Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 28 (1892)

Heft: 107

Artikel: Note sur les épicycloïdes et les hypocycloïdes, envisagées au point de vue de la représentation conforme

Autor: Amstein, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-263250

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.
Vol. XXVIII. N° 107. 1892.

NOTE

sur les épicycloïdes et les hypocycloïdes, envisagées au point de vue de la représentation conforme

PAR

H. AMSTEIN

Lorsqu'en 1877 j'ai publié mon travail, intitulé : « Un exemple de représentation conforme » (Bulletin XV, 78), les résultats qu'on va lire dans cette note m'étaient déjà connus et très probablement je n'étais pas seul à les connaître. Je ne les estimais cependant pas assez importants pour les publier. Si aujourd'hui je me décide néanmoins à les consigner dans ce bulletin, ce n'est pas que j'aie modifié mon opinion sur leur valeur, mais plutôt parce qu'un travail paru dans les *Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft*, in Bern, intitulé : « Conforme Abbildung des Kreises auf das Innere einer Epicycloide » me fait supposer que l'intérêt du public mathématique pour cette sorte de questions n'est pas encore complètement éteint.

α) ÉPICYCLOÏDES ORDINAIRES

Soit ξ, η les coordonnées rectangulaires d'un point, φ une variable auxiliaire pouvant prendre toutes les valeurs réelles de 0 à 2π, R le rayon du cercle fixe, dont le centre est placé à l'origine et r le rayon du cercle mobile qui roule sans glisser sur le cercle fixe ; alors les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= (\mathrm{R}+r)\cos\frac{r}{\mathrm{R}}\varphi - r\cos\frac{\mathrm{R}+r}{\mathrm{R}}\varphi, \\ \eta &= (\mathrm{R}+r)\sin\frac{r}{\mathrm{R}}\varphi - r\sin\frac{\mathrm{R}+r}{\mathrm{R}}\varphi \end{aligned} \right.$$

représentent une épicycloïde. Celle-ci sera dite *ordinaire,* si elle ne possède pas d'autres points doubles que des points de rebroussement du premier genre et qu'après avoir fait une seule fois le tour de l'origine, elle revient au point de départ. A cet effet on doit avoir $r = \frac{1}{n} \mathrm{R}$, où n représente un nombre entier positif. En remplaçant $\frac{r}{\mathrm{R}} \varphi$ par φ, r par $\frac{1}{n} \mathrm{R}$, on peut donner aux équations (1) la forme

$$(1^a) \quad \begin{cases} \frac{n}{\mathrm{R}} \xi = (n+1) \cos \varphi - \cos (n+1) \varphi, \\ \frac{n}{\mathrm{R}} \eta = (n+1) \sin \varphi - \sin (n+1) \varphi. \end{cases}$$

Enfin, en modifiant l'échelle de la figure et en remplaçant $(n+1)$ par n, on peut écrire

$$(1^b) \quad \begin{cases} \xi = n \cos \varphi - \cos n \varphi, \\ \eta = n \sin \varphi - \sin n \varphi. \end{cases}$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par 1, la seconde par $i = \sqrt{-1}$ et que l'on ajoute membre à membre, il vient

$$\xi + \eta i = n (\cos \varphi + i \sin \varphi) - (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = n e^{\varphi i} - e^{n \varphi i}$$

ou, en posant

$$\xi + \eta i = \zeta, \qquad e^{\varphi i} = z,$$

$$(\mathrm{I}) \qquad \zeta = nz - z^n$$

β) ÉPICYCLOÏDES ALLONGÉES

Les épicycloïdes et hypocycloïdes (qu'on appelle aussi épicycloïdes extérieures et intérieures) sont dites *allongées*, quand elles ne possèdent ni points doubles, ni points de rebroussement du premier genre. Les premières sont données par les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = (\mathrm{R} + r) \cos \frac{r}{\mathrm{R}} \varphi - p \cos \frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R}} \varphi, \\ \eta = (\mathrm{R} + r) \sin \frac{r}{\mathrm{R}} \varphi - p \sin \frac{\mathrm{R} + r}{\mathrm{R}} \varphi, \end{cases}$$

où R et r conservent leur signification primitive et p désigne la distance du point qui décrit la courbe au centre du cercle mobile. Pour que l'épicycloïde soit allongée, il suffit que l'on ait $p < r$. Si dans les équations (2) on remplace $\frac{r}{R}\varphi$ par φ, r par $\frac{1}{n}R$, p par $\frac{1}{n}Rp$, si enfin on change d'échelle (en supprimant le facteur $\frac{1}{n}R$) et qu'on écrive n à la place de $(n+1)$, elles prennent la forme

