

# Recherches sur la théorie des déformations des systèmes élastiques

Autor(en): **Mayor, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **50 (1914-1915)**

Heft 182

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-269625>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

# RECHERCHES

SUR LA

## Théorie des déformations des systèmes élastiques

PAR

**B. MAYOR, Professeur.**

---

### Introduction.

Dans l'étude géométrique des systèmes envisagés par la Statique graphique et la Résistance des matériaux, le principe des travaux virtuels et les théorèmes de Maxwell conduisent naturellement à un complexe quadratique qui joue, dans l'espace, un rôle identique à celui de l'ellipse d'élasticité des systèmes plans. Mais, ainsi que je l'ai montré dans une note très condensée<sup>1</sup>, il est encore possible, à l'aide de ces mêmes principes, de mettre en évidence des éléments géométriques qui n'avaient été signalés ni dans le cas du plan ni dans celui de l'espace. Ces éléments accompagnent en quelque sorte l'ellipse d'élasticité ou le complexe correspondant et s'évanouissent précisément dans tous les cas où l'on avait pu, jusqu'ici, faire intervenir utilement ces derniers. Dans ces conditions, il est à présumer qu'ils pourront jouer un rôle très étendu dans la théorie des déformations en élargissant, dans une grande mesure, le champ des appli-

---

<sup>1</sup> Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 15 avril 1912.

cations de l'ellipse d'élasticité. C'est pourquoi, tout en laissant provisoirement de côté le cas des systèmes à trois dimensions qui exige des développements analytiques importants, je me propose d'étudier ici les propriétés de ces éléments dont je n'avais pu que signaler l'existence dans la note déjà citée.

J'utiliserai systématiquement, dans ce but, des coordonnées trilineaires d'un type particulier, dont l'origine mécanique est évidente et dont j'ai déjà indiqué une application<sup>1</sup>. Il est toutefois indispensable que je revienne, pour les compléter, sur la définition et les propriétés de ces coordonnées, qui paraissent devoir jouer un grand rôle dans toute question où il est nécessaire de considérer simultanément les propriétés descriptives et les propriétés métriques des figures de la géométrie plane.

---

<sup>1</sup>*Bulletin technique de la Suisse Romande* : 10 décembre 1911, 10 février 1912 et 10 décembre 1912.

---

## CHAPITRE PREMIER

**Coordonnées d'un vecteur et d'une masse.**

1. **Coordonnées d'un vecteur.** — Considérons, dans un plan, trois axes  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , c'est-à-dire trois droites sur chacune desquelles un sens de parcours positif ait été choisi une fois pour toutes. Supposons, de plus, que ces droites ne passent pas par un même point, mais forment un triangle qui sera dit le triangle de référence.

Un vecteur quelconque  $P$  étant donné dans le plan de ce triangle, supposons qu'on le décompose en trois composantes admettant respectivement les droites  $u$ ,  $v$  et  $w$  pour lignes d'action ; convenons ensuite de désigner par  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les intensités des composantes obtenues, chacune d'elles étant affectée du signe plus ou du signe moins, suivant que son sens concorde ou ne concorde pas avec le sens de parcours positif choisi sur l'axe correspondant. Comme la décomposition d'un vecteur suivant trois directions non concourantes est toujours possible d'une manière et d'une seule, à tout vecteur  $P$  correspond ainsi un système de valeurs, et un seul, des quantités  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Réciproquement d'ailleurs, à tout système de valeurs de ces mêmes quantités correspond un vecteur  $P$  et un seul. En conséquence, les quantités  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  seront dites les coordonnées du vecteur  $P$  relativement au triangle de référence choisi.

2. **Coordonnées homogènes d'une droite.** — Le résultat qui précède peut être interprété d'une manière un peu différente.

Tout d'abord, si l'on déplace le vecteur  $P$  sur sa ligne d'action sans changer son intensité ni son sens, ses coor-

données ne subissent aucune modification. D'autre part, si l'on multiplie par un nombre arbitraire  $\rho$  l'intensité de P, ses coordonnées se trouvent multipliées par le même facteur. D'après cela, les quantités X, Y, Z peuvent être considérées comme les coordonnées *homogènes* de la droite qui se confond avec la ligne d'action de P.

Considérées à ce point de vue, les quantités X, Y et Z forment bien un système particulier de coordonnées trilineaires : elles sont en effet proportionnelles aux distances qui séparent les sommets du triangle de référence de la droite considérée, les facteurs de proportionnalité étant respectivement égaux aux inverses des hauteurs de ce triangle.

Ajoutons encore qu'il ne résulte aucune ambiguïté du double sens que l'on peut attribuer à ces coordonnées si, du moins, on a soin de spécifier dans chaque cas la nature de l'élément auquel elles se rapportent.

3. Les coordonnées qu'on vient de définir jouissent de propriétés évidentes, mais essentielles.

Considérons, en premier lieu, des vecteurs  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P_n$ , en nombre quelconque, et désignons, d'une manière générale, par  $X_i, Y_i, Z_i$  les coordonnées de  $P_i$ . Le théorème des moments montre alors immédiatement que les coordonnées X, Y, Z de la résultante de ces vecteurs sont données par les formules :

$$X = \sum_1^n X_i,$$

$$Y = \sum_1^n Y_i,$$

$$Z = \sum_1^n Z_i.$$

Considérons ensuite deux droites quelconques  $l_1$  et  $l_2$ , admettant respectivement pour coordonnées homogènes

$X_1, Y_1, Z_1$ , et  $X_2, Y_2, Z_2$ . Il résulte de la propriété qui précède que les formules :

$$\begin{aligned} X &= \lambda X_1 + \mu X_2, \\ Y &= \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ Z &= \lambda Z_1 + \mu Z_2, \end{aligned}$$

définissent, quelles que soient les valeurs attribuées à  $\lambda$  et  $\mu$ , une nouvelle droite qui passe par le point de rencontre de  $l_2$  et de  $l_1$ . De plus, il est visible qu'en donnant au rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  toutes les valeurs possibles, la droite correspondante engendre complètement le faisceau déterminé par  $l_1$  et  $l_2$ .

**4. Intensité d'un vecteur.** — Pour obtenir l'intensité d'un vecteur  $P$  défini par ses coordonnées  $X, Y, Z$ , admettons une fois pour toutes que l'on ait fixé les sens positifs sur les axes  $u, v$  et  $w$ , de manière que les sens de rotation qui en résultent soient tous positifs pour un point situé à l'intérieur du triangle de référence. Si l'on désigne alors par  $A, B$ , et  $C$  les angles de ce triangle, on voit immédiatement que les projections du vecteur  $P$  sur l'axe  $u$  et sur un axe perpendiculaire à ce dernier ont respectivement pour expressions

$$X - Y \cos C - Z \cos B$$

et  $Y \sin C - Z \sin B$

On aura donc, pour exprimer le carré de l'intensité de  $P$ , la formule

$$P^2 = (X - Y \cos C - Z \cos B)^2 + (Y \sin C - Z \sin B)^2,$$

ou, en tenant compte du fait que la somme des angles du triangle de référence est égale à deux droits,

$$P^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ \cos A - 2ZX \cos B - 2XY \cos C.$$

Il convient de remarquer qu'en posant, comme de cou-

tume,  $i = \sqrt{-1}$ , la formule précédente peut être mise sous la forme suivante

$$P^2 = (X e^{iB} + Y e^{-iA} - Z) (X e^{-iB} + Y e^{iA} - Z)$$

Les points circulaires du plan peuvent être regardés comme les enveloppes des lignes d'action des vecteurs dont les intensités sont nulles, mais dont les coordonnées conservent des valeurs finies. Ils seront donc représentés, en coordonnées-lignes, par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ \cos A - 2ZX \cos B - 2XY \cos C = 0$$

qui, d'ailleurs, se décompose dans les deux suivantes

$$\begin{aligned} X e^{iB} + Y e^{-iA} - Z &= 0, \\ X e^{-iB} + Y e^{iA} - Z &= 0. \end{aligned}$$

**5. Coordonnées d'une masse ponctuelle.** — Aux coordonnées de vecteurs ou de droites qui viennent d'être définies, correspondent dualistiquement des coordonnées ponctuelles dont l'origine mécanique est tout aussi simple.

Considérons, en effet, une masse de nature arbitraire et d'intensité  $m$ , concentrée en un point que nous désignerons également par  $m$  et qui peut être quelconque dans le plan du triangle de référence. Convenons ensuite de désigner par  $x$ ,  $y$  et  $z$  les moments statiques de cette masse relativement aux axes  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , ces moments statiques étant affectés du signe qui résulte de la convention suivante : dans le cas où le sens positif fixé sur l'axe envisagé donne lieu à un sens de rotation positif par rapport au point  $m$ , le signe du moment statique est le même que celui de la masse considérée ; lorsque, au contraire, ce sens de rotation devient négatif, le signe du moment statique est l'inverse de celui de la masse.

