Économie politique : la répartition des revenus

Autor(en): **Herzen, Edouard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **35 (1899)**

Heft 133

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-265686

ÉCONOMIE POLITIQUE

LA RÉPARTITION DES REVENUS

PAR

Edouard HERZEN, ingénieur.

Dans son *Cours d'économie politique*, M. Pareto a fait une étude approfondie de la répartition des revenus. Malheureusement ses raisonnements ne sont accessibles qu'aux personnes familiarisées avec les hautes mathématiques. On peut présenter les principales propriétés de la répartition des revenus d'une façon élémentaire ne demandant d'autres connaissances mathématiques que celles exigées en Suisse pour le baccalauréat classique. C'est ce que nous allons essayer de montrer.

Tout d'abord nous attirons l'attention sur cette expression : répartition des *revenus*. Il serait plus juste de dire : répartition de la *richesse*. Mais comme la richesse totale est très difficile à évaluer, nous nous servirons exclusivement des revenus considérés comme signes de la richesse. Les revenus comprennent alors non seulement ceux de la fortune mobilière, mais encore ceux du travail.

Considérons un tableau nous donnant la répartition des revenus, dans un pays donné, à une époque déterminée : par exemple les tableaux donnés par M. Giffen pour l'Angleterre en 1843 et 1879-80. Il s'agit du schedule D de l'*income-tax*.

x	$N_x^{x\ max.}$		x	$N_x^{x\ max.}$	
Livres sterling	**1843**	**1879-80**	Livres sterling	**1843**	**1879-80**
150	106'637	320'162	900	7'923	19'359
200	67'271	190'061	1000	7'029	17'963
300	38'901	101'616	2000	2'801	7'611
400	25'472	61'720	3000	1'566	4'480
500	18'691	45'219	4000	1'040	3'050
600	13'911	33'902	5'000	701	2'292
700	11'239	27'008	10'000	208	853
800	9'365	22'954	50'000	8	68

x désigne un certain revenu.

$N_x^{x\,max.}$, le nombre des personnes ayant des revenus égaux ou supérieurs à x, c'est-à-dire compris entre x et $x^{max.}$

L'examen de ce tableau nous révèle une particularité remarquable : *à des valeurs de* x *formant une proportion, correspondent des valeurs de* $N_x^{x\,max.}$ *formant elles-mêmes sensiblement une autre proportion.* C'est ce que nous appellerons la propriété fondamentale de la répartition des revenus.

Par exemple, considérons les valeurs de x suivantes :

$x = 200,\quad 300,\quad 600,\quad 900$, auxquelles correspondent :

pour 1843, $N_x^{x\,max.}$	67'271,	38'901,	13'911,	7'923
et pour 1879-80, $N_x^{x\,max.}$	190'061,	101'616,	33'902,	19'359.

On a :
$$\frac{200}{300} = \frac{600}{900},$$

eh bien, je dis qu'on aura sensiblement :

$$\frac{67'271}{38'901} = \frac{13'911}{7'923} \qquad \text{et :} \qquad \frac{190'061}{101'616} = \frac{33'902}{19'359}.$$

En effet, si nous calculons les valeurs de ces derniers rapports, il vient :

$$1{,}73 = 1{,}76 \qquad \text{et :} \qquad 1{,}87 = 1{,}76$$

ce qui est sensiblement vrai.

Essayons des intervalles beaucoup plus grands :

Pour 1843 :
$$\frac{400}{500} = \frac{4'000}{5'000}$$
$$\frac{25'472}{18'691} = \frac{1'040}{701}$$
$$1{,}36 = 1{,}48$$

Les écarts ne dépassent guère $^1/_{10}$. Cela est très remarquable, quand on pense que rien n'empêcherait, *a priori*, d'avoir par exemple 1,5 dans le premier membre et 20 ou 30 dans le second[1].