$$(2^a) \qquad \begin{cases} \xi = n\cos\varphi - p\cos n\varphi, \\ \eta = n\sin\varphi - p\sin n\varphi, \end{cases}$$

où maintenant p est un nombre positif < 1. Comme précédemment on en déduit cette nouvelle équation

$$(\text{II}) \qquad \zeta = nz - pz^n$$

γ) HYPOCYCLOÏDES ORDINAIRES

D'une manière analogue, en partant des équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = (R-r)\cos\frac{r}{R}\varphi + r\cos\frac{R-r}{R}\varphi, \\ \eta = (R-r)\sin\frac{r}{R}\varphi - r\sin\frac{R-r}{R}\varphi, \end{cases}$$

qui représentent une hypocycloïde, après avoir posé $r = \frac{1}{n}R$ et finalement remplacé $(n-1)$ par n, on arrive aux équations

$$(3^a) \qquad \begin{cases} \xi = n\cos\varphi + \cos n\varphi, \\ \eta = n\sin\varphi - \sin n\varphi \end{cases}$$

qui donnent naissance à cette autre

$$(\text{III}) \qquad \zeta = nz + \frac{1}{z^n}.$$

δ) HYPOCYCLOÏDES ALLONGÉES

Les équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi = (\mathrm{R}-r)\cos\frac{r}{\mathrm{R}}\varphi + p\cos\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{R}}\varphi, \\ \eta = (\mathrm{R}-r)\sin\frac{r}{\mathrm{R}}\varphi - p\sin\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{R}}\varphi \end{cases}$$

qui représentent pour $p < r$, $r = \frac{1}{n}\mathrm{R}$ une hypocycloïde allongée, se mettent aisément sous la forme

$$(4^a) \qquad \begin{cases} \xi = n\cos\varphi + p\cos n\varphi, \\ \eta = n\sin\varphi - p\sin n\varphi, \end{cases}$$

où p signifie un nombre positif < 1. On en déduit immédiatement

$$(\mathrm{IV}) \qquad \zeta = nz + \frac{p}{z^n}$$

Soit $z = x + yi$ l'affixe du point (x, y) du plan (z), $\zeta = \xi + \eta i$ l'affixe du point (ξ, η) du plan (ζ). La fonction

$$\zeta = nz - z^n$$

établit une relation entre les deux plans; ainsi lorsque par exemple $z = e^{\varphi i}$ parcourt le cercle des unités, ζ décrit l'épicycloïde

$$\begin{cases} \xi = n\cos\varphi - \cos n\varphi, \\ \eta = n\sin\varphi - \sin n\varphi, \end{cases}$$

et si l'on considère le plan (z) comme l'original, le plan (ζ) comme l'image, on sait qu'original et image sont semblables dans leurs éléments infiniment petits. De cette loi il faut excepter les points, où la dérivée

$$\frac{d\zeta}{dz} = n(1 - z^{n-1})$$

s'annule. Ce sont les points

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{n-1}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots (n-2)$$

et l'on montre facilement qu'à ces points correspondent les points de rebroussement du premier genre de l'épicycloïde en question. En effet, on voit immédiatement que pour $k=0$ ou $\varphi=0$, le point $\xi=(n-1)$, $\eta=0$ est un point du dit genre. Or, il suffit de faire tourner le système de coordonnées d'un angle $\varphi_k=\frac{2k\pi}{n-1}$ à l'aide des formules

$$\begin{cases} \xi' = \quad \xi\cos\varphi_k + \eta\sin\varphi_k \\ \eta' = -\xi\sin\varphi_k + \eta\cos\varphi_k \end{cases}$$

pour reconnaître que les $(n-1)$ points $z=e^{\frac{2k\pi i}{n-1}}$ se trouvent exactement dans le même cas. Ces considérations, convenablement modifiées, s'appliquent également aux fonctions (II), (III) et (IV).

Pour étudier les représentations, transmises par les formules (I),..(IV), il convient de chercher, dans chacun des cas, les deux systèmes de courbes qui correspondent l'un au système de circonférences concentriques, avec l'origine comme centre, l'autre au faisceau de leurs rayons communs.

