Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 31 (1895)
Heft: 119

Artikel: Note sur le logarithme-intégral
Autor: Amstein, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-264373

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.
Vol. XXXI. N° 119. 1895.

NOTE

SUR LE LOGARITHME-INTÉGRAL

PAR

H. AMSTEIN

Le logarithme-intégral est une transcendante peu complaisante, à laquelle on ne connaît pas, jusqu'à présent, de propriétés remarquables, mais qui joue néanmoins un rôle important dans l'analyse, soit dans les intégrales Eulériennes, soit comme limite d'autres intégrales définies. Un passage relatif à cette fonction, qui se trouve à la page 54 de l'excellent petit ouvrage de M. le Dr phil. J.-H. Graf, intitulé : « Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Euler'schen Integrale » (Berne, chez K.-J. Wyss) m'a paru trop bref pour être suffisamment clair.

Désireux d'éclaircir, autant que possible, le point resté obscur, je me suis décidé à effectuer les calculs numériques longs et pénibles dont on trouvera plus loin les résultats et à publier le résumé de mes efforts, dans les quelques pages suivantes, qui contiendront, je l'espère, parmi des considérations et des formules connues depuis longtemps déjà, quelques résultats nouveaux.

I

On appelle logarithme-intégral la fonction

$$J = \int_0^x \frac{dx}{\log x},$$

où x signifie une variable réelle. Si l'on considère la courbe

$$y = \frac{1}{\log x}, \qquad \text{(fig. 1)}$$

rapportée à un système de coordonnées rectangulaires, on peut,

en admettant aussi des surfaces négatives, envisager J comme l'expression de la surface de cette courbe. Comme telle J est une fonction uniforme de x, et c'est de celle-ci qu'il s'agit ordinairement dans les applications. (La courbe possède l'asymptote $x=1$. A l'origine l'axe des y est tangent à la courbe; le point $x=\frac{1}{e^2}=0{,}1353..$, $y=-\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion. La courbe se trouve tout entière du côté des x positifs.) La surface en question peut être calculée à l'aide de l'une des deux séries bien connues

$$(1) \qquad J=\int_0^x \frac{dx}{\log x}=C+\log(-\log x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\log^n x}{n.\,n!},$$

$$(1^a) \qquad J=\int_0^x \frac{dx}{\log x}=C+\log(\log x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\log^n x}{n.\,n!},$$

où

$$C=0{,}577215664901532$$

est la constante d'Euler. (Comp. par exemple J.-A. Serret, *Cours de calcul diff. et int.*, tome II, page 229.) Les deux séries sont absolument convergentes pour toutes les valeurs réelles et positives de la variable x; on se sert de la première ou de la seconde, suivant que x est plus petit ou plus grand que l'unité.

Chacune des deux surfaces $\int_0^1 \frac{dx}{\log x}$ et $\int_1^\infty \frac{dx}{\log x}$ est infiniment grande, la première est négative, la seconde positive. En résolvant l'équation

$$0=C+\log(\log x)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\log^n x}{n.\,n!}$$

on obtient la valeur d'x pour laquelle la surface négative dans sa totalité et une partie de la surface positive se compensent mutuellement. A l'aide de la *regula falsi* ou de toute autre méthode d'approximation, on trouve sans difficulté que

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x}=0 \quad \text{pour} \quad x=1{,}451369_{39},$$

(chiffre aussi exact que le permet l'emploi des tables de logarithmes à 7 décimales). Cette valeur d'x, portée dans la fig. 1, montre à l'évidence que la fonction J devient infinie de $x = 0$ à $x = 1$ tout autrement que de $x = 1$ à $x = \infty$.

Si, dans J, on fait la substitution réelle

$$x = t^{\alpha}, \qquad dx = \alpha t^{\alpha-1}\, dt,$$

$$t = x^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \log x = \alpha \log t,$$

où α est un nombre positif quelconque, il vient

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x} = \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}}{\log t}\, dt.$$

Les intégrales de la forme $\int \frac{t^{\alpha-1}}{\log t}\, dt$ se ramènent donc immédiatement au logarithme-intégral. Pour ne citer qu'un exemple, on pourrait écrire

$$\int_0^r \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \ldots + a_n t^n}{\log t}\, dt =$$

$$= a_0 \int_0^r \frac{dx}{\log x} + a_1 \int_0^{r^2} \frac{dx}{\log x} + a_2 \int_0^{r^3} \frac{dx}{\log x} + \ldots + a_n \int_0^{r^{(n+1)}} \frac{dx}{\log x}$$

et comme cas particulier

$$\int_0^r \frac{t^{n-1} - t^{m-1}}{\log t}\, dt = \int_0^{r^n} \frac{dx}{\log x} - \int_0^{r^m} \frac{dx}{\log x} = \int_{r^m}^{r^n} \frac{dx}{\log x}.$$

Dans ces intégrales r peut être plus grand ou plus petit que l'unité, mais non égal à l'unité, car on a déjà reconnu que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log x} = -\infty.$$

Ainsi l'égalité précédente ne saurait subsister pour $r = 1$. En effet, on sait que son premier membre

$$\int_0^1 \frac{t^{n-1} - t^{m-1}}{\log t}\, dt = \log \frac{n}{m},$$

ce qui, en général, est différent de zéro, tandis que son second membre, $\int_1^1 \frac{dx}{\log x}$, est manifestement nul.

Pour une valeur déterminée de la limite supérieure x, l'intégrale

$$J = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}}{\log x}\, dx$$

peut être considérée comme une fonction continue d'α. Dès lors il est possible, à l'aide de la série de Taylor, de passer de J à

$$J_1 = \int_0^x \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\log x}\, dx,$$

où β est un nombre réel quelconque, mais tel que $\alpha + \beta > 0$. A cet effet on formera les dérivées successives de J par rapport à la variable α.

On a

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}\log x}{\log x}\, dx = \int_0^x x^{\alpha-1}\, dx = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad (\alpha > 0)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} = x^\alpha \left[\frac{\log x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right],$$

$$\frac{\partial^3 J}{\partial \alpha^3} = x^\alpha \left[\frac{\log^2 x}{\alpha} - 2\frac{\log x}{\alpha^2} + \frac{2!}{\alpha^3}\right],$$

. . . . . .

