy_1 - yx_1)(anx + bmy - k) + (\alpha x + \beta y + \gamma)(axx_1 + byy_1 + c) = 0$$

représente l'équation de la conique C, c'est-à-dire qu'il faut déterminer α, β, γ et λ, de manière que l'on ait identiquement

$$(xy_1 - yx_1)(anx + bmy - k) + (\alpha x + \beta y + \gamma)(axx_1 + byy_1 + c) =$$

$$\lambda(ax^2 + by^2 + c) = 0$$

On trouve facilement qu'il faut et qu'il suffit pour cela que l'on ait

$$\lambda = \gamma = ny_1 - mx_1$$

$$\alpha = -m, \beta = n$$

L'équation de A' B est donc

$$mx + ny + mx_1 - ny_1 = 0$$

On reconnaît qu'elle passe par le point A' $(-x_1, -y_1)$. Le faisceau de coniques passant par A', B, R, T est représenté par

$$(mx + ny + p)(mx - ny + mx_1 - ny_1) + \mu(ax^2 + by^2 + c) = 0$$

μ étant un paramètre. Le coefficient de xy étant nul, il est possible de déterminer μ de manière que les coefficients de x^2 et y^2 soient égaux ; on trouve

$$\mu = \frac{m^2 + n^2}{a - b}$$

Le cercle passant par A′, B, R, T a pour équation

$$(bm^2 + an^2)(x^2 + y^2) + xm(b - a)(mx_1 - ny_1 + p)$$
$$+ ny(a - b)(ny_1 - mx_1 + p) + \mathrm{R} = 0,$$

R représentant une quantité constante. Les coordonnées du centre sont

$$\mathrm{X} = \frac{m(a - b)(mx_1 - ny_1 + p)}{2(an^2 + bm^2)}$$

$$\mathrm{Y} = \frac{n(b - a)(ny_1 - mx_1 + p)}{2(an^2 + bm^2)}$$

Etant données les coniques P et C ainsi que A, l'un des pieds, on peut déterminer le centre du cercle qui passe par les trois autres pieds et le symétrique de A_1 de la manière suivante :

Soit N le point d'intersection des parallèles aux axes passant par les points de rencontre de ceux-ci avec la normale en A; soit N′ le symétrique de N par rapport au centre de C, et soit E le symétrique du centre de C par rapport au centre de la conique P; le centre du cercle cherché se trouve au milieu de la ligne EN′. (Fig. 3.)

Soit

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0$$

l'équation de P en coordonnées tangentielles. Si P. doit être tangente aux axes, on doit avoir $a_{11} = a_{22} = 0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{P} = 2a_{12}uv + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0.$$

Le centre a pour équation

$$a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = 0$$

et par conséquent pour coordonnées

$$\frac{a_{13}}{a_{33}}, \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

L'équation de la normale en A (x_1, y_1) étant

$$by_1x - ax_1y + x_1y_1(a-b) = 0,$$

les coordonnées tangentielles de cette droite doivent satisfaire à l'équation $P = 0$. On obtient

$$a_{33}x_1y_1(a-b)^2 + 2a_{23}a(b-a)x_1 + 2a_{13}b(a-b)y_1 - 2a_{13}ab = 0,$$

équation qui représente l'hyperbole équilatère passant par les pieds des 4 normales, x_1, y_1 étant considérées comme coordonnées courantes.

D'autre part nous avons trouvé pour l'équation de cette hyperbole

$$xy(an^2+bm^2) + x(pan-km) + y(pbm-kn) - pk - mnc = 0$$

où k représente $anx_1 + bmy_1$.