[1] Remarquons encore que si $\frac{x_1}{x_2} < 1$, $\frac{N_x^{x\,max.}}{N_x^{x\,max.}} > 1$. Cela nous conduit

On s'était aperçu depuis très longtemps d'une certaine constance dans la répartition des revenus. M. Pareto, le premier, a traduit ce fait analytiquement[2] et l'a vérifié avec une quantité énorme de documents : pour la plupart des villes italiennes, pour Bâle, pour Paris, pour la Prusse en 1852, 1876, 1881, 1886, 1894 ; pour la Saxe 1880, 1886 ; pour Augsbourg en 1471, 1498 et 1512, pour le Pérou à la fin du XVIII^e^ siècle, etc., etc.

Il y a donc là une véritable loi, dont nous retiendrons ceci, qu'elle est indépendante de l'époque considérée et du pays considéré, indépendante par conséquent de la grandeur de la richesse totale par rapport à la population.

Imaginons maintenant qu'on construise une courbe (voyez figure) telle, que : surface ombrée $= N_x^{x\max.}$.

La surface totale sera le nombre total de personnes ayant des revenus, c'est la population N.

Cette courbe aura toujours l'allure de la figure, c'est-à-dire qu'elle ira toujours s'évasant de haut en bas d'une façon assez continue et présentera des perturbations au sommet et au bas.

L'avantage de cette représentation graphique est de substituer une image continue aux valeurs isolées livrées par les statistiques, ce qui est non seulement plus commode, mais aussi plus juste. Il est bon de remarquer que, dans le tracé de cette

à penser que les x et les N sont reliés par une relation telle que :

$$\frac{N_{x_1}^{x\ \max.}}{N_{x_2}^{x\ \max.}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

$$\text{ou : } N_x^{x\ \max.} = \frac{A}{x^a}.$$

[2] Il l'a exprimé sous cette forme : traçons deux axes, sur l'un portons les log de x, sur l'autre les log de $N_x^{x\ \max.}$. Les points ainsi déterminés sont sensiblement disposés en ligne droite.

V. Son Cours d'écon. polit., tome II, page 305.

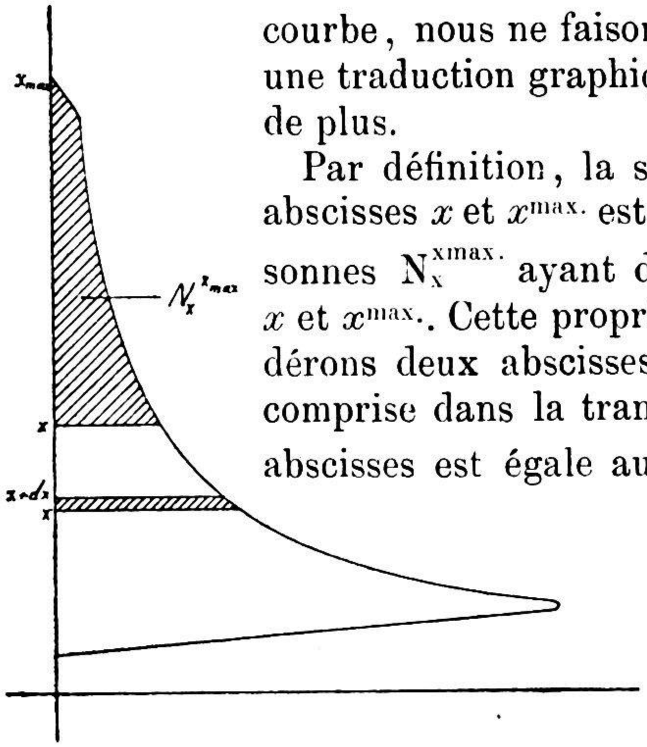
On a alors :

$$\log N_x^{x\ \max.} = \log A - \alpha \log x,$$

ou :

$$N_x^{x\ \max.} = \frac{A}{x^a}.$$

C'est bien le résultat déjà trouvé.



courbe, nous ne faisons aucune hypothèse : c'est une traduction graphique des statistiques et rien de plus.