En appliquant le théorème de Leibnitz, à savoir

$$\frac{d^p(uv)}{d\alpha^p} = \frac{d^p u}{d\alpha^p}\cdot v + p\frac{d^{p-1}u}{d\alpha^{p-1}}\cdot\frac{dv}{d\alpha} +$$

$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^{p-2}u}{d\alpha^{p-2}}\cdot\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \ldots + p\frac{du}{d\alpha}\cdot\frac{d^{p-1}v}{d\alpha^{p-1}} + u\cdot\frac{d^p v}{d\alpha^p}$$

et en posant

$$u=x^a,\ v=\frac{1}{\alpha},$$

de sorte que

$$\frac{du}{d\alpha}=x^a\log x,\ \frac{d^2u}{d\alpha^2}=x^a\log^2 x,\ \ldots\ \frac{d^k u}{d\alpha^k}=x^a\log^k x,$$

$$\frac{dv}{d\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2},\ \frac{d^2v}{d\alpha^2}=\frac{2!}{\alpha^3},\ \frac{d^3v}{d\alpha^3}=-\frac{3!}{\alpha^4},\ \ldots\ \frac{d^k v}{d\alpha^k}=(-1)^k\frac{k!}{\alpha^{k+1}},$$

il vient d'abord

$$\frac{d^p\left(\frac{x^a}{\alpha}\right)}{d\alpha^p}=x^a\frac{\log^p x}{\alpha}-px^a\frac{\log^{p-1}x}{\alpha^2}+$$

$$+p(p-1)x^a\frac{\log^{p-2}x}{\alpha^3}-\ldots+(-1)^{p-1}p!\,x^a\frac{\log x}{\alpha^p}+(-1)^p p!\frac{x^a}{\alpha^{p+1}},$$

et ensuite

$$\frac{\partial^n \mathrm{J}}{\partial\alpha^n}=x^a\left[\frac{\log^{n-1}x}{\alpha}-(n-1)\frac{\log^{n-2}x}{\alpha^2}+\right.$$

$$+(n-1)(n-2)\frac{\log^{n-3}x}{\alpha^3}-(n-1)(n-2)(n-3)\frac{\log^{n-4}x}{\alpha^4}+\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^{n-2}(n-1)!\frac{\log x}{\alpha^{n-1}}+(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{\alpha^n}\right],$$

et le théorème de Taylor donne maintenant

$$\mathrm{J}_1=\int_0^x\frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\log x}dx=\int_0^x\frac{x^{\alpha-1}}{\log x}dx+\frac{x^a}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{1!}+x^a\left[\frac{\log x}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right]\cdot\frac{\beta^2}{2!}+$$

$$+x^a\left[\frac{\log^2 x}{\alpha}-2\frac{\log x}{\alpha^2}+\frac{2!}{\alpha^3}\right]\cdot\frac{\beta^3}{3!}+x^a\left[\frac{\log^3 x}{\alpha}-3\frac{\log^2 x}{\alpha^2}+3!\frac{\log x}{\alpha^3}-\frac{3!}{\alpha^4}\right]\cdot\frac{\beta^4}{4!}+$$

$$+x^a\left[\frac{\log^4 x}{\alpha}-4\frac{\log^3 x}{\alpha^2}+4.3\frac{\log^2 x}{\alpha^3}-4!\frac{\log x}{\alpha^4}+\frac{4!}{\alpha^5}\right]\cdot\frac{\beta^5}{5!}+$$

$$+x^a\left[\frac{\log^5 x}{\alpha}-5\frac{\log^4 x}{\alpha^2}+5.4\frac{\log^3 x}{\alpha^3}-5.4.3\frac{\log^2 x}{\alpha^4}+5!\frac{\log x}{\alpha^5}-\frac{5!}{\alpha^6}\right]\cdot\frac{\beta^6}{6!}+\ldots.$$

ou bien, en ordonnant cette série suivant les puissances croissantes de $(\alpha \log x)$ et en posant, pour simplifier l'écriture, $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$

$$(2) \qquad J_1=\int_0^x \frac{x^{\alpha(1+\lambda)-1}}{\log x}\,dx=$$

$$=\int_0^x \frac{x^{\alpha-1}}{\log x}\,dx+x^\alpha\left[\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^4+\frac{1}{5}\lambda^5-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)}{1!}\left[\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda^3+\frac{1}{4}\lambda^4-\frac{1}{5}\lambda^5+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^2}{2!}\left[\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^4+\frac{1}{5}\lambda^5-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^3}{3!}\left[\frac{1}{4}\lambda^4-\frac{1}{5}\lambda^5+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots.\right]+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^4}{4!}\left[\frac{1}{5}\lambda^5-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^5}{5!}\left[\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots\right]+\ldots.$$

Or, on sait que

$$\lambda-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{3}\lambda^5-\frac{1}{4}\lambda^4+\ldots.=\log(1+\lambda)$$

à la condition que $|\lambda|<1$, où $|a|$ signifie la valeur absolue de la quantité a. On peut donc, dans cette hypothèse, donner à J_1 la forme définitive

$$(2^a) \quad J_1=\int_0^x \frac{x^{\alpha(1+\lambda)-1}}{\log x}\,dx=\int_0^x \frac{x^{\alpha-1}}{\log x}\,dx+x^\alpha\Big\{\log(1+\lambda)-$$

$$-\frac{(\alpha\log x)}{1!}\left[\log(1+\lambda)-\lambda\right]+\frac{(\alpha\log x)^2}{2!}\left[\log(1+\lambda)-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2\right]-$$

$$-\frac{(\alpha\log x)^3}{3!}\left[\log(1+\lambda)-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda^3\right]+$$

$$+\frac{(\alpha\log x)^4}{4!}\left[\log(1+\lambda)-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda^3+\frac{1}{4}\lambda^4\right]-\ldots$$

$$\ldots(-1)^n\frac{(\alpha\log x)^n}{n!}\left[\log(1+\lambda)-\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda^3+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}\lambda^n\right]+\ldots.\Big\}$$

Les quantités entre crochets sont toutes, en valeur absolue, plus petites que $\log(1+\lambda)$. Il s'ensuit que la série (2^a) est convergente à la façon de celle qui représente la fonction exponentielle. Dans le cas, où $|\alpha \log x| > 1$, elle reste encore utile au calcul numérique à peu près comme la série pour $\log(1+\lambda)$.

Pour $x=1$ la série (2^a) donne l'intégrale bien connue qu'on a déjà rencontrée plus haut, à savoir

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha+\beta-1}-x^{\alpha-1}}{\log x}\,dx = \log\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Il est évidemment permis de remplacer dans (2) la quantité λ par $i\lambda$, ce qui donne

$$\int_0^x \frac{x^{\alpha(1+i\lambda)-1}}{\log x}dx = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}}{\log x}dx + x^\alpha\left[i\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{i}{3}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^4+\frac{i}{5}\lambda^5+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)}{1!}\left[-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{i}{3}\lambda^3+\frac{1}{4}\lambda^4-\frac{i}{5}\lambda^5-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^2}{2!}\left[-\frac{i}{3}\lambda^3-\frac{1}{4}\lambda^4+\frac{i}{5}\lambda^5+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^3}{3!}\left[\frac{1}{4}\lambda^4-\frac{i}{5}\lambda^5-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right]+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^4}{4!}\left[\frac{i}{5}\lambda^5+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^5}{5!}\left[-\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots.\right]+\ldots.$$

$$=\int_0^x \frac{x^{\alpha-1}}{\log x}dx+x^\alpha\left[\left(\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{4}\lambda^4+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots.\right)+i\left(\lambda-\frac{1}{3}\lambda^3+\frac{1}{5}\lambda^5-\ldots\right)\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)}{1}\left[\left(-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right)+i\left(\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{1}{5}\lambda^5+\ldots\right)\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^2}{2!}\left[\left(-\frac{1}{4}\lambda^4+\frac{1}{6}\lambda^6-\ldots\right)+i\left(-\frac{1}{3}\lambda^3+\frac{1}{5}\lambda^5-\ldots\right)\right]+$$

$$+x^\alpha\frac{(\alpha\log x)^3}{3!}\left[\left(\frac{1}{4}\lambda^4-\frac{1}{6}\lambda^6+\ldots\right)+i\left(-\frac{1}{5}\lambda^5+\ldots\right)\right]+\ldots.$$