A toute masse ponctuelle correspond ainsi un système de valeurs et un seul des quantités  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Réciproquement, à tout système de valeurs de ces quantités on peut

faire correspondre une masse ponctuelle  $m$ , dont l'intensité et la position sont déterminées sans ambiguïté. D'une part, en effet, les distances du point  $m$  aux côtés du triangle de référence sont entre elles dans les mêmes rapports que les quantités  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et l'on sait que ces rapports suffisent pour déterminer la position de ce point. D'autre part, enfin, la position de ce point étant déterminée, l'une quelconque des quantités  $x$ ,  $y$  ou  $z$  permet ensuite de déterminer l'intensité de la masse. En conséquence, les quantités  $x$ ,  $y$ ,  $z$  seront dites les coordonnées de la masse  $m$ .

On peut remarquer tout de suite que l'intensité d'une masse s'exprime linéairement en fonction de ses coordonnées.

Prenons, en effet, comme sens positifs sur les axes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  ceux qui ont été fixés au paragraphe précédent. Si l'on désigne alors par  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les côtés et par  $S$  la surface du triangle de référence, on obtient immédiatement, pour intensité d'une masse  $m$  de coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , l'expression

$$m = \frac{1}{2S} (ax + by + cz).$$

En désignant par  $R$  le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence et en posant une fois pour toutes

$$H = \frac{S}{R},$$

la formule obtenue peut être mise sous la forme

$$m = \frac{1}{H} (x \sin A + y \sin B + z \sin C).$$

6. Comme dans le cas d'un vecteur, les coordonnées d'une masse sont susceptibles d'une deuxième interprétation.

Si l'on multiplie, en effet, par un facteur arbitraire une



masse sans changer son point de concentration, ses coordonnées sont évidemment multipliées par le même facteur. On en conclut que les quantités  $x, y, z$  peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes du point de concentration de la masse correspondante, ce qui d'ailleurs est évident.

D'autre part, les propriétés de ces nouvelles coordonnées sont entièrement analogues à celles qui caractérisent les coordonnées d'un vecteur.

Considérons, en effet, un système de masses  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$  en nombre quelconque, et désignons, d'une manière générale, par  $x_i, y_i, z_i$  les coordonnées de la masse  $m_i$ . Il résulte alors immédiatement de la théorie des moments statiques que les coordonnées  $x, y, z$  de la masse résultante du système sont données par les formules suivantes :

$$x = \sum_1^n x_i,$$

$$y = \sum_1^n y_i,$$

$$z = \sum_1^n z_i.$$

En désignant ensuite par  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  les coordonnées homogènes de deux points quelconques  $m_1$  et  $m_2$ , on vérifie sans aucune peine que les formules

$$x = \lambda x_1 + \mu x_2,$$

$$y = \lambda y_1 + \mu y_2,$$

$$z = \lambda z_1 + \mu z_2,$$

définissent, quels que soient  $\lambda$  et  $\mu$ , un point de la droite qui réunit  $m_1$  et  $m_2$ . Il est visible, de plus, qu'en donnant au rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  des valeurs convenables, on peut obtenir tous les points de la droite considérée.

7. **Moment relatif d'une masse et d'un vecteur.** — Considérons simultanément une masse  $m$  et un vecteur  $P$  dont la ligne d'action sera toujours assimilée à un axe ayant le sens même du vecteur. Convenons ensuite de désigner sous le nom de *moment relatif* de ces deux éléments, le produit de l'intensité du vecteur par le moment statique de la masse relativement à la ligne d'action de  $P$ , ce moment statique étant pris avec le signe qui résulte de la convention faite précédemment. On peut remarquer que ce moment relatif, que nous désignerons indifféremment par l'une ou l'autre des notations

$$(P, m) \text{ ou } (m, P),$$

n'est pas autre chose que le moment relatif de deux vecteurs dont l'un se confond avec  $P$ , tandis que l'autre est normal au plan du triangle de référence, passe par le point  $m$  et possède une intensité égale à celle de la masse  $m$ .

Proposons-nous de déterminer la valeur de ce moment relatif en fonction des coordonnées  $X, Y, Z$  du vecteur et des coordonnées  $x, y, z$  de la masse.

Observons à cet effet qu'en vertu d'un théorème bien connu, la somme des moments relatifs d'un nombre quelconque de vecteurs par rapport à une même masse est égale au moment relatif de cette masse et de la résultante des vecteurs considérés. Et comme  $X, Y, Z$  sont précisément les composantes du vecteur  $P$  suivant les axes  $u, v, w$ , le moment relatif cherché a évidemment pour valeur

$$(P, m) = X x + Y y + Z z.$$

8. Des conséquences essentielles découlent de la formule qu'on vient d'établir.

Le moment relatif d'un vecteur et d'une masse s'annule lorsque la masse est située sur la ligne d'action du vecteur. Il ne s'annule même que dans ce cas, si, du

moins, on suppose, comme nous le ferons dans la suite, que les intensités de la masse et du vecteur sont différentes de zéro. En conséquence, la relation

$$X x + Y y + Z z = 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la masse  $m$  soit concentrée en un point de la ligne d'action du vecteur  $P$ .

D'après cela, lorsqu'on regarde  $X, Y, Z$  comme les coordonnées homogènes d'une droite et  $x, y, z$  comme les coordonnées homogènes d'un point, l'équation précédente exprime que ce point et cette droite sont unis. Dès lors, si l'on convient de regarder  $X, Y, Z$  comme des variables, cette équation représente le point admettant  $x, y, z$  pour coordonnées ponctuelles ; elle représente, au contraire, la droite ayant  $X, Y, Z$  pour coordonnées-lignes, lorsque  $x, y, z$  sont les variables.

**9. Masses cycliques.** — La formule qui donne le carré de l'intensité d'un vecteur est, actuellement, susceptible d'une interprétation importante.

Il résulte, en effet, du paragraphe 4 que les points cycliques du plan sont caractérisés, en coordonnées-lignes, par les équations

$$\begin{aligned} X e^{iB} + Y e^{-iA} - Z &= 0, \\ X e^{-iB} + Y e^{iA} - Z &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées homogènes de ces points sont respectivement proportionnelles aux quantités

$$\begin{aligned} e^{iB}, e^{-iA}, -1 \\ e^{-iB}, e^{iA}, -1. \end{aligned}$$

Considérons alors deux masses  $\mu'$  et  $\mu''$ , admettant respectivement pour coordonnées

$$\begin{aligned} x' &= e^{iB}, y' = e^{-iA}, z' = -1, \\ x'' &= e^{-iB}, y'' = e^{iA}, z'' = -1 \end{aligned}$$

Elles sont évidemment concentrées aux points cycliques et, pour cette raison, seront appelées les *masses cycliques*. De plus, si l'on calcule, par exemple, l'intensité de la masse  $\mu'$  à l'aide de la formule du paragraphe 5, on obtient

$$\mu' = \frac{1}{H} (e^{iB} \sin A + e^{-iA} \sin B - \sin C)$$

ou, après des transformations évidentes,

$$\mu' = \frac{1}{H} [\sin (A + B) - \sin C],$$

c'est-à-dire

$$\mu' = 0,$$

puisque la somme des angles du triangle de référence est égale à deux droits.

Un calcul analogue montre que la masse  $\mu''$  s'annule aussi, de sorte que les intensités des masses cycliques sont nulles toutes deux.

Or, en tenant compte des notations qui viennent d'être fixées, l'une des formules qui donne le carré de l'intensité d'un vecteur P (§4) peut être mise sous la forme

$$P^2 = (X x' + Y y' + Z z') (X x'' + Y y'' + Z z''),$$

et comme les parenthèses du second membre représentent les moments relatifs du vecteur P par rapport aux deux masses cycliques, on peut énoncer le théorème suivant :

*Le produit des moments relatifs d'un même vecteur par rapport aux deux masses cycliques est égal au carré de l'intensité de ce vecteur.*

**10. Coordonnées d'un couple.** — Un couple de vecteurs peut être assimilé à un vecteur nul ayant pour ligne d'action la droite de l'infini du plan, le moment de ce vecteur par rapport à un point quelconque du plan étant précisément égal au moment du couple. Proposons-nous

alors de déterminer les coordonnées d'un couple de moment  $M$ .