Par définition, la surface comprise entre les abscisses x et $x^{\text{max.}}$ est égale au ombre de personnes $N_x^{x\max.}$ ayant des revenus compris entre x et $x^{\text{max.}}$. Cette propriété peut s'étendre. Considérons deux abscisses x et ξ, alors la surface comprise dans la tranche limitée par ces deux abscisses est égale au nombre de personnes N_x^{ξ} ayant des revenus compris entre x et ξ. En effet, la surface de cette tranche est égale à : $N_x^{x\max.} - N_{\xi}^{x\max.}$, ce qui est bien égal à N_x^{ξ}.

Il est facile de voir que la proprieté fondamentale de la répartition des revenus s'applique aussi à la courbe que nous venons de construire.

En effet, si $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_3}{x_4} = \alpha$, on a : $^{1)}\ \dfrac{N_{x_1}^{x\max.}}{N_{x_2}^{x\max.}} = \dfrac{N_{x_3}^{x\max.}}{N_{x_4}^{x\max.}} = \beta$

De même, si $\dfrac{\xi_1}{\xi_2} = \dfrac{\xi_3}{\xi_4} = \alpha'$, on a : $\dfrac{N_{\xi_1}^{x\max.}}{N_{\xi_2}^{x\max.}} = \dfrac{N_{\xi_3}^{x\max.}}{N_{\xi_4}^{x\max.}} = \beta'$,

Or, si ξ_1, ξ_2 et ξ_3 tendent vers x, x_2 et x_3, α' et β' tendront vers α et β. Nous pourrons toujours prendre ξ_1, ξ_2 et ξ_3, assez près de x_1, x_2 et x_3 pour que les différences $(\alpha' - \alpha)$ et $(\beta' - \beta)$ soient inférieures à toute quantité donnée, par exemple, inférieures à 0,0000001 ou 0,0000000001, etc. De sorte que, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 étant suffisamment voisins de x_1, x_2 et x_3, nous pourrons écrire sans erreur sensible[1] :

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi_3}{\xi_4} = \alpha \quad \text{et} \quad {}^{2)}\ \frac{N_{\xi_1}^{x\max.}}{N_{\xi_2}^{x\max.}} = \frac{N_{\xi_3}^{x\max.}}{N_{\xi_4}^{x\max.}} = \beta.$$

Mais alors les égalités [1]) et [2]) permettent d'écrire :

[1] Cela devient même rigoureux dans les infiniment petits.

$$\frac{N_{\xi_1}^{x\ \max.} - N_{x_1}^{x\ \max.}}{N_{\xi_2}^{x\ \max.} - N_{x_2}^{x\ \max.}} = \frac{N_{\xi_3}^{x\ \max.} - N_{x_3}^{x\ \max.}}{N_{\xi_4}^{x\ \max.} - N_{x_4}^{x\ \max.}},$$

ou :

$$\frac{N_{x_1}^{\xi_1}}{N_{x_2}^{\xi_2}} = \frac{N_{x_3}^{\xi_3}}{N_{x_4}^{\xi_4}}.$$

Dans la suite, lorsque deux valeurs de x seront ainsi extrêmement voisines, nous désignerons la première par x, la seconde par $x + dx$; dx indiquant donc un accroissement très petit de x.

Alors si l'on a : $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4},$$

on aura : $$\frac{N_{x_1}^{x_1 + dx}}{N_{x_2}^{x_2 + dx}} = \frac{N_{x_3}^{x_3 + dx}}{N_{x_4}^{x_4 + dx}}.$$

C'est une seconde forme de la propriété fondamentale, très utile pour les applications, et qu'on pourrait énoncer comme suit : si l'on considère quatre revenus x_1, x_2, x_3 et x_4 formant une proportion, les nombres des personnes ayant des revenus compris entre x_1 et $x_1 + dx$, x_2 et $x_2 + dx$, x_3 et $x_3 + dx$, x_4 et $x_4 + dx$, forment sensiblement une autre proportion.

Voyons maintenant quelques applications.