Cette équation doit être identique à la précédente; on doit donc avoir, ν étant un certain facteur,

$$2\,a_{13}(a-b)\,b = \nu\,(pbm - kn)$$

$$2\,a_{23}(b-a)\,a = \nu\,(pan - km)$$

$$a_{33}(a-b)^2 = \nu\,(an^2 + bm^2)$$

d'où

$$\frac{2\,a_{13}}{a_{33}} = \frac{(pbm-kn)(a-b)}{b(an^2+bm^2)}$$

$$\frac{2\,a_{23}}{a_{33}} = \frac{(pan-mk)(b-a)}{a(bm^2+an^2)}$$

$\frac{a_{13}}{a_{33}}$ et $\frac{a_{23}}{a_{33}}$ étant les coordonnées du centre de P, le symétrique E du centre de C par rapport au centre de P, aura pour coordonnées

$$\frac{(pbm - an^2x_1 - bmny_1)(a-b)}{b(an^2+bm^2)}$$

$$\frac{(pan - amnx_1 - bm^2y_1)(b-a)}{a(bm^2+an^2)}$$

On trouve pour les coordonnées de N'

$$\frac{a-b}{b}\,x_1 \text{ et } \frac{b-a}{a}\,y_1$$

Le point milieu de EN′ aura pour coordonnées

$$\frac{m(a-b)(mx_1-ny_1+p)}{2(an^2+bm^2)}$$

$$\frac{n(b-a)(ny_1-mx_1+p)}{2(bm^2+an^2)}$$

Ces expressions étant les mêmes que celles trouvées plus haut pour les coordonnées du centre du cercle passant par A′, B, R, T, le théorème est démontré.

Connaissant les coordonnées du centre de P et du centre du cercle A′, B, R, T, on vérifie facilement que la normale en A et sa parallèle menée par le centre du cercle sont symétriques par rapport au point milieu de la distance des centres des coniques P et C. On peut donc énoncer ce qui suit :

Si, du centre du cercle passant par les pieds de 3 normales, on mène une parallèle à la 4e, les 4 droites d, *que l'on peut mener de la sorte, forment un quadrilatère symétrique du quadrilatère des 4 normales. Le centre de symétrie est le milieu de la ligne des centres des deux coniques proposées.*

On obtiendrait des théorèmes analogues aux théorèmes précédents en supposant que la conique P soit une parabole tangente à une axe de C, et en remarquant que les foyers de la courbe C jouent un rôle analogue aux points circulaires de l'infini.

La conique P ne cesse pas d'être tangente aux axes si elle dégénère en deux points, savoir : le centre de C et un point quelconque M. Le théorème précédent devient alors un théorème de Joachimsthal (voir *Journal de Crelle,* vol. 26).

Les 4 normales étant concourantes, les 4 lignes *d* menées par les centres des cercles passant par 3 des pieds se coupent au même point et l'on a un théorème de M. Laguerre *(Comptes-rendus de l'Académie des sciences).* Trois des 4 points d'intersection d'un cercle quelconque avec la conique C et le symétrique du 4e par rapport au centre de cette conique sont tels que les normales à C en ces points sont non pas concourantes, mais tangentes à une conique tangente aux axes. La réciproque du théorème de Joachimstal n'est pas toujours vraie.

VIII. Soient les 4 points A, B, R, T sur la conique C tels que les normales en ces points et les axes soient tangents à la même conique, nous avons vu que ces points doivent se trouver sur une hyperbole dont l'équation est de la forme

$$2\,\beta_{12}xy + 2\,\beta_{13}x + 2\,\beta_{23}y + \beta_{33} = 0.$$

Une conique quelconque K passant par ces 4 points peut être représentée par

$$K = ax^2 + by^2 + c + 2\,\beta_{12}xy + 2\,\beta_{13}x + 2\,\beta_{23}y + \beta_{33} = 0$$

ou

$$K = ax^2 + by^2 + 2\,\beta_{12}xy + 2\,\beta_{13}x + 2\,\beta_{23}y + \beta_{33} + c = 0.$$

La correspondante K′ sera, après division par ab

$$K' = a\,(\beta_{33} + c)\,x^2 + b\,(\beta_{33} + c)\,y^2 + 2\,\beta_{12}\,(\beta_{33} + c)\,xy + \\ + 2\,\beta_{23}cy + 2\,\beta_{13}cx + c^2 = 0.$$

Soient A′, B′, R′, T′, les points d'intersection de K′ et de C. La conique

$$K' - (\beta_{33} + c)\,C = 0$$

passe par ces points d'intersection et, comme les coefficients de x^2 et y^2 sont nuls, elle représente une hyperbole équilatère passant par les points de l'infini des axes sans passer par le centre de C. Les normales en A′, B′, R′, T′ et les axes sont 6 tangentes de la même conique. On peut donc dire :

Etant données 8 normales de la conique C tangentes à une conique P, si 4 de ces normales sont tangentes à une conique tangente aux axes, il en est de même des 4 autres.