α) ÉPICYCLOÏDES ORDINAIRES

En substituant

$$z=re^{\varphi i} \tag{5}$$

dans l'équation

$$\zeta=nz-z^n,$$

il vient

$$\xi+\eta i=nr(\cos\varphi+i\sin\varphi)-r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

ou, en séparant les parties réelles des parties imaginaires

$$\begin{cases} \xi=nr\cos\varphi-r^n\cos n\varphi, \\ \eta=nr\sin\varphi-r^n\sin n\varphi. \end{cases} \tag{6}$$

Or si dans l'équation $z=re^{\varphi i}$ on considère r comme constant, φ comme variable, le point z se meut sur une circonférence de rayon r, ayant son centre à l'origine. Mais si, au contraire, on considère φ comme constant et r comme variable, le point z décrit le rayon (commençant à l'origine et allant à l'infini) qui fait l'angle φ avec l'axe positif des x. Ainsi, au système de circonférences concentriques correspondent les courbes données par les équations (6), dans lesquelles on considère r comme un paramètre variable; tandis qu'au faisceau de rayons répondent les courbes, représentées par les mêmes équations (6), mais dans lesquelles on considère φ comme un paramètre variable. Il va de soi que ces dernières courbes sont les trajectoires orthogonales du système, caractérisé par $r = \text{const.}$

En mettant les équations (6) sous la forme

$$(6^a) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\xi}{r} &= n \cos\varphi - r^{n-1} \cos n\varphi, \\ \frac{\eta}{r} &= n \sin\varphi - r^{n-1} \sin n\varphi, \end{aligned}\right.$$

on reconnaît immédiatement que pour $r = \text{const.}$ et < 1 elles représentent des épicycloïdes allongées. Il s'ensuit qu'à un point de l'intérieur du cercle des unités correspond un point — et un seul — de l'intérieur de l'épicycloïde (1^b).

Afin d'obtenir l'équation en coordonnées rectangulaires du système de trajectoires orthogonales de ces épicycloïdes, on éliminera la variable r entre les équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= nr\cos\varphi - r^n \cos n\varphi, \\ \eta &= nr \sin\varphi - r^n \sin n\varphi, \end{aligned}\right. \quad \begin{array}{|c|c} \sin n\varphi & \sin\varphi \\ -\cos n\varphi & -\cos\varphi. \end{array}$$

On trouve d'abord

$$r = \frac{\xi \sin n\varphi - \eta \cos n\varphi}{n \sin(n-1)\varphi}, \qquad r^n = \frac{\xi \sin\varphi - \eta\cos\varphi}{\sin(n-1)\varphi},$$

puis

$$\frac{(\xi \sin n\varphi - \eta \cos n\varphi)^n}{n^n \sin^n(n-1)\varphi} = \frac{\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi}{\sin(n-1)\varphi},$$

ou bien

$$(7) \qquad (\xi \sin n\varphi - \eta\cos n\varphi)^n = n^n \sin^{n-1}(n-1)\varphi\,(\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi).$$

Ces courbes sont par conséquent des paraboles de l'ordre n. Leur équation en coordonnées polaires ρ, ψ est la suivante:

$$(7^a) \qquad \rho^{n-1} = n^n \sin^{n-1}(n-1)\varphi \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin^n(n\varphi - \psi)}.$$

β) ÉPICYCLOÏDES ALLONGÉES

En faisant la substitution $z = re^{\varphi i}$ dans l'équation

$$\zeta = nz - pz^n$$

on trouve d'abord

$$\begin{cases} \xi = rn\cos\varphi - pr^n \cos n\varphi, \\ \eta = rn\sin\varphi - pr^n \sin n\varphi. \end{cases}$$

Pour $r =$ const. < 1 ces équations représentent des épicycloïdes allongées.

Les trajectoires orthogonales de ces courbes ($\varphi =$ const.) sont données en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$(\xi \sin n\varphi - \eta \cos n\varphi)^n = \frac{n^n}{p} \sin^{n-1}(n-1)\varphi\,(\xi \sin\varphi - \eta\cos\varphi),$$

en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho^{n-1} = \frac{n^n}{p} \sin^{n-1}(n-1)\varphi \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(n\varphi - \psi)}.$$

Ce sont encore des paraboles de l'ordre n.