I

Considérons le revenu total, c'est-à-dire la somme totale d'argent dont la population jouit par an. Ce revenu total dépend évidemment de trois facteurs :

1° De la grandeur de la surface N, c'est-à-dire de la *population*;

2° De l'éloignement de cette surface à l'axe des N, c'est-à-dire du *revenu minimum*;

3° De la forme de la surface N, c'est-à-dire de *l'évasement* de son profil.

Par revenu minimum, nous entendons le revenu des classes les plus pauvres, le produit du travail des masses sans biens les plus inférieures. Quant à l'évasement du profil, il est absolument indépendant du revenu minimum et ne dépend que des proportions relatives des différentes couches sociales.

Cela posé, supposons que le revenu total augmente par rapport à la population et proposons-nous de rechercher ce qui en résulte.

Cette augmentation du revenu total dépend de deux choses, le revenu minimum et l'évasement du profil, dont les influences respectives peuvent être étudiées séparément.

On peut considérer l'augmentation de revenu total comme provenant d'une nouvelle répartition dans laquelle l'évasement du profil serait resté le même, mais où le revenu minimum aurait varié. Dans ce cas, les proportions relatives de deux couches sociales consécutives devant rester constantes, le revenu total ne peut augmenter par rapport à la population que par une élévation du revenu minimum. Ainsi, dans ce cas, augmenter le revenu total par rapport à la population, c'est élever le revenu minimum.

Mais nous pouvons aussi considérer l'augmentation du revenu total comme provenant d'une nouvelle répartition dans laquelle le revenu minimum serait resté le même, mais où l'évasement du profil aurait varié. Imaginons qu'on divise la population, suivant la grandeur des revenus, en trois groupes ou classes, plus ou moins arbitraires. On peut dire : si le revenu total augmente par rapport à la population, c'est que les gros capitalistes d'une part, les masses sans biens d'autre part, s'accroissent tous deux aux dépens de la classe moyenne. On observe un effet différentiel : l'accroissement du gros capital est plus fort, relativement, que l'accroissement du prolétariat. Le profil se creuse dans les régions moyennes pour se renfler aux extrémités. Il y a diminution de l'évasement dans certaines couches, augmentation dans d'autres. C'est ici qu'intervient la propriété fondamentale. Par les proportions qu'elle établit et qui, nous le savons, sont sensiblement vérifiées dans les statistiques, elle rend évidemment impossible un tel changement de profil et fait de toute augmentation ou diminution de l'évasement un phénomène général, c'est-à-dire atteignant simultanément toutes les couches sociales. Ainsi donc, le revenu minimum restant constant, à toute augmentation du revenu total par rapport à la population, correspond une diminution générale dans l'évasement de la courbe.

Et si maintenant nous considérons le revenu minimum et l'évasement du profil comme tous deux variables, à toute augmentation du revenu total correspondront alors : soit une élévation du revenu minimum, soit une diminution dans l'évasement de la courbe, soit enfin ces deux phénomènes simultanément. Nous avons un exemple de ce genre dans le mouvement social actuel. De nos jours, grâce au rapide essor de l'industrie, le revenu total a certainement augmenté par rapport à la population. Cette augmentation est accompagnée d'une part d'une élévation du revenu minimum, c'est-à-dire que la situation *absolue* (mais pas nécessairement la situation *relative*) des classes inférieures va toujours s'améliorant ; d'autre part, si on considère deux couches sociales quelconques, il y a augmentation continuelle de la couche supérieure par rapport à l'autre.

Quel est l'effet de ces variations sur l'inégalité des revenus ? Si l'on imposait à chaque instant une égalité parfaite, on ne pourrait y arriver qu'en attribuant à chacun le revenu moyen, c'est-à-dire le quotient du revenu total par le nombre des habitants. En réalité il est des revenus supérieurs, il en est de plus petits. Considérons les moyennes de ces revenus supérieurs et inférieurs au revenu moyen. L'écart entre ces deux moyennes rapporté à la grandeur du revenu moyen, sera pour nous, en quelque sorte, la mesure de l'inégalité de revenus. Si, par exemple, on arrive à l'égalité parfaite par enrichissement général, cet écart devient nul, et l'inégalité des revenus a bien diminué jusqu'à zéro. Il en est de même si on arrive à l'égalité parfaite par appauvrissement général ou simplement par groupement et concentration des revenus autour d'une même valeur.