Dans ce cas, si l'on connaît un point de chacun de ces deux groupes, les 6 autres points peuvent être construits au moyen du cercle et de la conique C complètement tracée.

On obtiendrait un théorème analogue au précédent en supposant que la conique P soit une parabole tangente à l'un des axes.

Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. - Vol. XXVI - Pl. I.

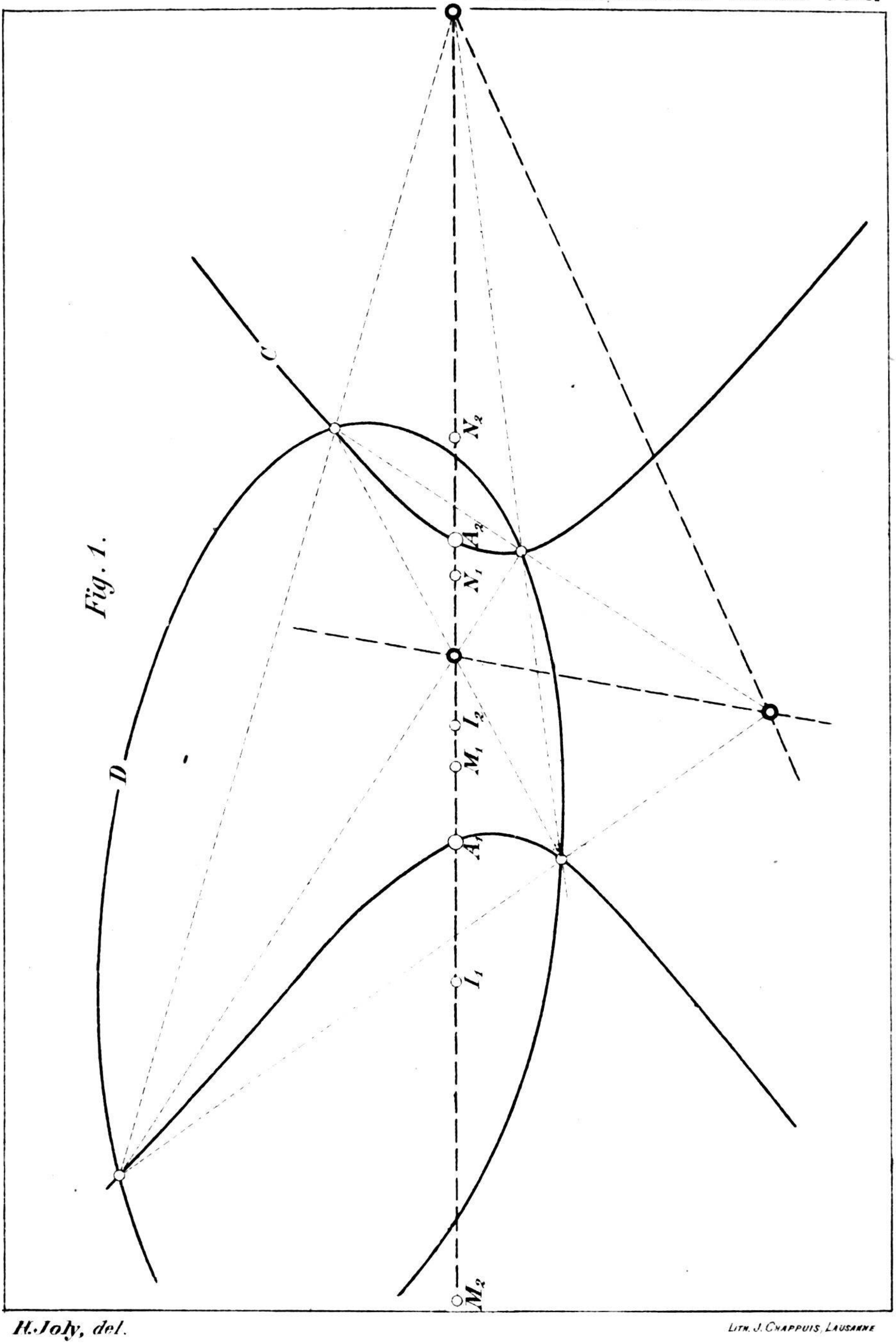


Fig. 1.