γ) HYPOCYCLOÏDES ORDINAIRES

Dans le cas de la fonction

$$\zeta = nz + \frac{1}{z^n}$$

la substitution $z = re^{\varphi i}$ conduit aux équations

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi = rn\cos\varphi + \dfrac{1}{r^n}\cos n\varphi, \\ \eta = rn\sin\varphi - \dfrac{1}{r^n}\sin n\varphi. \end{cases}$$

En les mettant sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\xi}{r} = n\cos\varphi + \dfrac{1}{r^{n+1}}\cos n\varphi, \\ \dfrac{\eta}{r} = n\sin\varphi - \dfrac{1}{r^{n+1}}\sin n\varphi, \end{cases}$$

on reconnaît que pour $r =$ const. et > 1 elles représentent des hypocycloïdes allongées. On en conclut qu'à un point de l'extérieur du cercle des unités correspond un point — et un seul — de l'extérieur de l'hypocycloïde ordinaire (3^a). (Par l'extérieur d'une courbe fermée on entend ici celle des parties du plan limitées par la courbe qui contient le point à l'infini.)

Les trajectoires orthogonales de ces hypocycloïdes ont pour équation en coordonnées cartésiennes

$$(9) \quad (\xi \sin n\varphi + \eta \cos n\varphi)^n (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) = n^n \sin^{n+1} (n+1)\varphi$$

et en coordonnées polaires

$$(9^a) \qquad \rho^{n+1} = n^n \frac{\sin^{n+1}(n+1)\varphi}{\sin(n\varphi + \psi)\sin(\varphi - \psi)}.$$

δ) HYPOCYCLOÏDES ALLONGÉES

Adaptées à la fonction

$$\zeta = nz + \frac{p}{z^n}$$

les équations (8), (9) et (9^a) subissent les modifications suivantes

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi = rn \cos \varphi + \dfrac{p}{r^n} \cos n\varphi, \\[2ex] \eta = rn \sin \varphi - \dfrac{p}{r^n} \sin n\varphi; \end{cases}$$

$$(11) \quad (\xi \sin n\varphi + \eta \cos n\varphi)^n (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) = pn^n \sin^{n+1}(n+1)\varphi;$$

$$(11^a) \qquad \rho^{n+1} = pn^n \frac{\sin^{n+1}(n+1)\varphi}{\sin(n\varphi + \psi)\sin(\varphi - \psi)}.$$

Pour $r =$ const. > 1 les équations (10) représentent encore des hypocycloïdes allongées.

Un cas particulier intéressant s'obtient en faisant $n = 1$ dans les équations précédentes. L'hypocycloïde allongée (4^a) devient alors l'ellipse

$$\frac{\xi^2}{(p+1)^2} + \frac{\eta^2}{(p-1)^2} = 1$$

et la fonction

$$\zeta = z + \frac{p}{z}$$

sert d'intermédiaire à la représentation conforme de l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur de cette ellipse. *)

La discussion et le tracé de toutes les courbes dont il a été question jusqu'ici, n'offrent aucune difficulté.

Ce qui précède peut se résumer en cette proposition :

Pour représenter d'une manière conforme l'intérieur du cercle des unités sur l'intérieur d'une épicycloïde, on se servira de la fonction

$$\zeta = nz - pz^n,$$

où p $= 1$ *ou* < 1, *suivant que l'épicycloïde est ordinaire ou allongée, tandis que pour représenter d'une manière conforme l'extérieur du cercle des unités sur l'extérieur d'une hypocycloïde, on devra employer la fonction*

$$\zeta = nz + \frac{p}{z^n},$$

où p *est encore* < 1, *lorsqu'il s'agit d'une hypocycloïde allongée et égal à* 1 *dans le cas d'une hypocycloïde ordinaire.*

Dans ce genre de questions on a l'habitude d'envisager non-seulement les courbes du plan (ζ), mais encore celles du plan (z) et plus particulièrement les *isotimes* et les *isophases*. On appelle ainsi les courbes du plan (z) qui correspondent, les premières à un système de circonférences concentriques du plan (ζ), avec l'origine comme centre, et les dernières à leurs trajectoires orthogonales, c'est-à-dire au faisceau de rayons communs. Les lignes suivantes seront consacrées à une étude succincte de ces deux espèces de courbes.