Entendue ainsi, chaque variation actuelle dans l'inégalité des revenus est l'effet des deux phénomènes précédemment observés. La diminution dans l'évasement du profil, considérée en soi, c'est-à-dire comme se produisant seule, tend à augmenter l'inégalité des revenus, mais, combinée avec une élévation du revenu minimum, occasionne au contraire une diminution de cette inégalité. Par l'élévation du revenu minimum, en effet, les couches sociales inférieures montent graduellement et puisque, en considérant deux couches consécutives, la supérieure augmente constamment par rapport à l'autre, il faut nécessairement que les couches supérieures ne participent point à un mouvement ascendant en proportion. Les revenus tendent donc à se rapprocher, à se concentrer dans une zone moins étendue ; leur inégalité s'atténue. C'est précisément ce que démontrent les statistiques[1]. Cela ne veut point dire, encore une fois, que la si-

[1] Voyez l'*Essai sur la répartition des richesses*, de M. Leroy-Beaulieu, et les calculs effectués par M. Pareto.

tuation relative des classes inférieures s'améliore; il intervient dans cette question une série de facteurs psychologiques et moraux qu'on ne saurait évaluer.

Nous avons là une première application de la propriété fondamentale qui, certes, présente son intérêt. Il en est une seconde, non moins importante.

II

Du fait que la répartition des revenus offre une certaine constance, s'effectue suivant certaines proportions, il serait téméraire de conclure qu'elle n'est pas l'effet du hasard. Le hasard, lui aussi, obéit à une loi, du moins dans les grands nombres, qui est de proportionner ses effets à leurs probabilités *a prioristiques.* Cette propriété seule peut justifier la construction des tables de mortalité, l'établissement des calculs relatifs aux assurances. Elle se trouve vérifiée par la concordance des prévisions calculées avec les faits *moyens.* Avant d'affirmer que la répartition des revenus n'est pas l'effet du hasard, il faut donc le démontrer. Nous allons pour cela nous servir du calcul des probabilités et nous le ferons de telle sorte que personne ne puisse contester la légitimité de son application. Nous considérons donc une sorte de loterie, où le nombre de personnes ayant une somme déterminée sera l'effet du pur hasard. Puis nous nous demanderons : est-il vraisemblable d'arriver, par ce procédé, à une répartition analogue à celle des revenus.

Tout d'abord quelques définitions sont nécessaires. Considérons une urne contenant par exemple 10 boules blanches, 5 boules rouges et 3 boules vertes, soit en tout $N = 18$ boules. On peut tirer indifféremment l'une ou l'autre des 18 boules. Nous dirons que la cause qui, par son effet, amène l'extraction d'une boule, peut engendrer 18 cas différents et également possibles. Considérons maintenant un certain événement, par exemple le fait de tirer une boule *qui ne soit pas blanche.* Parmi les 18 cas possibles, il en est $5 + 3 = 8$ qui sont favorables à cet événement. Alors, par définition, le rapport $\frac{8}{18}$ des cas favorables au nombre total des cas possibles sera la *probabilité mathématique* de l'événement. Cette probabilité indique donc la proportion des cas favorables : il y en a 8 sur 18.

Remarque. On a : $\frac{8}{18} = \frac{5}{18} + \frac{3}{18}$ donc : si l'on partage les cas possibles en groupes, la probabilité de l'événement considéré est la somme des probabilités qu'il a dans chacun des groupes formés. C'est ce que nous appellerons le *principe de probabilité totale.*

Application. Supposons que deux événements A et B soient seuls possibles et que, par conséquent l'un ou l'autre doive nécessairement arriver, on dit alors que ces deux événements sont *contraires.*

Cherchons la probabilité que *l'un ou l'autre* des deux événements A et B arrive. D'après le principe précédent cette probabilité sera la somme des probabilités de A et de B. D'ailleurs cette probabilité est évidemment égale à 1 puisque *l'un ou l'autre* des deux événements devant nécessairement arriver, le nombre de cas favorables est égal au nombre des cas possibles. Ainsi : la somme des probabilités de deux événements contraires est toujours égale à 1.