En vertu des séries

$$\left.\begin{aligned}\log\sqrt{1+x^2} &= \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{8}x^8+\dots\\ \operatorname{arctg} x &= x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\dots\end{aligned}\right\}\ |x|<1$$

on peut écrire, en supposant $|\lambda|<1$,

$$\int_0^x \frac{x^{a-1+\beta i}}{\log x}dx=\int_0^x \frac{x^{a-1}e^{ia\lambda\log x}}{\log x}dx=\int_0^x \frac{x^{a-1}[\cos(a\lambda\log x)+i\sin(a\lambda\log x)]}{\log x}dx=$$

$$=\int_0^x \frac{x^{a-1}}{\log x}dx+x^a\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}+i\operatorname{arctg}\lambda\right]-$$

$$-x^a\frac{(a\log x)}{1!}\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}+i(\operatorname{arctg}\lambda-\lambda)\right]+$$

$$+x^a\frac{(a\log x)^2}{2!}\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}-\frac{1}{2}\lambda^2+i(\operatorname{arctg}\lambda-\lambda)\right]-$$

$$-x^a\frac{(a\log x)^3}{3!}\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}-\frac{1}{2}\lambda^2+i(\operatorname{arctg}\lambda-\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3)\right]+$$

$$+x^a\frac{(a\log x)^4}{4!}\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4+i(\operatorname{arctg}\lambda-\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3)\right]+\dots$$

. . . . . .

$$+x^a\frac{(a\log x)^{2n}}{(2n)!}\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4-\dots\frac{(-1)^n}{2n}\lambda^{2n}+\right.$$

$$\left.+i(\operatorname{arctg}\lambda-\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3-\dots\frac{(-1)^n}{2n-1}\lambda^{2n-1}\right]-$$

$$-x^a\frac{(a\log x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[\log\sqrt{1+\lambda^2}-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4-\dots\frac{(-1)^n}{2n}\lambda^{2n}+\right.$$

$$\left.+i(\operatorname{arctg}\lambda-\lambda+\frac{1}{3}\lambda^3-\dots\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\lambda^{2n+1}\right]+\dots.$$

La convergence de cette série donne lieu à une remarque analogue à celle qui vient d'être faite à l'égard de la série précédente.

De cette égalité en découlent deux autres que l'on obtient en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires.

(3)

$$\int_0^x \frac{x^{a-1}\cos(a\lambda\log x)}{\log x}dx = \int_0^x \frac{x^{a-1}}{\log x}dx + x^a\left[\log\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{(a\log x)}{1!}\log\sqrt{1+\lambda^2} + \right.$$

$$+\frac{(a\log x)^2}{2!}(\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{1}{2}\lambda^2) - \frac{(a\log x)^3}{3!}(\log\sqrt{1+\lambda^2}) - \frac{1}{2}\lambda^2) +$$

$$+\frac{(a\log x)^4}{4!}(\log\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^4) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(a\log x)^{2n}}{(2n)!}(\log\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^4 - \ldots \frac{(-1)^n}{2n}\lambda^{2n}) -$$

$$\left. - \frac{(a\log x)^{2n+1}}{(2n+1)!}(\log\sqrt{1+\lambda^2} - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda^4 - \ldots \frac{(-1)^n}{2n}\lambda^{2n}) + \ldots\right]$$

$$(4)\qquad \int_0^x \frac{x^{a-1}\sin(a\lambda\log x)}{\log x}dx = x^a\left[\operatorname{arctg}\lambda - \frac{(a\log x)}{1!}(\operatorname{arctg}\lambda - \lambda) + \right.$$

$$+\frac{(a\log x)^2}{2!}(\operatorname{arctg}\lambda - \lambda) - \frac{(a\log x)^3}{3!}(\operatorname{arctg}\lambda - \lambda + \frac{1}{3}\lambda^3) +$$

$$+\frac{(a\log x)^4}{4!}(\operatorname{arctg}\lambda - \lambda + \frac{1}{3}\lambda^3) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(a\log x)^{2n}}{(2n)!}(\operatorname{arctg}\lambda - \lambda + \frac{1}{3}\lambda^3 - \ldots \frac{(-1)^n}{2n-1}\lambda^{2n-1}) -$$

$$\left. - \frac{(a\log x)^{2n+1}}{(2n+1)!}(\operatorname{arctg}\lambda - \lambda + \frac{1}{3}\lambda^3 - \ldots \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\lambda^{2n+1}) + \ldots\right]$$

Dans le cas particulier, où $x=1$, l'équation (3) donne

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\cos(\beta\log x)}{\log x}dx = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{\log x}dx + \log\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{a}\right)^2}$$

ou bien

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}[1-\cos(\beta \log x)]}{\log x}\,dx = \log \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{a}\right)^2}}$$

ou encore

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\sin^2\left(\frac{1}{2}\beta \log x\right)}{\log x}\,dx = \frac{1}{2}\log \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{a}\right)^2}}.$$

La substitution

$$\log x = -y, \quad x = e^{-y}, \quad dx = -e^{-y}dy$$

permet de donner à cette intégrale la forme

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\sin^2\left(\frac{1}{2}\beta y\right)}{y}\,dy = \frac{1}{4}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}.$$

(Cette intégrale est probablement connue ; cependant je ne l'ai pas trouvée dans les ouvrages à ma disposition.)

La formule (4) donne pour $x=1$ l'intégrale connue

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\sin(\beta \log x)}{\log x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{a},$$

à laquelle, à l'aide de la substitution $\log x = -y$, on peut donner la forme

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ay}\sin \beta y}{y}\,dy = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{a}.$$

Cette dernière intégrale est une fonction continue de α qui conserve sa signification encore pour $\alpha=0$, de sorte que l'on retrouve l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta y}{y}\,dy = \pm\frac{\pi}{2}, \text{ suivant que } \beta \gtrless 0.$$

Il va de soi que ces intégrales sont susceptibles d'une infinité de formes plus ou moins intéressantes, mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans plus de détails.

II

Dans la suite on envisagera le logarithme-intégral comme une fonction de la variable complexe $z = x + yi$ et l'on étudiera, pour autant que cela paraît utile, la représentation transmise par la fonction

$$\zeta = \xi + \eta i = \int_0^z \frac{dz}{\log z}.$$

L'original dans le plan (z) et l'image dans le plan (ζ) sont, en général, semblables dans leurs éléments infiniment petits, ce qui veut dire que les angles correspondants dans les deux plans sont égaux. Les *points singuliers*, c'est-à-dire les points, où la représentation cesse d'être semblable dans les éléments infiniment petits, sont ceux où la dérivée de la fonction considérée devient zéro ou infiniment grande. Dans le cas actuel où

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\log z}$$

ce sont les points $z = 1$, $z = 0$ et $z = \infty$.