Il suffit, dans ce but, de remarquer que le moment relatif du vecteur équivalent au couple et d'une masse quelconque  $m$  est égal au produit de l'intensité de cette masse par le moment du couple. On aura donc, en désignant par  $X, Y, Z$  les coordonnées du couple et par  $x, y, z$  celles de  $m$ ,

$$X x + Y y + Z z = M m,$$

ou, en remplaçant  $m$  par sa valeur (§ 5),

$$X x + Y y + Z z = \frac{M}{H} (x \sin A + y \sin B + z \sin C).$$

Cette relation devant être vérifiée quelles que soient les valeurs de  $x, y, z$ , on aura nécessairement

$$X = M \frac{\sin A}{H},$$

$$Y = M \frac{\sin B}{H},$$

$$Z = M \frac{\sin C}{H},$$

Ces formules résolvent le problème proposé. Elles montrent, de plus, que les coordonnées de la droite de l'infini sont proportionnelles à  $\sin A, \sin B, \sin C$ , de sorte que cette droite est représentée, en coordonnées-points, par l'équation

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0.$$

**11. Produit ponctuel de deux vecteurs.** — Considérons deux vecteurs  $P$  et  $P'$  dont les lignes d'action se rencontrent en un point  $m$  que nous supposerons tout d'abord à distance finie. Nous désignerons alors, sous le nom de *produit ponctuel de  $P$  par  $P'$*  et nous représenterons par le symbole

$$(P, P')$$

une masse concentrée au point  $m$  et dont l'intensité est égale, en valeur absolue, à l'aire du parallélogramme qu'on peut construire sur ces deux vecteurs après qu'on les a déplacés sur leurs lignes d'action de manière que chacun d'eux admette pour origine le point  $m$ . De plus, cette masse sera considérée comme positive dans le cas où le sens de rotation de  $P$  par rapport à un point situé à l'intérieur du parallélogramme précédent sera lui-même positif, tandis qu'elle sera négative dans le cas contraire.

Il est essentiel de remarquer que cette notion de produit ponctuel n'est pas identique à celle du *produit vectoriel* telle qu'elle est définie dans l'édition française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*<sup>1</sup>. La première fait intervenir, en effet, une masse ponctuelle liée à un point parfaitement déterminé, ce qui n'est pas le cas de la deuxième.

Il résulte, de la définition même du produit ponctuel, que le produit de  $P$  par  $P'$  est égal, mais de signe contraire, au produit de  $P'$  par  $P$  :

$$(P, P') = - (P', P).$$

En particulier, le produit ponctuel d'un vecteur par lui-même est égal à zéro :

$$(P, P) = 0.$$

Si, d'autre part, on désigne par  $\alpha$  l'angle formé par les deux vecteurs, l'intensité de la masse  $m$  qui représente le produit ponctuel est donnée, en valeur absolue, par la formule

$$m = P P' \sin \alpha.$$

Par conséquent, lorsque les deux vecteurs  $P$  et  $P'$  sont parallèles, leur produit ponctuel est représenté par une masse nulle rejetée à l'infini.

---

<sup>1</sup> Tome IV, volume 2, fascicule 1.

Revenant au cas général de deux vecteurs quelconques, considérons un axe  $\xi$  qui coïncide avec la ligne d'action de  $P$ , le sens positif choisi sur cet axe étant d'ailleurs arbitraire. Soit  $\xi$  l'abscisse du point  $m$  mesurée sur cet axe, à partir d'une origine fixe quelconque  $O$ , et désignons encore par  $M'$  le moment de  $P'$  par rapport à  $O$  et par  $P_\xi$  l'intensité du vecteur  $P$  prise avec le signe plus lorsque ce vecteur a même sens que l'axe envisagé. On vérifie alors, sans aucune difficulté, que l'on a, en tenant compte des signes,

$$m \xi = P_\xi M'.$$

Imaginons alors que l'on décompose  $P'$  en un nombre quelconque de vecteurs composants  $P_1', P_2', \dots, P_i', \dots, P_n'$  formant un système que nous désignerons par  $S'$  pour abrégier le langage, puis formons les produits ponctuels de  $P$  avec chacun des vecteurs de ce système. Le produit ponctuel de  $P$  par  $P_i'$  est représenté par une masse  $m_i$  concentrée en un point de l'axe  $O\xi$  dont l'abscisse vérifie l'équation

$$m_i \xi_i = P_\xi M_i',$$

dans laquelle  $M_i'$  représente le moment de  $P_i'$  par rapport à  $O$ . Par suite

$$\sum_1^n m_i \xi_i = P_\xi \sum_1^n M_i',$$

et comme, en vertu du théorème des moments,

$$M' = \sum_1^n M_i'$$

on aura nécessairement,

$$\sum_1^n m_i \xi_i = m \xi.$$

Cette équation devant être vérifiée quelle que soit l'origine choisie sur la ligne d'action de  $P$ , on en conclut que le produit ponctuel  $(P, P')$  s'obtient en composant

les produits partiels  $(P, P'_i)$  comme des masses ordinaires.

On démontrerait d'une manière analogue que, pour déterminer  $(P, P')$ , il suffit encore, après avoir remplacé  $P$  par un système équivalent quelconque  $S$  constitué par les vecteurs  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$ , de former tous les produits partiels  $(P_i, P')$ , puis de les composer comme des masses ordinaires. Par suite, il est bien évident qu'on arrive encore au même résultat lorsqu'après avoir remplacé simultanément  $P$  et  $P'$  par les systèmes  $S$  et  $S'$  on forme tous les produits partiels tels que  $(P_i, P'_k)$  et qu'on les compose comme des masses.

Il est facile, en tenant compte de ces résultats, de déterminer les coordonnées du produit ponctuel de deux vecteurs quelconques.

Désignons, en effet, par  $X, Y, Z$  et par  $X', Y', Z'$  les coordonnées ou composantes des vecteurs  $P$  et  $P'$  par rapport au triangle de référence précédemment choisi, et remarquons que  $X, Y, Z$  forment un système équivalent à  $P$ , tandis que  $X', Y', Z'$  forment un système équivalent à  $P'$ . De la sorte, on est conduit à former les produits de chacune des composantes de  $P$  avec chacune des composantes de  $P'$ .

Or, on a évidemment

$$(X, X') = (Y, Y') = (Z, Z') = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (Y, Z') &= Y Z' \sin A, \\ (Z, Y') &= -Z Y' \sin A. \end{aligned}$$

D'ailleurs, les masses qui représentent ces deux derniers produits sont concentrées toutes deux au sommet  $A$  du triangle de référence et peuvent être remplacées par une masse unique ayant

$$(Y Z' - Z Y') \sin A$$



pour intensité. Les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  de cette masse auront donc pour valeurs, en désignant par  $h$  la hauteur du triangle qui correspond au sommet A,

$$\begin{aligned}x_1 &= h \sin A (Y Z' - Z Y') \\y_1 &= 0, \\z_1 &= 0.\end{aligned}$$

Mais on reconnaît facilement que le produit  $h \sin A$  est précisément égal à la quantité  $H$  introduite précédemment (§ 5) et les formules précédentes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}x_1 &= H (Y Z' - Z Y'), \\y_1 &= 0, \\z_1 &= 0.\end{aligned}$$

Un calcul semblable au précédent montrerait que les produits  $(Z, X')$  et  $(X, Z')$  donnent lieu à une nouvelle masse ayant

$$\begin{aligned}x_2 &= 0, \\y_2 &= H (Z X' - X Z'), \\z_2 &= 0.\end{aligned}$$

pour coordonnées ; et qu'enfin  $(X, Y')$  et  $(X', Y)$  donnent une masse ayant pour coordonnées

$$\begin{aligned}x_3 &= 0, \\y_3 &= 0, \\z_3 &= H (X Y' - X' Y).\end{aligned}$$

En conséquence, les coordonnées du produit ponctuel  $(P, P')$  sont données par les formules suivantes

$$\begin{aligned}x &= H (Y Z' - Z Y'), \\y &= H (Z X' - X Z'), \\z &= H (X Y' - Y X'),\end{aligned}$$

qui doivent être considérées comme fondamentales.

Comme application de ces formules, cherchons la con-

dition de parallélisme de deux vecteurs et, par suite, de deux droites.

L'intensité du produit  $(P, P')$  est par définition

$$P P' \sin \alpha,$$

mais elle est aussi donnée par la formule

$$m = \frac{1}{H} (x \sin A + y \sin B + z \sin C).$$

On aura donc en égalant ces deux expressions, après avoir remplacé dans la seconde  $x, y, z$  par les valeurs obtenues

$$P P' \sin \alpha = \sin A (Y Z' - Z Y') + \sin B (Z X' - X Z') + \sin C (X Y' - Y X').$$

Par suite, la condition de parallélisme des vecteurs  $P$  et  $P'$  ou des droites correspondantes est exprimée par la relation

$$\sin A (Y Z' - Z Y') + \sin B (Z X' - X Z') + \sin C (X Y' - Y X') = 0$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{bmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{bmatrix} = 0$$

**12. Produit vectoriel de deux masses.** — Au produit ponctuel de deux vecteurs on peut faire correspondre dualistiquement une notion nouvelle que nous définirons de la manière suivante :

Considérons deux masses  $m$  et  $m'$  situées à une distance  $r$  l'une de l'autre. Nous appellerons produit vectoriel de  $m$  par  $m'$  et nous représenterons par le symbole

$$[m, m']$$

un vecteur  $P$  ayant la droite de jonction de  $m$  et de  $m'$

pour ligne d'action, et pour intensité le produit  
 $m m' r$ .