Prenons maintenant 2 urnes, contenant chacune 2 boules, une blanche et une noire. La probabilité de tirer une blanche dans une des urnes considérée isolément est $\frac{1}{2}$. Quelle est la probabilité de l'extraction simultanée des deux blanches dans les deux urnes ?

Les combinaisons possibles sont :

1°	Blanche	dans	la première,	blanche	dans la seconde.
2°	»	»	»	noire	»
3°	Noire	»	»	blanche	»
4°	»	»	»	noire	»

Sur quatre cas possibles, un seul, le premier, est favorable à l'événement considéré. Par définition, la probabilité est $\frac{1}{4}$.

Remarque. $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ donc : si plusieurs événements sont indépendants les uns des autres, la probabilité de leur production simultanée est le produit de leurs probabilités particulières. C'est ce que nous appellerons le *principe de probabilité composée.*

Démontrons maintenant que la répartition des revenus n'est pas l'effet du hasard. Mais d'abord il faut définir ce qu'on appelle une répartition due au hasard.

Je suppose qu'on ait 1000 fr. à répartir entre 100 personnes. Mettons dans une urne 100 boules, absolument identiques de forme, mais portant chacune le nom d'une personne. Cela fait, tirons une boule, donnons un franc à la personne correspondante et remettons la boule dans l'urne, en l'agitant. Nous recommencerons cette opération 1000 fois de suite, ou bien, ce qui revient au même, nous prendrons, dès le début, 1000 urnes, autant qu'il y a de francs, contenant chacune 100 boules et nous tirerons simultanément une boule dans chaque urne. Les 1000 francs se trouvent ainsi répartis entre les 100 personnes et nous dirons qu'une telle répartition est l'effet du hasard. Il y aura peut-être des personnes qui n'auront rien, mais c'est peu probable. Ce sera peut-être la même personne qui aura les 1000 fr., mais c'est encore moins probable.

Nous admettrons, parce que cela est logique et que l'expérience l'a vérifié, que, lorsqu'il s'agit de grands chiffres, les événements réels, tels qu'ils se produisent effectivement, sont proportionnels à leurs probabilités mathématiques.

Dans notre cas donné (pour autant que le calcul des probabilités peut s'appliquer à d'aussi petits chiffres), le nombre de personnes qui reçoivent 10 fr. serait au nombre de personnes qui en reçoivent 20, comme la probabilité mathématique pour une personne, de recevoir 10 fr. est à la probabilité mathématique de recevoir 20 fr.

Proposons-nous de calculer ces différentes probabilités. Considérons une urne séparément. Elle contient 100 boules. La probabilité de tirer une boule déterminée est donc, par définition, $\frac{1}{100}$. La probabilité qu'on ne la tire pas (événement contraire) est $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$. Il y a donc 99 contre 100 à parier qu'on ne la tirera pas.

Reprenons alors les 1000 urnes. Je veux calculer la probabilité P_0 que, puisant simultanément une boule dans chaque urne, mon nom ne soit pas amené, donc que je reçoive 0 fr. La probabilité que cet événement arrive dans la première urne est $\frac{99}{100}$ la probabilité qu'il arrive dans la seconde est aussi $\frac{99}{100}$ etc. D'après le principe des probabilités composées, la probabilité que cet événement arrive simultanément dans les 1000 urnes sera :

$$P_0 = \underbrace{\frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} \, \frac{99}{100} \cdots \frac{99}{100}}_{\text{1000 fois.}} = \left(\frac{99}{100}\right)^{1000}$$

C'est un nombre très petit. L'événement est donc peu probable.