1) Pour reconnaître la nature de la fonction ζ au point $z = 1$, il suffit de développer cette dernière, dans le voisinage de ce point critique, en une série ordonnée suivant les puissances de $(z - 1)$. A cet effet, soit

$$z = 1 + t, \quad dz = dt,$$

et ζ_1 la valeur (infiniment grande) que prend ζ pour $z = 1$; on a alors

$$\zeta - \zeta_1 = \int_0^t \frac{dt}{\log(1+t)} = \int_0^t \frac{dt}{t - \frac{1}{2}t^2 + \ldots} = \int_0^t \frac{dt}{t}\left(1 - \frac{1}{2}t + \ldots\right)^{-1} =$$

$$= \int_0^t \frac{dt}{t}\left(1 + \frac{1}{2}t \ldots\right) = \log t + \ldots$$

et l'on voit que $t = 0$ ou $z = 1$ est ce qu'on appelle un *pôle logarithmique*. Il s'ensuit, par exemple, que si le point z, parti de l'origine et arrivé en $z = 1$, décrit une demi-circonférence autour de ce point comme centre et avec un rayon aussi petit

qu'on voudra, dans le sens positif (celui des angles croissants), pour continuer ensuite son chemin le long de l'axe réel, la fonction ζ prend, correspondant à cette demi-circonférence, la composante imaginaire $+\pi i$ et continue ensuite son chemin parallèlement à l'axe réel du plan (ζ). A un demi-tour autour du point $z=1$, dans le sens négatif, correspond la composante imaginaire $-\pi i$ de la fonction ζ, et en général, à un arc de cette même circonférence dont l'angle au centre est égal à $\pm(2m+1)\pi$, où m signifie un nombre entier positif, répond, dans le plan (ζ), la composante $\pm(2m+1)\pi i$. La surface de Riemann, destinée à transformer la fonction ζ en une fonction uniforme, se compose donc d'une infinité de feuillets qui passent l'un dans l'autre de la manière connue le long des lignes de passage établies de $z=1$ à $z=\infty$. On a déjà vu que pour des z réels ζ est négatif de $z=0$ à $z=1$, et devient $-\infty$ en $z=1$. Dès que z a dépassé ce point et se meut le long de l'axe réel jusqu'à $z=\infty$, ζ décrit l'une des droites $\eta=\pm(2m+1)\pi$ de $\xi=-\infty$ jusqu'à $\xi=+\infty$.

2) Le point $z=0$ est comme dit M. Graf (l. c. pg. 54) *un pôle d'une nature toute particulière.* Le moyen le plus efficace d'étudier la fonction ζ dans le voisinage de ce point est, sans doute, celui de déterminer par un petit nombre de points les images de quelques droites, partant de l'origine et allant à l'infini. A cet effet soit

$$z=\rho e^{\varphi i},$$

où ρ est une variable réelle qui ne prend que des valeurs positives et φ la mesure circulaire d'un angle constant. Alors z décrit une droite, partant de l'origine et faisant l'angle φ avec l'axe positif des x. $(y=\operatorname{tg}\varphi.\ x,\ x=0,\ \ldots\ \infty)$. Par la substitution

$$z=\rho e^{\varphi i},\ dz=e^{\varphi i}d\rho$$

la fonction ζ se transforme en

$$\zeta=\int_0^\rho \frac{e^{\varphi i}d\rho}{\log(\rho e^{\varphi i})}=e^{\varphi i}\int_0^\rho \frac{d\rho}{\log\rho+\varphi i}=e^{\varphi i}\int_0^\rho \frac{\log\rho-\varphi i}{\log^2\rho+\varphi^2}d\rho=$$

$$=e^{\varphi i}\int_0^\rho \frac{\log\rho\,d\rho}{\log^2\rho+\varphi^2}-i\varphi\,e^{\varphi i}\int_0^\rho \frac{d\rho}{\log^2\rho+\varphi^2}.$$

Posant, pour simplifier l'écriture,

$$\int_0^\rho \frac{\log\rho\, d\rho}{\log^2\rho+\varphi^2}=A, \qquad \int_0^\rho \frac{d\rho}{\log^2\rho+\varphi^2}=B,$$

il vient

$$\zeta=\xi+\eta i=e^{\varphi i}(A-i\varphi B)=(A\cos\varphi+\varphi B\sin\varphi)+i(A\sin\varphi-\varphi B\cos\varphi).$$

De cette façon les points des courbes correspondant aux droites en question, sont donnés d'une manière uniforme par les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi=A\cos\varphi+\varphi B\sin\varphi \\ \eta=A\sin\varphi-\varphi B\cos\varphi. \end{cases}$$

Les quantités réelles A et B étant indépendantes du signe de φ, ces formules montrent immédiatement que deux courbes qui correspondent à deux rayons symétriques par rapport à l'axe réel (φ et $-\varphi$), sont également symétriques par rapport à ce même axe.

On a d'abord, en posant pour abréger $\log^2\rho+\varphi^2=D$,

$$dA=\frac{\log\rho}{D}d\rho, \qquad d^2A=\frac{-\log^2\rho+\varphi^2}{\rho D^2}d\rho^2,$$

$$dB=\frac{d\rho}{D}, \qquad d^2B=-\frac{2\log\rho}{\rho D^2}d\rho^2,$$

puis ensuite

$$d\xi=\frac{\cos\varphi\log\rho+\varphi\sin\varphi}{D}d\rho, \quad d^2\xi=\frac{\cos\varphi(\varphi^2-\log^2\rho)-2\varphi\sin\varphi\log\rho}{\rho D^2}d\rho^2,$$

$$d\eta=\frac{\sin\varphi\log\rho-\varphi\cos\varphi}{D}d\rho, \quad d^2\eta=\frac{\sin\varphi(\varphi^2-\log^2\rho)+2\varphi\cos\varphi\log\rho}{\rho D^2}d\rho^2.$$

Soit α l'angle que fait la tangente au point (ξ, η) avec l'axe positif des ξ, $d\sigma$ l'élément d'arc et R le rayon de courbure; on trouve

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\sin\varphi\log\rho-\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\log\rho+\varphi\sin\varphi}, \quad d\sigma=\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}=\frac{d\rho}{\sqrt{D}},$$

$$R=\frac{d\sigma^3}{d\xi\,d^2\eta-d\eta\,d^2\xi}=\frac{\rho}{\varphi}\sqrt{D}=\frac{\rho}{\varphi}\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}.$$

L'observation des signes de $d\xi$ et $d\eta$ dans le voisinage de

$\rho = 0$, $d\rho$ étant supposé positif, permet de reconnaître les directions suivant lesquelles les courbes correspondant à des valeurs déterminées de φ s'éloignent de l'origine. On trouve, par exemple, que pour

$$\varphi = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \alpha = -\pi,$$

$$\varphi = \frac{1}{4}\pi, \operatorname{tg}\alpha = 1, \quad \alpha = -\frac{3}{4}\pi,$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi, \operatorname{tg}\alpha = \infty, \quad \alpha = -\frac{1}{2}\pi,$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi, \operatorname{tg}\alpha = -1, \quad \alpha = -\frac{1}{4}\pi,$$

$$\varphi = \pi, \quad \operatorname{tg}\alpha = 0, \quad \alpha = 0.$$

Lorsque $\rho = 1$, $\log \rho = 0$, il vient

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{cotg} \varphi,$$

d'où il suit que les tangentes à ces courbes, aux points correspondant à $\rho = 1$, sont perpendiculaires aux directions initiales.

Pour $\rho = \infty$ on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi,$$

de sorte que, ρ croissant sans limite, les tangentes à ces courbes se rapprochent indéfiniment de la direction φ.