ISOTIMES

α) ÉPICYCLOÏDES ORDINAIRES

Si dans l'équation

$$\text{(I)} \qquad \zeta = z\,(n - z^{n-1})$$

*) Sous une forme un peu différente j'ai rencontré cette représentation conforme pour la première fois dans un cours intitulé : « Introduction à la théorie des fonctions », professé par M. H.-A. Schwarz en 1869-70 à l'Ecole polytechnique fédérale, à Zurich.

on égale ζ à 0, les racines de l'équation du n^e degré ainsi obtenue, sont

$$z=0,\ z=\sqrt[n-1]{n}\, e^{\frac{2k\pi i}{n-1}},\quad k=0,1,\ldots(n-2);$$

on les appellera *les zéros de la fonction* ζ. Posant encore, pour simplifier l'écriture

$$\sqrt[n-1]{n}=a,$$

on peut écrire

$$\zeta=-z\prod_{0,n-2}^{k}\left(z-ae^{\frac{2k\pi i}{n-1}}\right), \tag{12}$$

où Π signifie le produit des facteurs $\left(z-ae^{\frac{2k\pi i}{n-1}}\right)$, k prenant successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots (n-2)$. L'équation (12) peut se mettre sous la forme

$$\xi+\eta i=-(x+yi)\prod_{0,n-2}^{k}\left[\left(x-a\cos\frac{2k\pi}{n-1}\right)+i\left(y-a\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)\right] \tag{12a}$$

et si l'on remplace les quantités imaginaires par leurs conjuguées

$$\xi-\eta i=-(x-yi)\prod_{0,n-2}^{k}\left[\left(x-a\cos\frac{2k\pi}{n-1}\right)-i\left(y-a\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)\right]. \tag{12b}$$

Multipliant les équations (12^a) et (12^b), membre à membre, et égalant $\xi^2+\eta^2$ à une constante c^2, il vient

$$\xi^2+\eta^2=c^2=(x^2+y^2)\prod_{0,n-2}^{k}\left[\left(x-a\cos\frac{2k\pi}{n-1}\right)^2+\left(y-a\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)^2\right] \tag{13}$$

Puisque $\xi^2+\eta^2=c^2$, le point ζ décrit une circonférence de rayon c autour de l'origine comme centre. Il s'ensuit que l'équation (13) représente une isotime pour toute valeur constante de c; et l'on reconnaît en même temps la propriété caractéristique des isotimes, à savoir la constance du produit des rayons vecteurs qu'on obtient en joignant les zéros de ζ par des lignes droites à un point quelconque de la courbe. En effet, l'équation (13) montre qu'en désignant la valeur absolue de z par ρ et celle du facteur $\left(z-ae^{\frac{2k\pi i}{n-1}}\right)$ par ρ_k, on a

$$\rho\rho_0\rho_1\ldots\rho_{n-1}=c.$$

Afin de développer le produit contenu dans l'équation (13), on pourra écrire en remontant à l'équation (I) et en désignant par z_1 la quantité conjuguée de z :

$$\xi + \eta i = nz - z^n,$$

$$\xi - \eta i = nz_1 - z_1{}^n,$$

d'où par multiplication

$$\xi^2 + \eta^2 = c^2 = n^2 zz_1 - nzz_1 (z^{n-1} + z_1{}^{n-1}) + z^n z_1{}^n.$$

Or, on a

$$z^{n-1} = x^{n-1} + i(n-1)_1 x^{n-2} y - (n-1)_2 x^{n-3} y^2 - i(n-1)_3 x^{n-4} y^3 + \ldots,$$

$$z_1{}^{n-1} = x^{n-1} - i(n-1)_1 x^{n-2} y - (n-1)_2 x^{n-3} y^2 + i(n-1)_3 x^{n-4} y^3 + \ldots;$$

on en tire, en additionnant ces deux égalités membre à membre et en prenant la moitié

$$\tfrac{1}{2}(z^{n-1} + z_1{}^{n-1}) = x^{n-1} - (n-1)_2 x^{n-3} y^2 + (n-1)_4 x^{n-5} y^4 - \ldots =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} x^{n-1-2\lambda} y^{2\lambda},$$

où la lettre de sommation λ parcourt les nombres entiers positifs depuis $\lambda = 0$ jusqu'au plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(n-1)$.

Maintenant l'équation des isotimes devient

$$(13^a) \quad (x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^{n-1} + n^2 - 2n \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} x^{n-1-2\lambda} y^{2\lambda}\right] = c^2.$$

Pour la transformer en coordonnées polaires

$$x = \rho \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\psi,$$

on remarquera que d'après le théorème de Moivre on a

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n-1}{2}} (-1)^\lambda (n-1)_{2\lambda} \cos^{n-1-2\lambda}\psi \sin^{2\lambda}\psi = \cos(n-1)\psi,$$

de sorte que l'équation (13^a) se transforme finalement en

$$(13^b) \qquad \rho^2[\rho^{2(n-1)} + n^2 - 2n\,\rho^{n-1} \cos(n-1)\psi] = c^2.$$

Les isotimes sont, par conséquent, des courbes algébriques du degré $2n$. Il n'est pas difficile de se faire, au moins approximativement, une idée de la forme de ces courbes. En effet, comme les circonférences $\xi^2+\eta^2=c^2$ entourent l'origine, leurs images — autrement dit les isotimes — doivent nécessairement entourer les zéros de la fonction ζ. De quelle manière? C'est ce que l'équation (13^b) permet de reconnaître.