Calculons au contraire la probabilité P_{1000} que les 1000 boules tirées portent toutes mon nom. On aura:

$$P_{1000} = \underbrace{\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdots\cdots \frac{1}{100}}_{1000 \text{ fois.}} = \left(\frac{1}{100}\right)^{1000}$$

C'est un nombre d'une petitesse extrême. L'événement est donc fort peu probable.

Nous retrouvons ainsi par le calcul ce que nous avions déjà intuitivement prévu.

Allons plus loin. Calculons la probabilité qu'il y aurait de recevoir 2 fr., par exemple.

Considérons deux urnes déterminées. Si je cherche la probabilité que ce soit précisément dans ces deux urnes, et pas dans les autres, que mon nom soit tiré, je dois effectuer les opérations suivantes :

Probabilité que mon nom soit tiré dans une urne considérée isolément : $\frac{1}{100}$.

Probabilité que mon nom soit tiré simultanément dans ces deux urnes : $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{100}\right)^2$.

Probabilité que mon nom ne soit pas tiré dans une des urnes considérée isolément : $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$.

Probabilité que, simultanément, il ne soit pas tiré dans les (1000 — 2) autres urnes : $\left(\frac{99}{100}\right)^{1000-2}$.

Enfin, probabilité que, simultanément, la boule soit tirée dans les deux urnes considérées et pas dans les (1000 — 2) autres :

$$\left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(\frac{99}{100}\right)^{1000-2}.$$

Maintenant, d'après le principe de la probabilité totale, la probabilité P_2 d'avoir 2 fr. sera évidemment autant de fois celle que nous venons de trouver qu'on peut former de groupes distincts avec les 1000 urnes en les prenant deux à deux, c'est-à-dire : $\frac{1000}{1} \cdot \frac{999}{2}$.

Ainsi : $P_2 = \frac{1000 \,.\, 999}{1 \,.\, 2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(\frac{99}{100}\right)^{1000-2}$.

De même $P_3 = \frac{1000 \,.\, 999 \,.\, 998}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \left(\frac{1}{100}\right)^3 \left(\frac{99}{100}\right)^{1000-3}$

— — — — — — —

D'une façon générale, si p et $q = 1 - p$ expriment les probabilités qu'une boule déterminée soit, ou non, amenée, en considérant une urne isolément ; la probabilité que cette boule se trouve x fois lorsqu'on tire simultanément dans S urnes, est :

$$P_x = \frac{S(S-1)\ldots(S+1-x)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots x} p^x q^{S-x}.$$

C'est, si l'on veut le terme en p^x du développement du binôme $(p+q)^S$. On a donc :

$$(p+q)^S = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_S.$$

Vérification. — Nous savons que $p + q = 1$ donc $(p+q)^S = 1$ aussi ; ce qui veut dire que la somme des probabilités $P_0 + P_1 + \ldots + P_3 = 1$, en d'autres termes, que chacune des combinaisons 0 fr., 1 fr., 2 fr. ... *S* fr. est contraire à l'ensemble des autres. En effet, il est absolument certain qu'après un tirage dans les S urnes, on aura l'une ou l'autre de ces combinaisons, mais pas plusieurs simultanément.

Supposons que *S* désigne le revenu total. Nous prendrons S urnes, autant qu'il y a de francs à répartir. Dans chacune de ces urnes, nous mettrons *N* boules, *N* désignant comme précédemment le nombre total de personnes entre lesquelles s'effectue la répartition, c'est-à-dire la population. Si l'on considère une urne isolément, la probabilité de voir son nom tiré est $p = \frac{1}{N}$, c'est donc l'inverse de la population. La probabilité qu'on ne le tire pas est au contraire $q = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$.

On a : $\frac{p}{q} = \frac{1}{N-1}$.