Le rayon de courbure R de toutes ces courbes, à l'exception de celle qui correspond à $\varphi = 0$, a la valeur zéro pour $\rho = 0$. Cela ne veut pas dire cependant que l'origine soit un point de rebroussement de ces courbes, mais seulement qu'en ce point elles cessent d'être réelles, puisque ρ n'admet pas de valeurs négatives.

La connaissance des maxima et minima des coordonnées ξ et η facilite beaucoup la construction d'une courbe. Or, dans le cas actuel $d\xi = 0$, si

$$\cos \varphi . \log \rho + \varphi \sin \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = e^{-\varphi \operatorname{tg} \varphi},$$

l'abscisse ξ possède donc un maximum ou un minimum, par exemple pour les combinaisons suivantes de φ et ρ :

$$\varphi = \frac{1}{4}\pi, \qquad \rho = e^{-\frac{1}{4}\pi}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi, \qquad \rho = 0$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi, \qquad \rho = e^{\frac{3}{4}\pi}$$

$$\varphi = \pi, \qquad \rho = 1.$$

L'ordonnée η atteint son maximum ou son minimum quand $d\eta = 0$, c'est-à-dire quand

$$\sin\varphi \log\rho - \varphi\cos\varphi = 0, \quad \text{ou} \quad \rho = e^{\varphi \operatorname{cotg}\varphi},$$

ce qui donne par exemple les combinaisons

$$\varphi = \frac{1}{4}\pi, \qquad \rho = e^{\frac{1}{4}\pi}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\pi, \qquad \rho = 1$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi, \qquad \rho = e^{-\frac{3}{4}\pi}$$

$$\varphi = \pi, \qquad \rho = 0$$

Afin d'obtenir les valeurs numériques de ξ et η, il paraîtrait naturel de calculer en premier lieu les intégrales réelles A et B et d'employer ensuite les formules (5). Mais j'ai trouvé, après divers essais, qu'il est plus simple d'évaluer directement $\zeta = \xi + \eta i$ à l'aide de la série (1^a) convenablement modifiée, ce qui rend superflue la connaissance des quantités A et B qui, d'ailleurs, sont données par les formules tirées de (5)

$$A = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi$$

$$\varphi\, B = \xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi$$

La série (1^a)

$$\int_0^z \frac{dz}{\log z} = C' + \log(\log z) + \frac{\log z}{1.1!} + \frac{\log^2 z}{2.2!} + \frac{\log^3 z}{3.3!} + \dots$$

est convergente sans restriction pour toutes les valeurs réelles et positives de z; dans cette hypothèse elle donne la valeur numérique du logarithme-intégral, pourvu qu'on y remplace la

constante C′ par C, et, dans le cas où $z < 1$, le terme $\log(\log z)$ par $\log(-\log z)$. Il est donc permis de l'étendre à des valeurs complexes de z, occupant le plan entier, ce qui peut se faire de la manière suivante.

Si l'on pose

$$z = \rho e^{\varphi i},$$

le logarithme principal de z devient

$$\log z = \log \rho + \varphi i,$$

où φ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. En écrivant pour abréger

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log^n z}{n \,.\, n!} = \mathrm{S}(\log z), \quad \log \rho = s$$

et en remplaçant $\log z$ par sa valeur, il vient à l'aide du théorème de Taylor

$$\mathrm{S}(s+\varphi i) = \mathrm{S}(s) + \mathrm{S}^{\mathrm{I}}(s)\frac{\varphi i}{1!} - \mathrm{S}^{\mathrm{II}}(s)\frac{\varphi^2}{2!} - \mathrm{S}^{\mathrm{III}}(s)\frac{\varphi^3 i}{3!} + \mathrm{S}^{\mathrm{IV}}(s)\frac{\varphi^4}{4!} +$$

$$+ \mathrm{S}^{\mathrm{V}}(s)\frac{\varphi^5 i}{5!} - \ldots + \mathrm{S}^{(n)}(s)\frac{(\varphi i)^n}{n!} + \ldots$$

Or,

$$\mathrm{S}(s) = \frac{s}{1.1!} + \frac{s^2}{2.2!} + \frac{s^3}{3.3!} + \ldots + \frac{s^n}{n.n!} + \ldots$$

et par conséquent, cette série étant différentiable terme par terme

$$\mathrm{S}^{\mathrm{I}}(s) = 1 + \frac{s}{2!} + \frac{s^2}{3!} + \frac{s^3}{4!} + \ldots + \frac{s^{n-1}}{n!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{s}\left[-1 + 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + + \ldots + \frac{s^n}{n!} + \ldots\right] = \frac{e^s - 1}{s}.$$

Le coefficient de $\frac{(\varphi i)^n}{n!}$ peut ainsi prendre l'une ou l'autre des formes

$$\mathrm{S}^{(n)}(s) = \mathrm{D}_s^{(n-1)}\left(\frac{e^s - 1}{s}\right).$$

Afin de former la dérivée n^{ième} de la fonction $\frac{1}{s}(e^s - 1)$, on appliquera le théorème de Leibnitz déjà cité (pg 206), en posant

$$u = e^s - 1, \quad v = \frac{1}{s},$$

d'où

$$u^{\mathrm{I}} = e^s, \qquad v^{\mathrm{I}} = -\frac{1!}{s^2},$$

$$u^{\mathrm{II}} = e^s, \qquad v^{\mathrm{II}} = \frac{2!}{s^3},$$

. . . .

$$u^{(k)} = e^s, \qquad v^{(k)} = (-1)^k \frac{k!}{s^{k+1}}$$

et l'on trouve, n_k désignant le k[ième] coefficient du binôme, soit

$$n_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ k}$$

$$\mathrm{S}^{(n+1)}(s) = \mathrm{D}_s^{(n)}\left(\frac{e^s-1}{s}\right) = \frac{1}{s}e^s - n_1\frac{1!}{s^2}e^s + n_2\frac{2!}{s^3}e^s - n_3\frac{3!}{s^4}e^s + \ldots (-1)^k n_k \frac{k!}{s_{k+1}}e^s + \ldots)$$

$$\ldots + (-1)^{n-2} n_2 \frac{(n-2)!}{s^{n-1}}e^s + (-1)^{n-1} n_1 \frac{(n-1)!}{s^n}e^s + (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}(e^s - 1.$$

$$= \frac{e^s}{s^{n+1}}\left[s^n - ns^{n-1} + n(n-1)s^{n-2} - n(n-1)(n-2)s^{n-3} + \ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^{n-2} n(n-1)(n-2)\ldots 3\,s^2 +$$

$$\left. + (-1)^{n-1} n(n-1)\ldots 3.2\,s + (-1)^n n!\right] - (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{n!}{s^{n+1}} + \frac{e^s}{s^{n+1}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^\lambda\, n(n-1)(n-2)\ldots(n-\lambda+1)\,s^{n-\lambda}.$$