Pour $\psi=0$ ou plus généralement $\psi=\frac{2k\pi}{n-1}$, $k=0,1\,..\,(n-2)$, elle prend la forme

$$\rho^{2n}-2n\,\rho^{n+1}+n^2\rho^2=c^2$$

ou bien

$$(\rho^n-n\rho)^2=c^2,$$

ou encore

$$\rho^n-n\rho=\pm c.$$

Or, pour $c=0$, cette équation donne les zéros de ζ; pour $c<(n-1)$ elle possède deux racines voisines et positives; pour $c=(n-1)$ les deux racines se confondent, et enfin pour $c>(n-1)$ une seule des racines est positive. Il s'ensuit que pour $c=0$ l'isotime se réduit aux n zéros de ζ; pour $c<(n-1)$ elle se compose de n petits ovales dont chacun entoure un des zéros de ζ; pour $c=(n-1)$ elle possède sur chacune des droites $\psi=\frac{2k\pi}{n-1}$ un point double et forme $(n-1)$ lacets dont chacun entoure un zéro de ζ et enfin pour $c>(n-1)$ l'isotime forme une branche unique entourant les n zéros de ζ.

β) ÉPICYCLOÏDES ALLONGÉES

Dans ce cas les équations (13^a) et (13^b) deviennent

(14^a)

$$(x^2+y^2)\left[p^2(x^2+y^2)^{n-1}+n^2-2np\sum_{\lambda=0}^{\lambda\leqq\frac{n-1}{2}}(-1)^\lambda(n-1)_{2\lambda}\,x^{n-1-2\lambda}y^{2\lambda}\right]=c^2$$

(14^b) $$\rho^2\left[p^2\rho^{2(n-1)}+n^2-2np\,\rho^{n-1}\cos(n-1)\psi\right]=c^2.$$

γ) HYPOCYCLOÏDES ORDINAIRES

Les zéros de la fonction

$$\zeta = nz + \frac{1}{z^n} = n\frac{z^{n+1}+\frac{1}{n}}{z^n}$$

sont

$$z_k = \sqrt[n+1]{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{2k+1}{n+1}\pi i}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

En posant

$$a = \sqrt[n+1]{\frac{1}{n}},$$

ζ peut se mettre sous la forme

$$\zeta = \xi + \eta i = n\frac{\prod\limits_{0,n}^{k}\left(z - ae^{\frac{2k+1}{n+1}\pi i}\right)}{z^n};$$

et l'on a de même

$$\zeta_1 = \xi - \eta i = n\frac{\prod\limits_{0,n}^{k}\left(z_1 - ae^{-\frac{2k+1}{n+1}\pi i}\right)}{z_1^{\,n}}.$$

Multipliant ces deux équations, terme par terme, on obtient pour les isotimes, images des circonférences $\xi^2+\eta^2=c^2$, l'équation

$$\xi^2+\eta^2 = c^2 = \frac{n^2\prod\limits_{0,n}^{k}\left[\left(x - a\cos\frac{2k+1}{n+1}\right)^2 + \left(y - a\sin\frac{2k+1}{n+1}\right)^2\right]}{(x^2+y^2)^n}. \tag{15}$$

Si l'on désigne la valeur absolue de z par ρ, celle du facteur $\left(z - ae^{\frac{2k+1}{n+1}\pi i}\right)$ par ρ_k, on peut admettre comme équation de définition des isotimes la suivante

$$\frac{\rho_0\,\rho_1\,\ldots\,\rho_n}{\rho^n} = \frac{c}{n}.$$

Un procédé analogue à celui qui a été employé dans le cas des épicycloïdes, permet de mettre l'équation (15) sous la forme

(15ª)

$$n^2(x^2+y^2)^{n+1}-c^2(x^2+y^2)^n+1+2n\sum_{\lambda=0}^{\lambda\leq\frac{n+1}{2}}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\,x^{n+1-2\lambda}y^{2\lambda}=0\,.$$

Ainsi les isotimes sont des courbes algébriques de l'ordre $(2n+2)$. Pour la transformation en coordonnées polaires, on remarquera que l'on a