H. Joly, del.

Lith. J. Chappuis, Lausanne

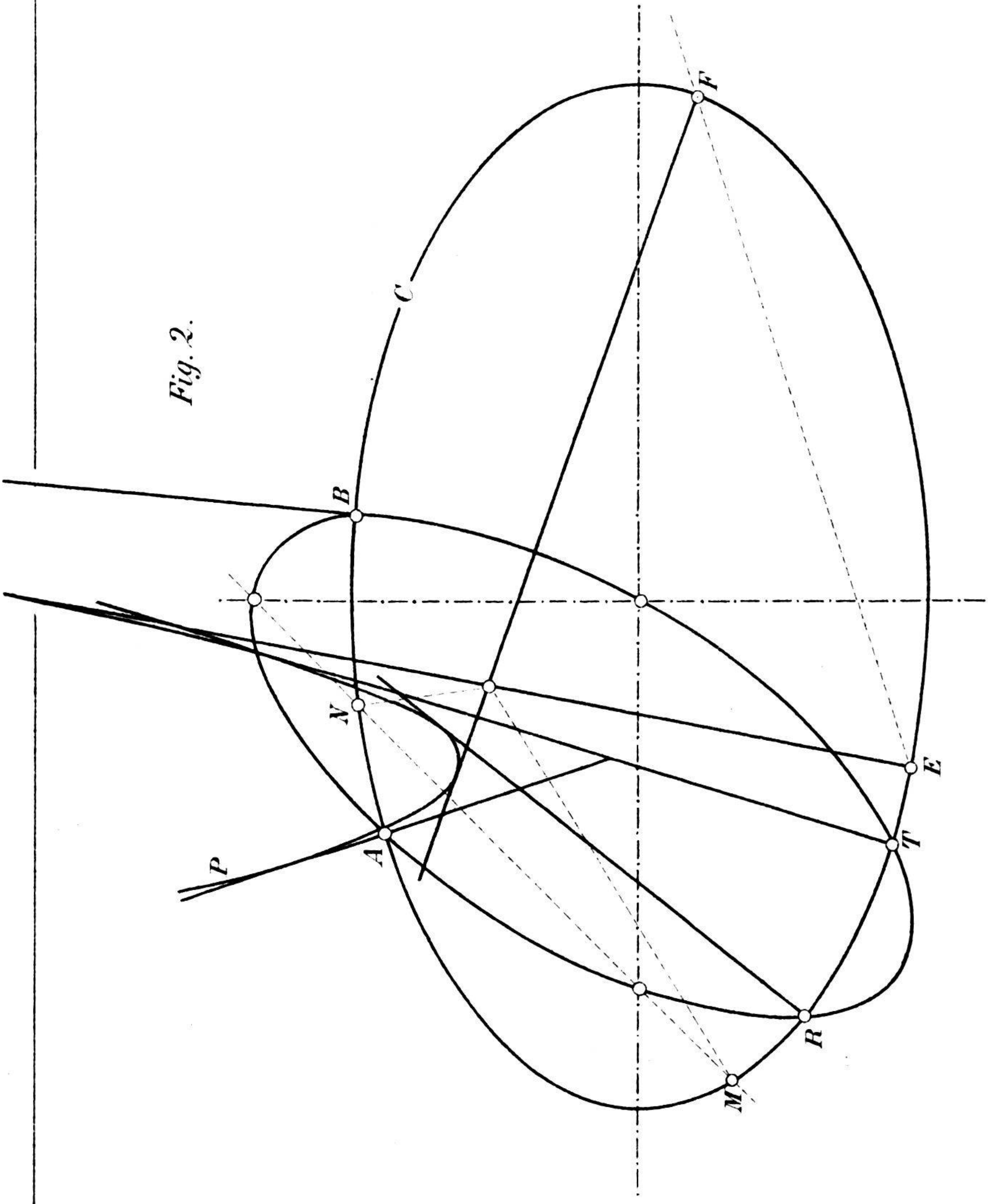
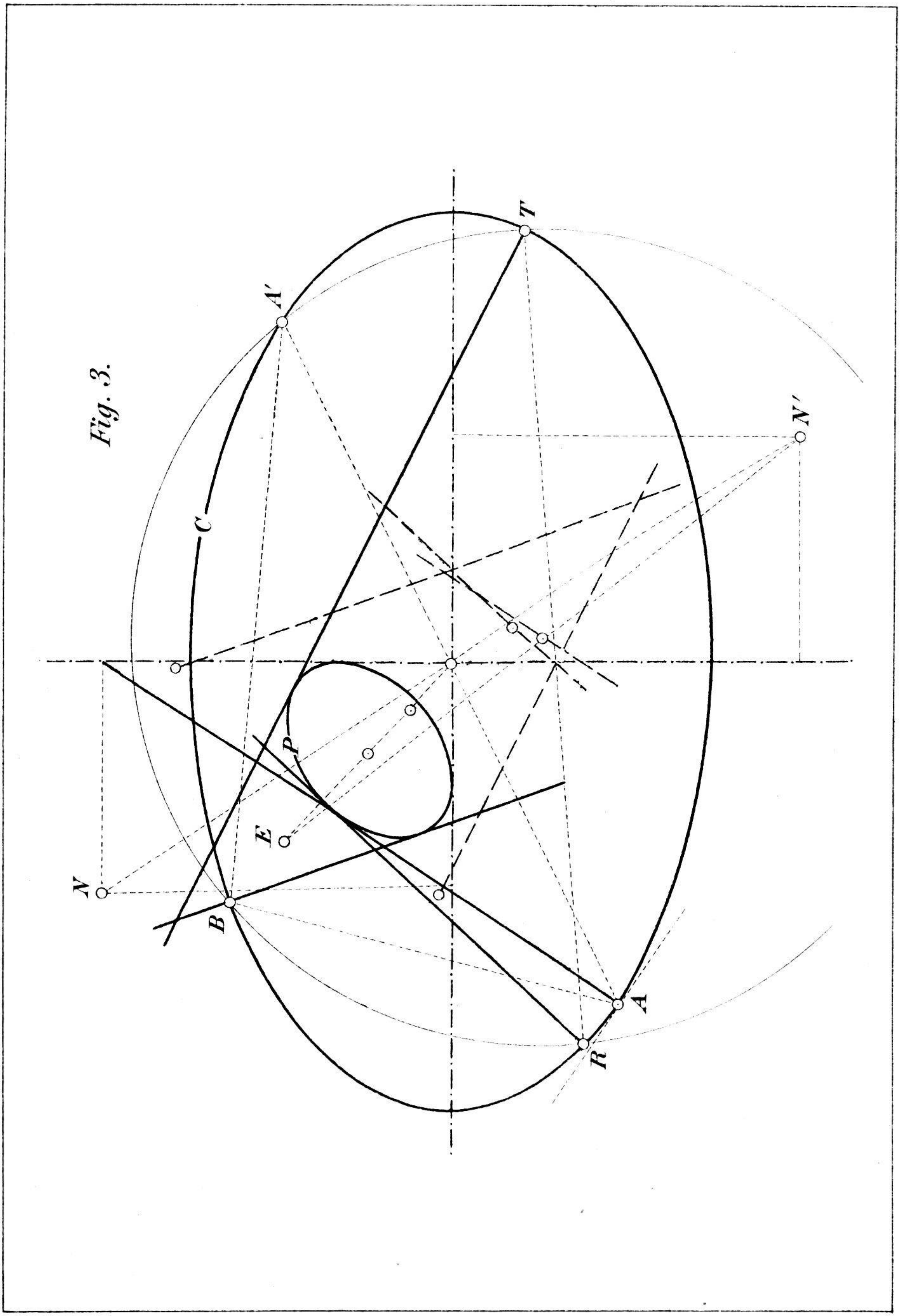


Fig. 2.

H. Joly, del.

LITH. J. CHAPPUIS, LAUSANNE



H. Joly, del.

LITH. J. CHAPPUIS, LAUSANNE