De plus, nous admettrons que ce vecteur a pour sens celui qui va de  $m$  vers  $m'$  lorsque le produit algébrique  $m m'$  est positif, tandis qu'il aura le sens de  $m'$  vers  $m$  dans le cas contraire.

Il résulte de cette définition que le produit vectoriel de  $m$  par  $m'$  est égal et directement opposé au produit de  $m'$  par  $m$ . En particulier, le produit vectoriel d'une masse par elle-même est donc nul :

$$[m, m] = 0.$$

Des considérations élémentaires montrent immédiatement que la projection du produit vectoriel de  $m$  par  $m'$  sur un axe quelconque  $\xi$  passant par  $m$  est égale, en valeur absolue, au produit de  $m$  par le moment statique de  $m'$  relativement à un axe perpendiculaire à  $\xi$ , mais passant encore par  $m$ . A l'aide de ce résultat et en procédant exactement comme dans le cas du produit ponctuel, on démontre bien simplement que si l'on désigne par  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  les coordonnées de  $m$  et de  $m'$  relativement au triangle A, B, C, les coordonnées X, Y, Z du produit ponctuel de ces masses sont données par les formules

$$X = \frac{1}{H} (y z' - z y'),$$

$$Y = \frac{1}{H} (z x' - x z'),$$

$$Z = \frac{1}{H} (x y' - y x'),$$

qui doivent aussi être considérées comme essentielles.

13. Lorsqu'on remplace dans les formules précédentes les coordonnées des masses  $m$  et  $m'$  par celles des masses cycliques, définies au paragraphe 9, on obtient, après des réductions évidentes,

$$X = 2i \frac{\sin A}{H}.$$

$$Y = 2i \frac{\sin B}{H},$$

$$Z = 2i \frac{\sin C}{H}.$$

Il résulte immédiatement de là que le produit vectoriel des masses cycliques se réduit à un couple dont le moment est égal à  $2i$ .

Ajoutons encore qu'on déduirait facilement, des mêmes formules, l'expression du carré de la distance qui sépare deux points définis par leurs coordonnées homogènes.

**14. Produit scalaire de deux vecteurs.** — Rappelons qu'on désigne sous le nom de produit scalaire ou de produit intérieur de deux vecteurs  $P$  et  $P'$  le nombre réel  $T$  défini par le produit de la longueur de  $P$ , par la longueur de  $P'$  et par le cosinus de l'angle  $\alpha$  des deux vecteurs :

$$T = P P' \cos \alpha.$$

On démontre alors immédiatement que le produit scalaire de  $P$  par  $P'$  est égal à la somme algébrique des produits scalaires de  $P$  par des vecteurs formant un système équivalent à  $P'$ . En raisonnant comme dans les deux cas précédents, on établit sans difficulté la formule suivante, dans laquelle  $X, Y, Z$  et  $X', Y', Z'$  représentent encore les coordonnées de  $P$  et de  $P'$ ,

$$\begin{aligned} T = & X (X' - Y' \cos C - Z' \cos B) \\ & + Y (Y' - Z' \cos A - X' \cos C) \\ & + Z (Z' - X' \cos B - Y' \cos A), \end{aligned}$$

ou aussi

$$\begin{aligned} T = & X' (X - Y \cos C - Z \cos B) \\ & + Y' (Y - Z \cos A - X \cos C) \\ & + Z' (Z - X \cos B - Y \cos A). \end{aligned}$$

Si d'ailleurs on pose, pour simplifier l'écriture,

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( X^2 + Y^2 + Z^2 - 2 YZ \cos A - 2 Z X \cos B - 2 X Y \cos C \right)$$

et

$$\Omega' = \frac{1}{2} \left( X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - 2 Y' Z' \cos A - 2 Z' X' \cos B - 2 X' Y' \cos C \right),$$

on vérifie facilement que l'on a encore

$$T = X \frac{\partial \Omega'}{\partial X'} + Y \frac{\partial \Omega'}{\partial Y'} + Z \frac{\partial \Omega'}{\partial Z'}.$$

et, aussi,

$$T = X' \frac{\partial \Omega}{\partial X} + Y' \frac{\partial \Omega}{\partial Y} + Z' \frac{\partial \Omega}{\partial Z}$$

Il résulte immédiatement de ces formules que la condition de perpendicularité de deux vecteurs, ou de deux droites définies par leurs coordonnées homogènes, peut être mise sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$X \frac{\partial \Omega'}{\partial X'} + Y \frac{\partial \Omega'}{\partial Y'} + Z \frac{\partial \Omega'}{\partial Z'} = 0,$$

et

$$X' \frac{\partial \Omega}{\partial X} + Y' \frac{\partial \Omega}{\partial Y} + Z' \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = 0.$$

D'autre part, si l'on désigne, comme nous l'avons déjà fait, par  $x', y', z'$  et  $x'', y'', z''$  les coordonnées des masses cycliques, la quantité  $\Omega$  qui représente la moitié du carré de l'intensité de P peut, d'après le paragraphe 9, être mise sous la forme

$$\Omega = \frac{1}{2} (X x' + Y y' + Z z') (X x'' + Y y'' + Z z'').$$

Remplaçant alors  $\Omega$  par cette valeur dans la dernière des expressions données pour T, on obtient, après des réductions évidentes.

$$2 T = (X x' + Y y' + Z z') (X' x'' + Y' y'' + Z' z'') \\ + (X x'' + Y y'' + Z z'') (X' x' + Y' y' + Z' z')$$

Cette formule, qui généralise celle du paragraphe 9,

s'interprète aisément, puisque les diverses parenthèses du second membre représentent les moments relatifs des vecteurs  $P$  et  $P'$  par rapport à chacune des masses cycliques.

15. **Coordonnées d'un déplacement.** — La théorie des coordonnées d'une masse trouve une application immédiate et essentielle pour la suite dans l'étude du déplacement infiniment petit d'une figure plane de forme invariable.

Considérons, en effet, une pareille figure et admettons qu'elle subisse, dans son plan, un déplacement arbitraire, mais infiniment petit. On sait qu'un tel déplacement peut toujours être obtenu en faisant tourner la figure d'un angle infiniment petit  $\omega$  autour d'un point que nous désignerons également par  $\omega$  et qu'on appelle le *centre de rotation*. De plus, il est naturel de faire correspondre à ce déplacement une masse fictive concentrée au centre de rotation, l'intensité de cette masse étant précisément égale à l'angle  $\omega$ , qui doit alors être regardé comme positif dans le cas où la rotation correspondante s'opère dans le sens positif, et comme négatif dans le cas contraire. Dans ces conditions, la projection du déplacement d'un point quelconque de la figure sur un axe passant par la position initiale de ce point est égale, en grandeur et signe, au moment statique de cette masse fictive relativement à l'axe considéré. Cette projection dépend donc uniquement de l'axe envisagé et non du point particulier de la figure qu'on a choisi sur cet axe ; pour cette raison, il est indifférent de l'appeler le déplacement du point ou de la figure suivant cet axe.

Ces principes rappelés, admettons que l'on ait choisi, dans le plan de la figure mobile, un triangle de référence qui, cela est bien entendu, ne participe pas aux déplacements que peut prendre cette figure.

La masse fictive qui correspond à l'un quelconque des déplacements de la figure, masse que nous désignerons sous le nom de rotation, peut alors être définie analytiquement à l'aide de ses coordonnées  $x, y, z$  relativement à ce triangle. Par suite, les quantités  $x, y, z$  peuvent être regardées comme les coordonnées du déplacement lui-même. Au reste, ces coordonnées ont une signification géométrique simple : l'une quelconque d'entre elles est égale, en effet, au déplacement que subit la figure suivant l'axe correspondant.

On sait, d'autre part, que les rotations se composent entre elles comme des masses ordinaires. Si donc la figure subit, successivement ou simultanément, des rotations en nombre quelconque, les coordonnées du déplacement résultant sont données par les formules

$$x = \sum_{1}^{n} x_i,$$

$$y = \sum_{1}^{n} y_i,$$

$$z = \sum_{1}^{n} z_i,$$

où l'on a désigné par  $x_i, y_i, z_i$  les coordonnées de l'une quelconque des rotations composantes.

---

## CHAPITRE II

**Coniques d'élasticité de deux sections d'une poutre à fibre moyenne plane.**

16. Considérons tout d'abord, et dans le seul but de fixer les idées, une poutre à fibre moyenne plane assujettie à des liaisons arbitraires, et désignons par  $S'$  et  $S''$  deux sections déterminées mais quelconques de cette poutre.

Une force arbitraire  $F$  étant appliquée en un point invariablement lié à la section  $S'$  par exemple, ce que nous exprimerons en disant que  $F$  agit dans cette section, proposons-nous en premier lieu d'étudier le déplacement subi par  $S''$ .