Les dix premières dérivées de S (s) sont

$$\mathrm{S}^{\mathrm{I}}(s) = \frac{1}{s}(e^s - 1)$$

$$\mathrm{S}^{\mathrm{II}}(s) = \frac{e^s}{s^2}[s-1] + \frac{1}{s^2}$$

$$\mathrm{S}^{\mathrm{III}}(s) = \frac{e^s}{s^3}[s^2 - 2s + 2] - \frac{2}{s^3}$$

$$\mathrm{S}^{\mathrm{IV}}(s) = \frac{e^s}{s^4}[s^3 - 3s^2 + 6s - 6] + \frac{6}{s^4}$$

$$S^{V}(s)=\frac{e^s}{s^5}[s^4-4s^3+12s^2-24s+24]-\frac{24}{s^5}$$

$$S^{VI}(s)=\frac{e^s}{s^6}[s^5-5s^4+20s^3-60s^2+120s-120]+\frac{120}{s^6}$$

$$S^{VII}(s)=\frac{e^s}{s^7}[s^6-6s^5+30s^4-120s^3+360s^2-720s+720]-\frac{720}{s^7}$$

$$S^{VIII}(s)=\frac{e^s}{s^8}[s^7-7s^6+42s^5-210s^4+840s^3-2520s^2+5040s-5040]+$$
$$+\frac{5040}{s^8}$$

$$S^{IX}(s)=\frac{e^s}{s^9}[s^8-8s^7+56s^6-336s^5+1680s^4-6720s^3+20160s^2-$$
$$-40320s+40320]-\frac{40320}{s^9}$$

$$S^{X}(s)=\frac{e^s}{s^{10}}[s^9-9s^8+72s^7-504s^6+3024s^5-15120s^4+60480s^3-$$
$$-181440s^2+362880s-362880]+\frac{362880}{s^{10}}.$$

Pour $s=0$ le coefficient de $\frac{(\varphi i)^n}{n!}$ devient $S^{(n)}(0)=\frac{1}{n}$. Entre deux dérivées successives de S (s) il existe la relation

$$S^{(n+1)}(s)=\frac{e^s-nS^{(n)}(s)}{s}$$

que l'on démontre facilement et dont la connaissance peut être utile, soit comme moyen de contrôle, soit pour calculer les termes de la série

En introduisant $z=\rho e^{\varphi i}$ dans le terme log (log z), il vient d'abord

$$\log z=\log\rho+\varphi i=r\,e^{\psi i},$$

où

$$r=\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}$$

est une quantité positive et ψ un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, déterminé de telle façon que

$$\cos\psi=\frac{\log\rho}{\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}},\ \sin\psi=\frac{\varphi}{\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}},\ \operatorname{tg}\psi=\frac{\varphi}{\log\rho}.$$

Ensuite $\log(\log z)$ prend la forme

$$\log(\log z)=\log\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}+\psi i$$

et la série (1ª) devient

$$(6)\quad \int_0^z\frac{dz}{\log z}=C'+\log\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}+\psi i+S(s)+S'(s)\frac{\varphi i}{1!}-S''(s)\frac{\varphi^2}{2!}-\ldots$$

Il s'agit maintenant de déterminer la constante C' ensorte que, pour $\varphi=0$, c'est-à-dire pour des z réels, la série (6) coïncide avec la série (1) et que, pour $\rho=0$, elle affecte la valeur zéro. Dans les applications de la série (6) le terme $\log\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}$ doit toujours être réel; d'autre part on peut écrire

$$\log\sqrt{\log^2\rho+\varphi^2}=\log\left(\log\rho\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{\log^2\rho}}\right)=$$

$$=\log\left[e^{\pi i-\pi i}\log\left(\rho\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{\log^2\rho}}\right)\right]=$$

$$=\log(-\log\rho)-\pi i+\log\left(\sqrt{1+\frac{\varphi^2}{\log^2\rho}}\right)$$

et cette expression se réduit, pour $\varphi=0$, à

$$\log(-\log\rho)-\pi i.$$

Or, quant φ, partant de valeurs positives, tend vers zéro et que $\rho<1$, ψ acquiert la valeur π et l'on prendra, en conséquence

$$C'=C-\pi i.$$

Dans le cas, où φ est négatif et tend vers zéro, il vient $\psi=-\pi$, et il faudra poser

$$C'=C+\pi i.$$

Par ces déterminations de C' le but proposé est atteint. Elles subsistent encore, lorsque $\rho>1$, car on a déjà vu que le loga-

rithme-intégral prend, dans le premier feuillet, la composante imaginaire $\pm \pi i$, aussitôt que l'argument réel z dépasse l'unité.

La série (6), appliquée à des φ positifs,

$$(6)\quad \int_0^z \frac{dz}{\log z} = C - \pi i + \log\sqrt{\log^2\rho + \varphi^2} + \psi i + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{s^n}{n.n!} +$$

$$+\left[\frac{e^s-1}{s}\right]\varphi i - \left[e^s\frac{s-1}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]\frac{\varphi^2}{2!} - \left[\frac{e^s}{s^3}(s^2-2s+2)-\frac{2}{s^3}\right]\frac{\varphi^3}{3!}i +$$

$$+\left[\frac{e^s}{s^4}(s^3-3s^2+6s-6)+\frac{6}{s^4}\right]\frac{\varphi^4}{4!}+\ldots.$$

devient pour $\rho = 1$, c'est-à-dire dans le cas où z se meut de l'origine jusqu'à un point du cercle des unités, et où $\psi = \frac{1}{2}\pi$

$$\int_0^{e^{\varphi i}} \frac{dz}{\log z} = C - \pi i + \log\varphi + \frac{1}{2}\pi i + \frac{\varphi}{1.1!}i - \frac{\varphi^2}{2.2!} - \frac{\varphi^3}{3.3!}i + \frac{\varphi^4}{4.4!} + \ldots + \frac{(\varphi i)^n}{n.n!} + \ldots$$

$$= C - \frac{1}{2}\pi i + \log\varphi + \left[-\frac{\varphi^2}{2.2!} + \frac{\varphi^4}{4.4!} - \frac{\varphi^6}{6.6!} + \ldots\right] + i\left[\frac{\varphi}{1.1!} - \frac{\varphi^3}{3.3!} + \frac{\varphi^5}{5.5!} - \ldots\right].$$

Or, on a

$$-\frac{\varphi^2}{2.2!} + \frac{\varphi^4}{4.4!} - \frac{\varphi^6}{6.6!} + \ldots = \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi - 1}{\varphi} d\varphi = -2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} d\varphi,$$

$$\frac{\varphi}{1.1!} - \frac{\varphi^3}{3.3!} + \frac{\varphi^5}{5.5!} - \ldots = \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi$$

et par suite

$$\int_0^{e^{\varphi i}} \frac{dz}{\log z} = C - \frac{1}{2}\pi i + \log\varphi - 2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\varphi} d\varphi + i\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi.$$

La présence du terme $-\frac{1}{2}\pi i$ dans cette formule pourrait paraître étrange, vu que pour $\varphi = 0$ l'intégrale devient réelle et égale à $-\infty$; mais on n'oubliera pas que le logarithme-intégral acquiert la composante imaginaire $-\frac{1}{2}\pi i$, lorsque la variable z

décrit, dans le sens négatif, le quadrant d'une circonférence de rayon infiniment petit et avec $z=1$ pour centre, afin de passer de l'axe réel à la circonférence du cercle des unités.

Voici maintenant quelques chiffres obtenus à l'aide de la série (6). Partout où l'intervention des tables de logarithmes à 7 décimales a été nécessaire, l'exactitude de la 7ᵉ décimale ne saurait être garantie.