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda\leq\frac{n+1}{2}}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\,x^{n+1-2\lambda}y^{2\lambda}=\rho^{n+1}\sum_{\lambda=0}^{\lambda\leq\frac{n+1}{2}}(-1)^\lambda(n+1)_{2\lambda}\cos^{n+1-2\lambda}\psi\sin^{2\lambda}\psi=$$

$$=\rho^{n+1}\cos(n+1)\psi\,,$$

de sorte que (15ª) devient

(15ᵇ) $$n^2\rho^{2(n+1)}-c^2\rho^{2n}+2n\rho^{n+1}\cos(n+1)\psi+1=0.$$

Cette forme se prête bien à une discussion succincte des courbes en question. En effet, si dans cette équation on fait $\psi=\frac{2k+1}{n+1}\pi$, elle devient

$$n^2\rho^{2(n+1)}-2n\rho^{n+1}+1=c^2\rho^{2n}$$

ou

$$n\rho^{n+1}-1=\pm c\rho^n$$

et l'on reconnaît que pour $c=0$, l'isotime se réduit aux zéros de ζ. Pour $c<(n+1)$ elle entoure sous forme de $(n+1)$ petits ovales les dits zéros. Lorsque $c=(n+1)$, l'équation précédente possède la racine double $\rho=1$, l'isotime a un point double — et soit dit en passant — les deux tangentes en ce point font des angles de $\pm45^0$ avec l'axe de symétrie $\psi=\frac{2k+1}{n+1}\pi$. Enfin, si $c>(n+1)$, l'isotime se compose de deux branches fermées, dont l'une entoure les zéros de ζ et l'autre l'origine.

δ) HYPOCYCLOÏDES ALLONGÉES

Le fait que l'on a

$$\zeta=nz+\frac{p}{z^n}$$

amène les modifications suivantes des équations (15^a) et (15^b)

(16^a)

$$n^2(x^2+y^2)^{n+1} - c^2(x^2+y^2)^n + p^2 + 2np \sum_{\lambda=0}^{\lambda \leq \frac{n+1}{2}} (-1)^\lambda (n+1)_{2\lambda} x^{n+1-2\lambda} y^{2\lambda} = 0,$$

(16^b) $$n^2 \rho^{2(n+1)} - c^2 \rho^{2n} + 2np\, \rho^{n+1} \cos(n+1)\psi + p^2 = 0.$$

ISOPHASES

α) ÉPICYCLOÏDES ORDINAIRES

Soit

$$z = \rho e^{\varphi i}, \quad z - a e^{\frac{2k}{n-1}\pi i} = \rho_k e^{\varphi_k i}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots (n-2).$$

Alors, en prenant le logarithme des deux membres de l'équation (12), il vient

$$\log(\xi + \eta i) = \log(-1) + \log \rho + \sum_{k=0}^{k=n-2} \log \rho_k + \varphi i + i \sum_{k=0}^{k=n-2} \varphi_k$$

et l'on a de même, en remplaçant i par $-i$, sauf dans $\log(-1)$

$$\log(\xi - \eta i) = \log(-1) + \log \rho + \sum_{k=0}^{k=n-2} \log \rho_k - \varphi i - i \sum_{k=0}^{k=n-2} \varphi_k.$$

De ces deux équations on tire, en retranchant la seconde de la première et en divisant par $2i$

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\xi + \eta i}{\xi - \eta i} = \varphi + \sum_{k=0}^{k=n-2} \varphi_k,$$

où

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{y - a \sin \frac{2k\pi}{n-1}}{x - a \cos \frac{2k\pi}{n-1}}, \quad a = \sqrt[n-1]{n}.$$

Si, d'autre part, on pose

$$\xi + \eta i = \mathrm{P} e^{\theta i},$$

on a

$$\log(\xi + \eta i) = \log \mathrm{P} + \theta i,$$

$$\log(\xi - \eta i) = \log \mathrm{P} - \theta i,$$

$$\frac{1}{2i} \log \frac{\xi + \eta i}{\xi - \eta i} = \theta,$$

de sorte qu'en attribuant à θ une valeur constante, l'équation par laquelle on peut définir les isophases, prend la forme

$$\varphi+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{n-2}=\theta. \tag{17}$$

Pour obtenir l'équation des isophases en coordonnées polaires ρ, ψ, on tiendra compte de la relation