A cet effet, désignons par  $X, Y, Z$  les coordonnées de  $F$  relativement à un système de trois axes  $u, v, w$  formant un triangle de référence et, pour simplifier les notations qui vont être fixées, convenons de faire correspondre respectivement les indices 1, 2 et 3 à ces axes  $u, v, w$ . En vertu d'une hypothèse fondamentale de la résistance des matériaux, le déplacement subi par  $S''$  peut toujours être assimilé à une rotation  $\omega''$ , dont les coordonnées, relativement au triangle de référence seront désignées par  $x'', y''$  et  $z''$ . Si d'ailleurs on désigne d'une manière générale par  $a_{ik}''$  le déplacement que subit, suivant l'axe  $k$ , un point quelconque de cet axe lorsqu'il est supposé invariablement lié à la section  $S''$  et qu'une force unité agissant dans  $S'$  est appliquée dans la direction positive de l'axe  $i$ , le principe de la superposition des effets des forces montre immédiatement que l'on a



$$(1) \quad \begin{aligned} x'' &= a''_{11} X + a''_{21} Y + a''_{31} Z, \\ y'' &= a''_{12} X + a''_{22} Y + a''_{32} Z, \\ z'' &= a''_{13} X + a''_{23} Y + a''_{33} Z. \end{aligned}$$

Inversément, si l'on suppose ensuite la force  $F(X, Y, Z)$  appliquée dans  $S''$ , la section  $S'$  subit un nouveau déplacement assimilable encore à une rotation  $\omega'$ . Il est visible, de plus, qu'on aura, en désignant par  $x', y', z'$  les coordonnées de cette rotation,

$$(2) \quad \begin{aligned} x' &= a'_{11} X + a'_{21} Y + a'_{31} Z, \\ y' &= a'_{12} X + a'_{22} Y + a'_{32} Z, \\ z' &= a'_{13} X + a'_{23} Y + a'_{33} Z. \end{aligned}$$

Dans ces nouvelles formules, un coefficient tel que  $a'_{ik}$ , représente le déplacement que subit suivant l'axe  $i$  un point quelconque de cet axe lorsqu'on le suppose invariablement lié à  $S'$  et qu'une force unité, agissant dans  $S''$ , est appliquée suivant la direction positive de l'axe  $k$ .

Or, le théorème de Maxwell sur la réciprocité des déplacements montre immédiatement que l'on a, quels que soient les indices  $i$  et  $k$ ,

$$(3) \quad a'_{ik} = a''_{ki}.$$

Si donc on pose, en premier lieu,

$$(4) \quad \begin{aligned} a'_{ik} + a''_{ik} &= 2 A_{ik} \\ a'_{ik} - a''_{ik} &= 2 B_{ik} \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \quad \begin{aligned} a'_{ik} &= A_{ik} + B_{ik}, \\ a''_{ik} &= A_{ik} - B_{ik} \end{aligned}$$

on a

$$(6) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= A_{ki}, \\ B_{ik} &= -B_{ki}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne, en particulier,

$$B_{ii} = 0.$$

En posant encore

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= A_{11} X + A_{21} Y + A_{31} Z, \\ y &= A_{12} X + A_{22} Y + A_{32} Z, \\ z &= A_{13} X + A_{23} Y + A_{33} Z, \end{aligned}$$

et

$$(8) \quad \begin{aligned} \xi &= B_{11} X + B_{21} Y + B_{31} Z, \\ \eta &= B_{12} X + B_{22} Y + B_{32} Z, \\ \zeta &= B_{13} X + B_{23} Y + B_{33} Z, \end{aligned}$$

il résulte immédiatement des relations (5) que les formules (1) et (2), qui définissent les rotations  $\omega'$  et  $\omega''$  peuvent être mises respectivement sous les formes suivantes :

$$(9) \quad \begin{aligned} x' &= x + \xi, \\ y' &= y + \eta, \\ z' &= z + \zeta, \end{aligned}$$

et

$$(10) \quad \begin{aligned} x'' &= x - \xi, \\ y'' &= y - \eta, \\ z'' &= z - \zeta. \end{aligned}$$

Or, les quantités  $x, y, z$  peuvent être envisagées comme les coordonnées d'une nouvelle rotation  $\omega$  qui, en raison de propriétés que nous indiquerons plus loin, peut être qualifiée de *rotation principale*. On peut d'ailleurs remarquer immédiatement que cette rotation ne change pas lorsque, sans changer la force  $F$ , on intervertit les rôles des deux sections  $S'$  et  $S''$ . Dans cette hypothèse, en effet, les coefficients  $a'_{ik}$  et  $a''_{ik}$  sont permutés, mais cette permutation ne produit aucun effet sur les coefficients  $A_{ik}$  et, par suite, sur les quantités  $x, y, z$ .

D'autre part, les quantités  $\xi, \eta, \zeta$  peuvent également être envisagées comme les coordonnées d'une deuxième rotation  $\theta$  qui sera dite la *rotation auxiliaire*. Comme la permutation dont il vient d'être question transforme  $B_{ik}$  en  $-B_{ik}$ , on voit que les coordonnées de cette rotation ne font que changer de signe lorsque, sans changer  $F$ , on intervertit les rôles de  $S'$  et de  $S''$ . En d'autres termes, à la suite de cette inversion, le sens de la rotation auxiliaire est changé, mais elle s'effectue toujours autour

du même point et conserve la même valeur absolue.

En tenant compte des définitions qui précèdent, les formules (9) et (10) donnent alors lieu à des interprétations essentielles :

En premier lieu, il résulte des relations (9) que la rotation  $\omega'$  subie par  $S'$ , lorsque  $F$  agit dans  $S''$ , est la résultante de la rotation principale  $\omega$  et de la rotation auxiliaire qui correspondent à  $F$ . Au contraire, lorsque  $F$  agit dans  $S'$ , les formules (10) montrent que la rotation  $\omega''$  de  $S''$  s'obtient en composant la même rotation principale avec une nouvelle rotation auxiliaire qui ne diffère de la précédente que par le changement de son sens. En d'autres termes, on a symboliquement

$$\begin{aligned}(\omega') &= (\omega) + (\theta), \\(\omega'') &= (\omega) - (\theta).\end{aligned}$$

Dans ces conditions, le déplacement que subit l'une quelconque des sections  $S'$  ou  $S''$ , dans le cas où une force  $F$  est appliquée dans l'autre, dépend d'une manière très simple de la rotation principale et de la rotation auxiliaire qui correspondent à cette force. D'ailleurs, comme nous allons le montrer, la rotation principale dépend elle-même d'une conique dont le rôle est analogue à celui de l'ellipse d'élasticité, tandis que la rotation auxiliaire conduit précisément à l'élément nouveau auquel nous avons déjà fait allusion.

**17. Première conique d'élasticité d'un ensemble de deux sections.** — Pour obtenir cette conique, cherchons l'enveloppe des lignes d'action des forces qui passent par la rotation principale correspondante. Il suffit d'exprimer que le moment relatif de  $F$  et de  $\omega$  est égal à zéro :

$$X x + Y y + Z z = 0.$$

Or, si l'on remplace, dans cette relation,  $x, y, z$ , par les

valeurs données par les formules (7), on obtient, puisque  $A_{ik} = A_{ki}$ ,

$$(11) \quad A_{11} X^2 + A_{22} Y^2 + A_{33} Z^2 + 2 A_{12} X Y + 2 A_{23} Y Z + 2 A_{31} Z X = 0$$

Mais si l'on envisage les quantités  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  comme les coordonnées homogènes de la ligne d'action de  $F$ , cette équation représente une conique qui sera dite la *première conique d'élasticité* relative à l'ensemble des deux sections  $S'$  et  $S''$ .

D'autre part, les coordonnées du pôle de la ligne d'action de  $F$  relativement à cette conique sont respectivement proportionnelles aux quantités

$$\begin{aligned} & A_{11} X + A_{21} Y + A_{31} Z, \\ & A_{12} X + A_{22} Y + A_{32} Z, \\ & A_{13} X + A_{23} Y + A_{33} Z, \end{aligned}$$

c'est-à-dire aux coordonnées de  $\omega$ ; de sorte qu'on peut énoncer le théorème suivant :

*Le point autour duquel s'opère la rotation principale coïncide avec le pôle de la ligne d'action de la force relativement à la première conique d'élasticité.*

Pour déterminer ensuite l'intensité de la rotation principale, remplaçons, dans la formule du paragraphe 5, qui donne l'intensité d'une masse quelconque, les coordonnées de cette masse par celles de  $\omega$ . On obtient immédiatement

$$\omega = X x_o + Y y_o + Z z_o,$$

où l'on a posé, pour simplifier,

$$x_o = \frac{1}{H} \left( A_{11} \sin A + A_{12} \sin B + A_{13} \sin C \right),$$

$$y_o = \frac{1}{H} \left( A_{21} \sin A + A_{22} \sin B + A_{23} \sin C \right),$$

$$z_o = \frac{1}{H} \left( A_{31} \sin A + A_{32} \sin B + A_{33} \sin C \right).$$

Mais les quantités  $x_0, y_0, z_0$  peuvent être envisagées comme les coordonnées d'une masse ou d'une rotation, que nous désignerons par  $\omega_0$ , et qui est complètement indépendante de la force  $F$ . Dans ces conditions, la formule obtenue s'interprète immédiatement et conduit au théorème suivant :

*L'intensité de la rotation principale est égale au moment relatif de la force correspondante et de la rotation fixe  $\omega_0$ .*

D'autre part, il résulte des formules (7) que  $\omega_0$  est la rotation principale qui correspond à une force admettant pour coordonnées

$$X = \frac{\sin A}{H},$$

$$Y = \frac{\sin B}{H},$$

$$Z = \frac{\sin C}{H}.$$

Or, cette force se réduit à un couple de moment unité, de sorte que la rotation  $\omega_0$  s'opère autour du centre de la première conique d'élasticité.