1) $\varphi=\pi.\int_0^{e^{\pi i}}\frac{dz}{\log z}=0{,}07366791_{21}+i.0{,}28114072_{51}$

(calculé jusqu'à φ^{20}.)

$$\int_0^{e^{(1+\pi i)}}\frac{dz}{\log z}=-0{,}022_{23}+i.0{,}806_{32}\qquad(\varphi^{13})$$

$$\int_0^{e^{(2+\pi i)}}\frac{dz}{\log z}=-0{,}611..+i.1{,}990\qquad(\varphi^{12})$$

2) $\varphi=\frac{3}{4}\pi.\int_0^{e^{\frac{3}{4}\pi i}}\frac{dz}{\log z}=0{,}33059740_{38}+i.0{,}16895213_{45}\qquad(\varphi^{17})$

$$\int_0^{e^{(1+\frac{3}{4}\pi i)}}\frac{dz}{\log z}=0{,}69555_{69}+i.0{,}76566_{22}\qquad(\varphi^{13})$$

$$\int_0^{e^{\frac{3}{4}\pi(1+i)}}\frac{dz}{\log z}=1{,}063_{42}+i.3{,}353_{51}\qquad(\varphi^{10}.\text{ Maximum de }\xi.)$$

$$\int_0^{e^{\frac{3}{4}\pi(-1+i)}}\frac{dz}{\log z}=0{,}0233_{59}-i.0{,}0031_{15}\qquad(\varphi^{10}.\text{ Minimum de }\eta.)$$

3) $\varphi=\frac{1}{2}\pi.\int_0^{e^{\frac{1}{2}\pi i}}\frac{dz}{\log z}=0{,}47200065_{13}-i.0{,}20003415_{86}\qquad(\varphi^{11}.\text{ Minim. de }\eta.)$

$$\int_0^{e^{(1+\frac{1}{2}\pi i)}} \frac{dz}{\log z} = 1{,}4180675 + i.0{,}1328283. \qquad (\varphi^{13}.\ \text{Tables de log.})$$

4) $\varphi = \frac{1}{4}\pi.$ $\displaystyle\int_0^{e^{\frac{1}{4}\pi i}} \frac{dz}{\log z} = 0{,}18534832_{42} - i.0{,}81182044_{50}$ (φ^{12})

$$\int_0^{e^{(1+\frac{1}{4}\pi i)}} \frac{dz}{\log z} = 1{,}8357377 - i.1{,}1831371 \qquad (\varphi^{10}.\ \text{Tables de log.})$$

$$\int_0^{e^{\frac{1}{4}\pi(1+i)}} \frac{dz}{\log z} = 1{,}395995_{51} - i.1{,}211008_{82} \qquad (\varphi^{9}.\ \text{Minim. de } \eta.)$$

$$\int_0^{e^{\frac{1}{4}\pi(-1+i)}} \frac{dz}{\log z} = -0{,}0632402_{4} - i.0{,}2561938_{7} \qquad (\varphi^{8}.\ \text{Minim. de } \xi.)$$

Si l'on admet que dans l'intégrale

$$J = \int_0^{\bar{z}} \frac{dz}{\log z}$$

le log z ne soit plus réduit à sa seule valeur principale, on pourra poser, en désignant par k un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et par φ un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

$$z = \rho e^{i(\varphi+2k\pi)i},$$

$$\log z = \log \rho + (\varphi + 2k\pi)\, i = re^{\psi i}.$$

et le logarithme principal de cette expression devient

$$\log (\log z) = \log r + \psi i.$$

Dans cette formule

$$r = \sqrt{\log^2 \rho + (\varphi + 2k\pi)^2}$$

est une quantité positive et ψ un angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$, déterminé par les équations

$$\cos\psi = \frac{\log\rho}{\sqrt{\log^2\rho+(\varphi+2k\pi)^2}},\quad \sin\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{\sqrt{\log^2\rho+(\varphi+2k\pi)^2}},\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\varphi+2k\pi}{\log\rho}.$$

L'intégrale J peut encore être calculée au moyen de la série

$$(7)\qquad \int_0^z \frac{dz}{\log z} = C^I + \log\sqrt{\log^2\rho+(\varphi+2k\pi)^2} + \psi i + S(s) + S^I(s)\frac{\varphi+2k\pi}{1!}\,i -$$

$$- S^{II}(s)\frac{(\varphi+2k\pi)^2}{2!} + \ldots + S^{(n)}(s)\frac{(\varphi+2k\pi)^n i^n}{n!} + \ldots,$$

où l'on a posé, comme précédemment, $s = \log\rho$.

La constante C^I doit être déterminée de telle façon que l'intégrale prenne la valeur zéro pour $\rho = 0$. On reconnaît aisément que

$$C^I = C \mp \pi i,$$

suivant que k est positif ou négatif, ou si $k = 0$, suivant que φ est positif ou négatif. Il est évident que dans le cas, où $k \gtrless 0$, l'image de l'axe réel positif n'est plus une droite. A cause des valeurs relativement grandes de $(\varphi + 2k\pi)$, la série (7), tout en étant convergente dans le plan entier, ne se prête guère au calcul numérique.

De l'étude et des calculs qui viennent d'être faits, il découle la construction suivante. Comme on a l'habitude de le faire quand on considère le log z dans toute sa généralité, on peut se figurer que le plan (z) se compose d'une infinité de feuillets conformément aux valeurs multiples du nombre entier k. Un feuillet, F_0, sera assigné au logarithme principal, pour lequel $k=0$ et log $1=0$; le feuillet F_k, au-dessous de F_0 et le feuillet F_{-k}, au-dessus de F_0, seront destinés à représenter les mêmes valeurs de z, mais dont les logarithmes diffèrent du logarithme principal respectivement des quantités $\pm 2k\pi i$. Tous les feuillets seront coupés le long de l'axe réel depuis l'origine jusqu'à $-\infty$; ensuite on reliera le bord positif $(\varphi = +\pi)$ de chaque feuillet au bord négatif du feuillet qui se trouve immédiatement au-dessous et le bord négatif $(\varphi = -\pi)$ au bord positif du feuillet

immédiatement au-dessus. Dans la surface de Riemann ainsi construite, non-seulement le $\log z$, mais encore l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\log z}$ est une fonction uniforme de la variable z.

En résumé, l'origine du plan (z) est un point singulier tel que, dans chaque feuillet séparément, l'égalité est conservée entre les angles de l'original et les angles correspondants de l'image. Le rayon $\varphi = \text{const.}$ qui peut appartenir à tous les feuillets, a une infinité de courbes pour images; ces courbes diffèrent les unes des autres, il est vrai, mais leurs tangentes initiales ont toutes la même direction, et il en est de même des tangentes aux points $\rho=1$ et $\rho=\infty$. La nature de la fonction $\int_0^z \frac{dz}{\log z}$ paraît entièrement caractérisée par ces propriétés.

Dans la fig. 2 on a tracé les courbes correspondant aux rayons $\varphi = \frac{1}{4}\pi, = \frac{1}{2}\pi, = \frac{3}{4}\pi, = \pi$ du feuillet F_0.

3) En ce qui concerne le point $z=\infty$, il paraît certain que la fonction $\int_0^z \frac{dz}{\log z}$ s'y comporte comme à l'origine. En tous cas, les courbes qui correspondent aux rayons $\varphi=c$ et $\varphi=-(\pi-c)$, situés dans le même feuillet, passent à l'infini l'une dans l'autre sans interruption de la continuité, de sorte que l'égalité des angles correspondants est maintenue. Les différents feuillets doivent être soudés les uns aux autres de manière à ne pas déranger les lignes de passage déjà établies, et il n'est pas nécessaire de créer de nouvelles voies de passage.