La probabilité que, puisant simultanément dans les S urnes, notre nom soit tiré X fois, ou, si vous voulez, la probabilité d'avoir, par l'effet du hasard, un revenu de x francs, est, comme nous venons de le voir :

$$P_x = \frac{S(S-1)\ldots.(S+1-x)}{1.2\ldots..x} p^x q^{S-x}.$$

Dans cette expression, x procède par valeurs entières. Imaginons qu'on construise une courbe telle que la surface comprise entre les abscissses $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ soit proportionnelle à la probabilité P_x ; alors, réciproquement, la probabilité P_x d'avoir un revenu égal à x sera proportionnelle à la surface comprise entre les abscisses $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Nous dirons que P_x est la probabilité d'avoir un revenu compris entre $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ et nous écrirons : $P_x = P_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}$.

La possibilité d'avoir un revenu compris entre x et une valeur très voisine $x + dx$ sera alors : $P_x^{x+dx} = P_x . dx$. Géométriquement ce sera la surface de la tranche très mince comprise entre les abscisses x et $x + dx$.[1]

Ainsi : $$P_x^{x+dx} = \frac{S(S-1)\ldots.(S+1-x)}{1.2.3\ldots.x} p^x . q^{S-x} . dx.$$

De même $$P_{2x}^{2x+dx} = \frac{S(S-1)\ldots.(S+1-2x)}{1.2.3\ldots.(2x)} p^{2x} . q^{S-2x} . dx,$$

$$P_{4x}^{4x+dx} = \frac{S(S-1)\ldots.(S+1-4x)}{1.2.3\ldots.(4x)} p^{4x} . q^{S-4x} . dx,$$

etc.

Or on a : $$\frac{2x}{x} = \frac{4x}{2x};$$

donc, si une répartition comme celle des revenus était l'effet du pur hasard, on devrait avoir sensiblement, quelles que soient les valeurs de x, p et $q = 1 - p$:

$$\frac{P_{2x}^{2x+dx}}{P^{x+dx}} = \frac{P_{4x}^{4x+dx}}{P_{2x}^{2x+dx}},$$

[1] On voit ainsi très nettement que nous remplaçons P^x par la somme des probabilités de tous les x compris entre $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ et $\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Cela a l'avantage de substituer un phénomène continu à la série des valeurs isolées trouvées précédemment.

ou :

$$\frac{(x+1)\,(x+2)\ldots\ldots(2x)}{-x)(S-x-1)\ldots\ldots(S+1-2x)}\,p^x\,q^{-x}=\frac{(2x+1)(2x+2)\ldots\ldots(4x)}{(S-2x)(S-2x-1)\ldots\ldots(S+1-4x)}\,p^{x^2}\,q^{-x^2}$$

ou :

$$\frac{(x+1)\ldots\ldots(2x)}{(S-x)\ldots\ldots(S+1-2x)}=\frac{(2x+1)\ldots\ldots(4x)}{(S-2x)\ldots\ldots(S+1-4x)}\,p^x\,q^{-x}$$

ou $$A=B\left(\frac{p}{q}\right)^x.$$

Or considérons le même revenu x dans deux pays où le reveuu total S est le même, mais où la population N diffère. Pour ces deux pays A et B sont les mêmes. Par contre $\frac{p}{q}=\frac{1}{N-1}$ qui est sensiblement l'inverse de la population, et *a fortiori* le facteur $\left(\frac{p}{q}\right)^x$ varient énormément. Si donc la relation est remplie pour le premier pays, elle ne l'est certainement pas pour le second.

En admettant donc, puisqu'il s'agit de grands nombres, qu'une répartition due au hasard se ferait proportionnellement aux probabilités mathématiques, nous sommes autorisés à dire: *une répartition comme celle des revenus n'est pas l'effet du pur hasard.* Il y a une cause constante, inhérente à la nature des choses, et qui fait se répartir les revenus d'une certaine manière et pas autrement. La loi fondamentale de la répartition des revenus étant indépendante du pays et de l'époque considérés, c'est dans l'homme même qu'il faut chercher la raison d'être de cette loi. On comprend l'importance sociologique d'une pareille constatation.

Lausanne, octobre 1899.

Edouard HERZEN, ingénieur.