**18. Vecteur auxiliaire d'un ensemble de deux sections.** — Si l'on tient compte de la relation (6),

$$B_{ik} = - B_{ki},$$

les formules (8) qui définissent la rotation auxiliaire  $\theta$  peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\xi = Y B_{21} - Z B_{13},$$

$$\eta = Z B_{32} - X B_{21},$$

$$\zeta = X B_{13} - Y B_{32}.$$

Si donc on pose

$$B_{32} = H P,$$

$$B_{13} = H Q,$$

$$B_{21} = H R,$$

on aura

$$(12) \quad \begin{aligned} \xi &= H (Y R - Z Q), \\ \eta &= H (Z P - X R), \\ \zeta &= H (X Q - Y P). \end{aligned}$$

Mais les quantités  $P, Q, R$  peuvent être envisagées comme les coordonnées d'un vecteur qui dépend essentiellement de l'ensemble des deux sections  $S'$  et  $S''$  et qui pour cette raison sera dit le *vecteur auxiliaire* relatif à ces sections. De plus, nous le désignerons toujours par la lettre  $G$ . La comparaison des formules obtenues avec celles du paragraphe 11, qui donnent les coordonnées du produit ponctuel de deux vecteurs, permet alors d'énoncer le théorème suivant, qui doit être considéré comme essentiel :

*La rotation auxiliaire qui correspond à une force quelconque  $F$  se confond avec le produit ponctuel de cette force par le vecteur auxiliaire  $G$ .*

En d'autres termes, et en tenant compte des notations fixées, on a, en grandeur et en position,

$$\theta = (F, G).$$

Il résulte en particulier de là que la rotation auxiliaire s'opère autour du point de rencontre de la ligne d'action de la force  $F$  et de la ligne d'action du vecteur  $G$ . Cette rotation est donc toujours située sur une droite fixe et ne peut, comme la rotation principale, prendre des positions quelconques dans le plan.

D'autre part, la rotation auxiliaire s'annule lorsque la ligne d'action de  $F$  se confond avec celle de  $G$ . Par suite, les deux rotations désignées par  $\omega'$  et par  $\omega''$  deviennent identiques et s'opèrent autour du pôle  $g$  de la ligne d'action de  $G$  par rapport à la première conique d'élasticité.

On peut encore remarquer que, lorsqu'on intervertit les rôles des deux sections  $S'$  et  $S''$ , les coordonnées du

vecteur  $G$  ne font que changer de signe. Si donc ces deux sections coïncident, ce vecteur s'évanouit de même que la rotation auxiliaire. La rotation principale subsiste seule et la première conique d'élasticité se confond avec la conjuguée de l'ellipse d'élasticité de la section considérée.

**19. Inversion des formules fondamentales.** — Les développements qui précèdent permettent de déterminer géométriquement la rotation subie par l'une quelconque des sections  $S'$  ou  $S''$  dans le cas où une force donnée est appliquée dans l'autre. Le problème inverse, qui a pour objet la recherche de la force qu'il est nécessaire d'appliquer à l'une de ces sections pour produire une rotation donnée de l'autre, est tout aussi important et conduit, comme nous le verrons, à des propriétés dualistiques intéressantes. Sa solution dépend des équations fondamentales (1) et (2) qu'il suffirait de résoudre par rapport aux quantités  $X, Y, Z$  en tenant compte des relations de réciprocité exprimées par les formules (3). Mais, auparavant, il est préférable de changer quelque peu les notations utilisées jusqu'ici.

Tout d'abord, une force quelconque sera désignée dorénavant par  $F'$  ou par  $F''$ , suivant qu'elle agira dans la section  $S'$  ou dans la section  $S''$ , les coordonnées de  $F'$  étant alors représentées par  $X', Y', Z'$  et celles de  $F''$  par  $X'', Y'', Z''$ . Quant à la rotation produite par l'une ou l'autre de ces forces, on la désignera indifféremment par  $\omega$ , ce qui ne peut donner lieu à aucune ambiguïté, car il reste entendu qu'à une force  $F'$  correspond une rotation de  $S''$  et à une force  $F''$  une rotation de  $S'$ ; enfin, les coordonnées de  $\omega$  seront désignées par  $x, y$  et  $z$ .

En tenant compte de ces modifications et des relations (3), les formules (1) et (2) peuvent alors être mises respectivement sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned}x &= a_{11}' X' + a_{12}' Y' + a_{13}' Z', \\y &= a_{21}' X' + a_{22}' Y' + a_{23}' Z', \\z &= a_{31}' X' + a_{32}' Y' + a_{33}' Z',\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x &= a_{11}'' X'' + a_{21}'' Y'' + a_{31}'' Z'', \\y &= a_{12}'' X'' + a_{22}'' Y'' + a_{32}'' Z'', \\z &= a_{13}'' X'' + a_{23}'' Y'' + a_{33}'' Z''.\end{aligned}$$

Or, les tableaux des coefficients de ces deux groupes de formules ne diffèrent l'un de l'autre que par le changement des lignes horizontales en colonnes et réciproquement. Si donc on résout le premier groupe par rapport à  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  et le second par rapport à  $X''$ ,  $Y''$ ,  $Z''$ , on obtient des solutions pour lesquelles le même fait se reproduit et qui sont nécessairement de la forme suivante :

$$(13) \quad \begin{aligned}X' &= b_{11} x + b_{21} y + b_{31} z, \\Y' &= b_{12} x + b_{22} y + b_{32} z, \\Z' &= b_{13} x + b_{23} y + b_{33} z,\end{aligned}$$

et

$$(14) \quad \begin{aligned}X'' &= b_{11} x + b_{12} y + b_{13} z, \\Y'' &= b_{21} x + b_{22} y + b_{23} z, \\Z'' &= b_{31} x + b_{32} y + b_{33} z.\end{aligned}$$

Si donc, par analogie avec les transformations opérées au paragraphe 16, on pose, en premier lieu,

$$(15) \quad \begin{aligned}b_{ik} + b_{ki} &= 2 \alpha_{ik}, \\b_{ik} - b_{ki} &= 2 \beta_{ik},\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}b_{ik} &= \alpha_{ik} + \beta_{ik}, \\b_{ki} &= \alpha_{ik} - \beta_{ik},\end{aligned}$$

on a nécessairement

$$(16) \quad \begin{aligned}\alpha_{ik} &= \alpha_{ki}, \\\beta_{ik} &= -\beta_{ki},\end{aligned}$$

ce qui entraîne, en particulier,



$$\beta_{ii} = 0.$$

En posant ensuite

$$(17) \quad \begin{aligned} X &= \alpha_{11} x + \alpha_{21} y + \alpha_{31} Z, \\ Y &= \alpha_{12} x + \alpha_{22} y + \alpha_{32} Z, \\ Z &= \alpha_{13} x + \alpha_{23} y + \alpha_{33} Z, \end{aligned}$$

et

$$(18) \quad \begin{aligned} X_1 &= \beta_{11} x + \beta_{21} y + \beta_{31} z, \\ Y_1 &= \beta_{12} x + \beta_{22} y + \beta_{32} z, \\ Z_1 &= \beta_{13} x + \beta_{23} y + \beta_{33} z, \end{aligned}$$

on voit immédiatement que les formules (13) et (14) peuvent être mises sous les formes suivantes :

$$(19) \quad \begin{aligned} X' &= X + X_1, \\ Y' &= Y + Y_1, \\ Z' &= Z + Z_1, \end{aligned}$$

et

$$(20) \quad \begin{aligned} X'' &= X - X_1, \\ Y'' &= Y - Y_1, \\ Z'' &= Z - Y_1. \end{aligned}$$

Or, les quantités  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  peuvent être envisagées comme les coordonnées d'une nouvelle force  $F$  qui, en raison des analogies qu'elle présente avec la rotation principale sera dite la *force principale*. Cette force ne change pas lorsque la rotation  $\omega$  reste la même et qu'on intervertit les rôles des sections  $S'$  et  $S''$  ; car, dans cette hypothèse, les coefficients  $\alpha_{ik}$  et  $\alpha_{ki}$  sont permutés, ce qui ne donne lieu à aucun changement, puisqu'ils sont égaux.