Lausanne, le 18 mai 1895.

Un accident a empêché le brochage de cette planche dans le précédent fascicule, c'est pourquoi nous rendons les lecteurs du Bulletin attentifs au fait qu'elle concerne le mémoire de M. Amstein sur le « Logarithme intégral », vol. XXXI, p. 203, Bulletin nº 119.

L'Editeur.

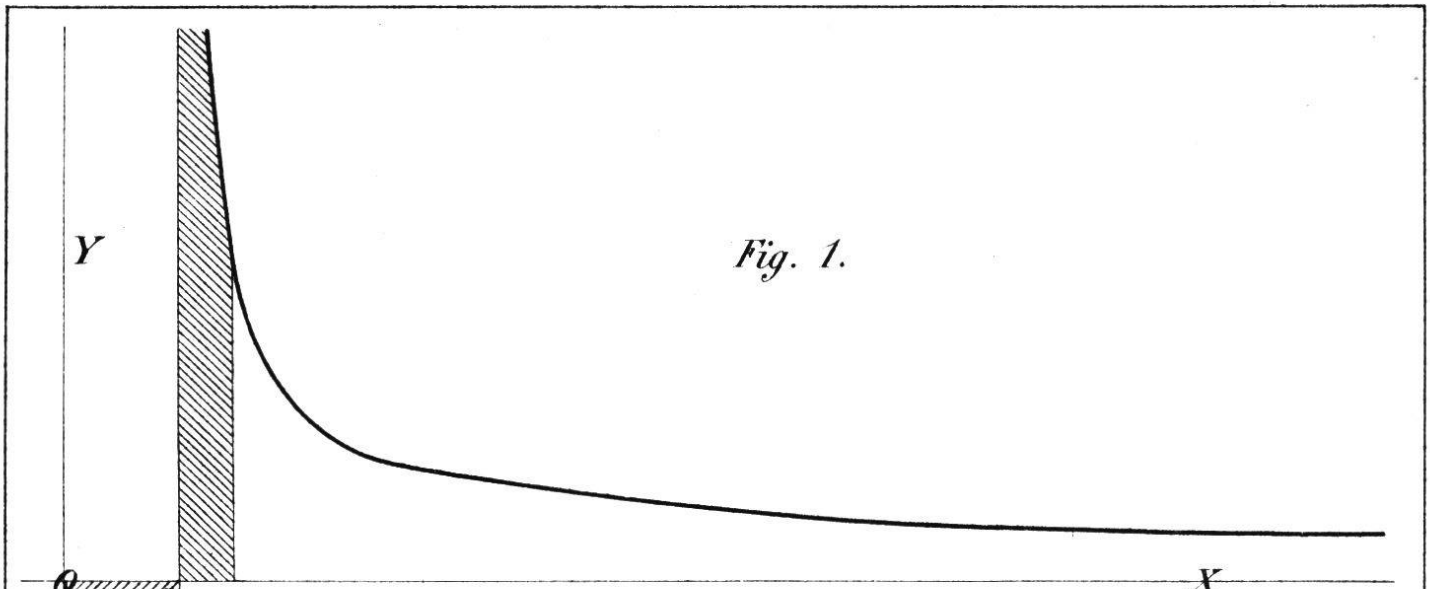

Fig. 1.

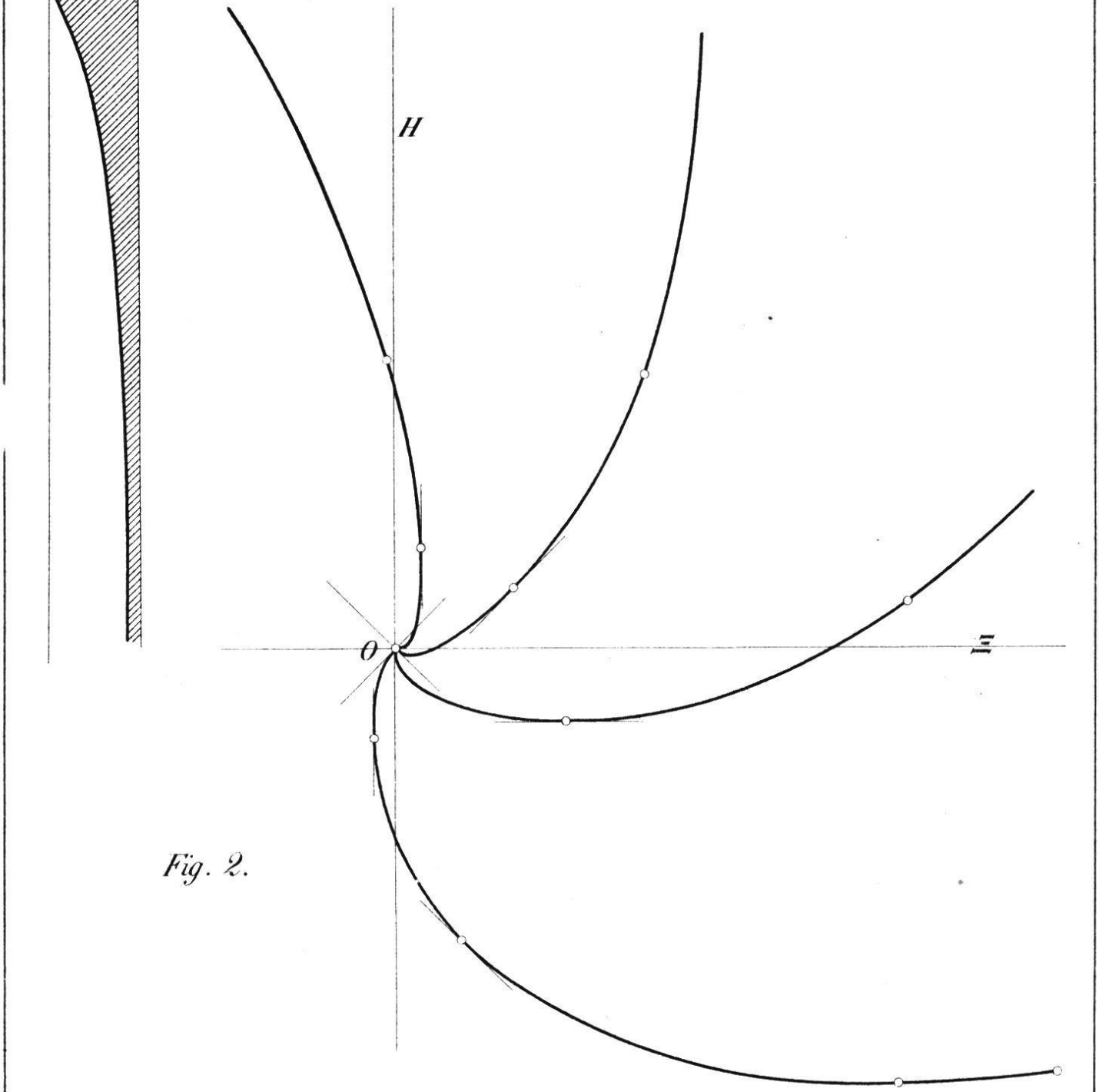

Fig. 2.