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\eta}{\xi}.$$

Il vient successivement

$$\begin{aligned}\xi+\eta i&=nz-z^n=n(x+yi)-(x+yi)^n=\\&=n\rho(\cos\psi+i\sin\psi)-\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi),\end{aligned}$$

d'où il suit

$$\left\{\begin{aligned}\xi&=n\rho\cos\psi-\rho^n\cos n\psi,\\ \eta&=n\rho\sin\psi-\rho^n\sin n\psi,\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\eta}{\xi}=\operatorname{tg}\theta=\frac{n\rho\sin\psi-\rho^n\sin n\psi}{n\rho\cos\psi-\rho^n\cos n\psi}=\frac{n\sin\psi-\rho^{n-1}\sin n\psi}{n\cos\psi-\rho^{n-1}\cos n\psi},$$

et enfin

$$\rho^{n-1}=n\frac{\sin(\psi-\theta)}{\sin(n\psi-\theta)}. \tag{17a}$$

Ce sont des courbes de l'ordre n qui se composent de $(n-1)$ branches hyperboliques, passant chacune par un zéro $z_k=ae^{\frac{2k\pi i}{n-1}}$ de ζ et d'une n^{me} branche non hyperbolique passant par l'origine. Cette dernière dégénère en une ligne droite toutes les fois que le numérateur et le dénominateur de ρ^{n-1} ont un facteur variable commun, ce qui arrive dans $(n-1)$ cas. En effet, le numérateur s'annule pour $\psi=\theta$ et le dénominateur pour $n\psi=\theta+\mu\pi$, où μ représente un nombre entier. On a donc d'une part $\psi=\theta$, d'autre part $\psi=\frac{\theta+\mu\pi}{n}$, ce qui donne l'égalité

$$\theta=\frac{\theta+\mu\pi}{n}$$

dont on tire

$$\theta=\frac{\mu\pi}{n-1}.$$

L'équation (17^a) montre que toutes les isophases sont épuisées, quand θ varie d'une manière continue de 0 à π. Mais la condition $\theta < \pi$ est satisfaite, si l'on donne à μ successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots (n-2)$.

La courbe possède n asymptotes qui forment les angles $\psi = \frac{\theta + \nu\pi}{n}$ $\nu = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ avec l'axe polaire positif.

β) ÉPICYCLOÏDES ALLONGÉES

Par suite de l'emploi de la fonction

$$\zeta = nz - pz^n,$$

l'équation (17^a) se modifie en

$$\rho^{n-1} = \frac{n}{p} \frac{\sin(\psi - \theta)}{\sin(n\psi - \theta)}.$$

γ) HYPOCYCLOÏDES ORDINAIRES

Des considérations analogues à celles qui ont fourni les équations (17) et (17^a) conduisent d'abord à l'équation de définition

$$(18) \qquad \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n - n\varphi = \theta = \text{const.},$$

où

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \qquad \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{y - a \sin \frac{2k+1}{n+1}\pi}{x - a \cos \frac{2k+1}{n+1}\pi}, k = 0, 1, \ldots n,$$

$$a = \sqrt[n+1]{\frac{1}{n}},$$

puis à l'équation en coordonnées polaires des isophases

$$(18^a) \qquad \rho^{n+1} = \frac{1}{n} \frac{\sin(n\psi + \theta)}{\sin(\psi - \theta)}.$$

Ces courbes sont de l'ordre $(2n+1)$. Elles sont formées de $(n-1)$ lacets fermés et d'une branche infinie possédant une asymptote. Cette dernière branche dégénère en une ligne droite toutes les fois que θ prend une des valeurs comprises dans

$$\theta = \frac{\mu\pi}{n+1}, \qquad \mu = 0, 1, \ldots n.$$

Du fait que ρ s'annule pour $\psi = \frac{-\theta + \nu\pi}{n}$, $\nu = 0, 1, \ldots (2n-1)$,

on conclut que l'origine est un point multiple, où n branches se croisent. Il va de soi que la courbe, dans son ensemble, passe par les $(n+1)$ zéros de ζ.

δ) HYPOCYCLOÏDES ALLONGÉES

Dans ce cas l'équation (18^a) doit être remplacée par la suivante

$$\rho^{n+1} = \frac{p}{n} \frac{\sin(n\psi + \theta)}{\sin(\psi - \theta)}.$$

La description de la surface de Riemann, attachée à la variable z considérée comme fonction de ζ, ne rentre pas dans le cadre de cette note.

Note de l'imprimeur. — *Une erreur d'impression s'est glissée dans la numérotation des pages du présent mémoire, dont les 16 premières doivent porter les folios 67 à 82.*