D'autre part, les quantités  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$  peuvent aussi être envisagées comme les coordonnées d'une deuxième force  $F_1$  qui sera dite la *force auxiliaire*. Comme la permutation dont on vient de parler transforme  $\beta_{ik}$  en  $-\beta_{ik}$ , les coordonnées de cette force changent de signe lorsque, sans changer  $\omega$ , on intervertit les rôles de  $S'$  et de  $S''$ .

En d'autres termes, cette inversion change le sens de la force auxiliaire sans changer ni l'intensité ni la ligne d'action de cette force.

En tenant compte de ces résultats, les formules (19) et (20) donnent alors lieu aux interprétations suivantes :

En premier lieu, les relations (19) montrent que la force  $F'$  qui doit être appliquée dans  $S'$  pour que  $S''$  subisse une rotation donnée  $\omega$  est la résultante de la force principale  $F$  et de la force auxiliaire qui correspondent à  $\omega$ . D'après les équations (20), en revanche, la force  $F''$  à appliquer dans  $S''$  pour que  $S'$  subisse la même rotation  $\omega$ , s'obtient en composant la même force principale  $F$  avec une force auxiliaire qui ne diffère de  $F_1$  que par le sens. En d'autres termes, on a symboliquement

$$\begin{aligned} (F') &= (F) + (F_1), \\ (F'') &= (F) - (F_1). \end{aligned}$$

**20. Deuxième conique d'élasticité d'un ensemble de deux sections.** — Pour obtenir cette deuxième conique, cherchons le lieu des centres de rotation  $\omega$  qui sont situés sur les forces principales correspondantes. En employant une méthode dualistique de celle qui a été suivie au paragraphe (17), on obtient immédiatement pour l'équation de ce lieu, en coordonnées ponctuelles,  $\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_{31}zx = 0$ .

Ce lieu est donc encore une conique, qui sera dite la *deuxième conique d'élasticité* relative à l'ensemble des deux sections  $S'$  et  $S''$ .

Les coordonnées de la polaire, par rapport à cette conique, du centre de rotation  $\omega$  étant alors proportionnelles aux quantités

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z, \\ \alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z, \\ \alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z, \end{aligned}$$

c'est-à-dire aux coordonnées de F, on peut énoncer le théorème suivant :

*La ligne d'action de la force principale coïncide avec la polaire de la rotation  $\omega$  par rapport à la deuxième conique d'élasticité.*

Si l'on désigne ensuite par  $x_0'$ ,  $y_0'$ ,  $z_0'$  les coordonnées de la rotation  $\omega_0'$  pour laquelle la force principale correspondante se réduit à un couple de moment-unité, on aura

$$\frac{\sin A}{H} = \alpha_{11} x_0' + \alpha_{21} y_0' + \alpha_{31} z_0',$$

$$\frac{\sin B}{H} = \alpha_{12} x_0' + \alpha_{22} y_0' + \alpha_{32} z_0',$$

$$\frac{\sin C}{H} = \alpha_{13} x_0' + \alpha_{23} y_0' + \alpha_{33} z_0'.$$

Mais on déduit bien facilement de là, en tenant compte des formules (17) et du fait que  $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$

$$\frac{1}{H} (x \sin A + y \sin B + z \sin C) = X x_0' + Y y_0' + Z z_0'.$$

Par suite, le moment relatif de la force principale et de la rotation  $\omega_0'$  est précisément égal à l'intensité de la rotation correspondante. Comme la ligne d'action de la force principale qui correspond à une rotation donnée est connue, en vertu du théorème énoncé plus haut, la propriété qu'on vient d'obtenir permet alors de déterminer l'intensité et le sens de cette force principale. Il est évident, d'ailleurs, que le point autour duquel s'opère la rotation  $\omega_0'$  coïncide avec le centre de la deuxième conique d'élasticité.

## 21. Masse auxiliaire d'un ensemble de deux sections. —

Si l'on tient compte de la relation

$$\beta_{ik} = -\beta_{ki},$$

les formules (18) qui définissent la force auxiliaire prennent la forme

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_{21} y - \beta_{13} z, \\ Y_1 &= \beta_{32} z - \beta_{21} x, \\ Z_1 &= \beta_{13} x - \beta_{31} y. \end{aligned}$$

Mais, en posant

$$\beta_{32} = \frac{p}{H},$$

$$\beta_{13} = \frac{q}{H},$$

$$\beta_{21} = \frac{r}{H},$$

elles deviennent

$$X_1 = \frac{1}{H} (y r - z q),$$

$$Y_1 = \frac{1}{H} (z p - x r),$$

$$Z_1 = \frac{1}{H} (x q - y p).$$

Or, les quantités  $p$ ,  $q$  et  $r$  peuvent être envisagées comme les coordonnées d'une masse fixe qui sera dite la *masse auxiliaire relative* à l'ensemble des deux sections  $S'$  et  $S''$ . Dans ces conditions, les formules obtenues permettent d'énoncer le théorème suivant, qui est évidemment le corrélatif de celui du paragraphe 18 :

*La force auxiliaire qui correspond à une rotation quelconque se confond avec le produit vectoriel de cette rotation par la masse auxiliaire.*

Il résulte en particulier de là que la force auxiliaire passe par un point fixe, qui est le point de concentration de la masse auxiliaire et par le point autour duquel s'opère la rotation donnée. Enfin, il résulte encore des propriétés du produit vectoriel que, lorsque la rotation s'opère autour du point de concentration de la masse auxiliaire, la force auxiliaire s'annule.

On doit encore remarquer que dans le cas où l'on

intervertit les rôles des deux sections  $S'$  et  $S''$ , les coordonnées de la masse auxiliaire ne font que changer de signes. Si donc ces deux sections coïncident, cette masse s'évanouit, de même que la force auxiliaire. La force principale subsiste donc seule et la deuxième conique d'élasticité se confond, comme la première, avec la conjuguée de l'ellipse d'élasticité de la section considérée. En d'autres termes, dans ce cas particulier, les deux coniques d'élasticité se confondent.

**22. Forme canonique des équations fondamentales.** — Pour mettre en évidence les relations de position qui existent entre les deux coniques d'élasticité, ainsi qu'entre le vecteur et la masse auxiliaires, il est utile de réduire les équations fondamentales à la forme la plus simple possible. On y parvient en choisissant les axes qui définissent le triangle de référence de manière que  $u$  se confonde avec la ligne d'action du vecteur  $G$ , tandis que  $v$  et  $w$  coïncident avec les tangentes de la première conique d'élasticité qui passent par les points réels ou imaginaires où elle est coupée par l'axe  $u$ . Dans ces conditions, le sommet du triangle de référence, qui est opposé à cet axe, se confond avec le point désigné précédemment par  $g$ , et l'équation de la première conique d'élasticité prend la forme plus simple

$$A_{11} X^2 + 2 A_{23} Y Z = 0$$

On a donc nécessairement, pour ces nouveaux axes.

$$A_{22} = A_{33} = A_{12} = A_{31} = 0,$$

de sorte que les formules (7) deviennent

$$\begin{aligned} x &= A_{11} X, \\ y &= A_{23} Z, \\ z &= A_{23} Y. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $G$  coïncide avec  $u$ , on a nécessairement

$$Q = R = 0,$$

d'où

$$B_{13} = B_{21} = 0,$$

et les formules (8) deviennent

$$\begin{aligned}\xi &= 0 \\ \eta &= Z B_{32}, \\ \zeta &= - Y B_{32}.\end{aligned}$$

Mais alors il résulte immédiatement de là et des formules (9) et (10), qui sont équivalentes aux formules fondamentales (1) et (2), que ces dernières se simplifient et prennent respectivement les formes suivantes :

$$\begin{aligned}x'' &= A_{11} X, \\ y'' &= (A_{23} - B_{32}) Z, \\ z'' &= (A_{23} + B_{32}) Y,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x' &= A_{11} X, \\ y' &= (A_{23} + B_{32}) Z, \\ z' &= (A_{23} - B_{32}) Y.\end{aligned}$$

En résolvant ces deux groupes d'équations par rapport à X, Y, Z, on obtient, en tenant compte du changement de notations indiqué au paragraphe 19,

$$\begin{aligned}X' &= \frac{1}{A_{11}} x, \\ Y' &= \frac{1}{A_{23} + B_{32}} z, \\ Z' &= \frac{1}{A_{23} - B_{32}} y,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}X'' &= \frac{1}{A_{11}} x, \\ Y'' &= \frac{1}{A_{23} - B_{32}} z, \\ Z'' &= \frac{1}{A_{23} + B_{32}} y.\end{aligned}$$

On déduit alors facilement de là que, dans le nouveau système d'axes, les formules (17) et (18) qui définissent la force principale et la force auxiliaire prennent respectivement les formes suivantes :

$$X = \frac{1}{A_{11}} x,$$

$$Y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_{23} + B_{32}} + \frac{1}{A_{23} - B_{32}} \right) z,$$

$$Z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_{23} + B_{32}} + \frac{1}{A_{23} - B_{32}} \right) y,$$

et

$$X_1 = 0$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_{23} + B_{32}} - \frac{1}{A_{23} - B_{32}} \right) z$$

$$Z_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_{23} + B_{32}} - \frac{1}{A_{23} - B_{32}} \right) y.$$

Il résulte en premier lieu de ces formules que l'équation de la deuxième conique d'élasticité se réduit à

$$\frac{x^2}{A_{11}} + \left( \frac{1}{A_{23} + B_{32}} + \frac{1}{A_{23} - B_{32}} \right) y z = 0,$$

de sorte que, comme la première, elle est tangente aux axes  $v$  et  $w$ , aux points où ils sont rencontrés par  $u$ .

D'autre part, les coordonnées de la masse auxiliaire ont pour valeurs

$$p = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{A_{23} + B_{32}} - \frac{1}{A_{23} - B_{32}} \right), \quad q = 0, \quad r = 0,$$

et cette masse est concentrée au point  $g$ . En conséquence :

*Les pôles de la ligne d'action du vecteur auxiliaire par rapport aux deux coniques d'élasticité se confondent avec le point de concentration de la masse auxiliaire.*

Il convient d'ajouter que, comme cela résultera de la suite, les deux coniques d'élasticité sont imaginaires. Ce fait n'amène aucun inconvénient dans les applications, puisqu'on pourra toujours introduire les coniques con-

juguées qui deviennent réelles, à condition de remplacer les notions de pôles et de polaires par celles d'antipôles et d'antipolaires.

Enfin, il est encore nécessaire d'ajouter que tous les résultats obtenus s'appliquent sans modifications à la plupart des systèmes articulés plans qu'on rencontre dans la pratique de l'art de l'ingénieur. Si l'on envisage, par exemple, le cas d'un arc triangulé relié à un tablier supérieur par l'intermédiaire de palées également triangulées, il est clair que l'attache de l'une des palées et du tablier ne peut plus être assimilée à un nœud ordinaire. Ses dimensions sont en général finies et il est bien plus exact de la considérer comme une pièce rigide sur laquelle viennent s'articuler quelques-unes des barres du système. Une telle pièce peut jouer le rôle de l'une des sections  $S'$  ou  $S''$ , et l'on est conduit de la sorte à envisager des systèmes constitués par un certain nombre de pièces infiniment rigides et de forme arbitraire sur lesquelles viennent s'attacher, par l'intermédiaire d'articulations, les barres proprement dites. Dans la suite de pareils systèmes seront désignés sous le nom de *systèmes articulés complexes*, les pièces rigides étant encore qualifiées de nœuds. On peut d'ailleurs remarquer que, dans le cas où les centres des articulations qui se trouvent sur un même nœud coïncident et que cette condition est remplie pour tous les nœuds du système, celui-ci se réduit à un système articulé ordinaire.

D'autre part, le principe des travaux virtuels et toutes les conséquences qui en découlent sont applicables aux systèmes complexes. Pour qu'ils soient statiquement déterminés, il faut donc et il suffit qu'ils soient librement dilatables au sens défini par Maurice Lévy. Cela exige, en particulier, que l'on ait

$$m + a = 3n,$$

$m$  désignant le nombre des barres,  $a$  celui des liaisons



simples et  $n$  celui des nœuds. Il est remarquable, de plus, que le calcul des tensions puisse s'effectuer dans ce cas par les procédés qu'on doit appliquer aux systèmes ordinaires à trois dimensions, après qu'on les a représentés dualistiquement sur le plan de l'épure et qu'ils ont été réduits à leur figure fondamentale <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Voir : B. Mayor, *Statique graphique des systèmes de l'espace*, Chapitre VI.

## CHAPITRE III.

**Masses et vecteurs adjoints dans les systèmes articulés complexes.**

23. La première conique d'élasticité et le vecteur auxiliaire définis au chapitre précédent ont d'étroites relations avec un élément qui doit être envisagé comme une extension de celui qu'on désigne fréquemment sous le nom de poids élastique, mais qu'il nous a paru préférable pour des raisons que la suite fera clairement comprendre, d'appeler masse adjointe. A côté de cet élément, on peut encore en introduire un deuxième qui n'a pas encore été signalé, quoiqu'il se trouve relié au premier par le principe de dualité et que son rôle soit tout aussi important. Ces éléments interviennent dans la théorie des poutres à fibre moyenne plane comme dans celle des systèmes articulés complexes ; mais pour les définir nous envisagerons tout d'abord ce dernier cas, qui ne demande que des calculs élémentaires.

Convenons alors de désigner par  $S'$  et  $S''$  deux nœuds quelconques d'un système articulé complexe et remarquons que la rotation subie par l'un quelconque de ces nœuds, lorsqu'une force  $F (X, Y, Z)$  est appliquée dans l'autre, est encore donnée par les formules (1) ou (2) du chapitre précédent, suivant que la force est appliquée à  $S'$  ou à  $S''$ . Or, les coefficients  $a'_{ik}$  et  $a''_{ik}$  qui figurent dans ces formules et représentent les déplacements produits par des forces-unités agissant suivant les axes  $u, v, w$  du triangle de référence peuvent être mis sous des formes très simples.

Admettons, en effet, que l'on ait attribué à toutes les

barres du système des numéros d'ordre, les divers éléments qui peuvent dépendre d'une même barre étant alors caractérisés par un indice égal à son numéro d'ordre. C'est ainsi que nous désignerons par  $l_i$ ,  $\Omega_i$ ,  $E_i$  la longueur, la section et le module d'élasticité de la barre dont le numéro d'ordre est précisément égal à  $i$ . Nous poserons, en outre, pour simplifier l'écriture

$$(1) \quad \mu_i^2 = \frac{l_i}{E_i \Omega_i}$$

Désignons ensuite par  $U_i'$ ,  $V_i'$ ,  $W_i'$  les tensions produites dans cette même barre par des forces appliquées au nœud  $S'$  et admettant respectivement pour coordonnées

$$\begin{aligned} X = 1, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ X = 0, \quad Y = 1, \quad Z = 0, \\ X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 1. \end{aligned}$$

Enfin, représentons par  $U_i''$ ,  $V_i''$ ,  $W_i''$  les tensions produites par ces mêmes forces lorsqu'on les suppose appliquées au nœud  $S''$ .

Il résulte immédiatement d'une formule classique de la théorie des déformations que les divers déplacements  $a'_{ik}$  et  $a''_{ik}$  ont les valeurs suivantes :

$$(2) \quad \begin{aligned} a'_{11} &= a''_{11} = \sum \mu_i^2 U_i' U_i'', \\ a'_{22} &= a''_{22} = \sum \mu_i^2 V_i' V_i'', \\ a'_{33} &= a''_{33} = \sum \mu_i^2 W_i' W_i'', \\ a'_{12} &= a''_{21} = \sum \mu_i^2 V_i' U_i'', \\ a'_{23} &= a''_{32} = \sum \mu_i^2 W_i' V_i'', \\ a'_{31} &= a''_{13} = \sum \mu_i^2 U_i' W_i'', \\ a'_{21} &= a''_{12} = \sum \mu_i^2 V_i'' U_i', \\ a'_{32} &= a''_{23} = \sum \mu_i^2 W_i'' V_i', \\ a'_{13} &= a''_{31} = \sum \mu_i^2 U_i'' W_i', \end{aligned}$$

le signe  $\Sigma$  représentant une somme qui doit être étendue à toutes les barres du système.

Si l'on pose enfin :

$$(3) \quad \begin{aligned} a_i' &= \mu_i U_i', & b_i' &= \mu_i V_i', & c_i &= \mu_i' W_i', \\ a_i'' &= \mu_i U_i'', & b_i'' &= \mu_i V_i'', & c_i &= \mu_i'' W_i'', \end{aligned}$$

et si l'on remplace les coefficients par les valeurs obtenues, les formules (1) et (2) du chapitre II prennent, après des transformations évidentes, les formes suivantes :

$$(4) \quad \begin{aligned} x' &= \Sigma a_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i''), \\ y' &= \Sigma b_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i''), \\ z' &= \Sigma c_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i''), \end{aligned}$$

et

$$(5) \quad \begin{aligned} x'' &= \Sigma a_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'), \\ y'' &= \Sigma b_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'), \\ z'' &= \Sigma c_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'), \end{aligned}$$

qui vont donner lieu à des interprétations essentielles.

**24. Définition des masses adjointes.** — Les quantités  $a_i'$ ,  $b_i'$ ,  $c_i'$  peuvent être envisagées comme les coordonnées d'une masse  $m_i'$  qui dépend essentiellement de la barre  $l_i$  et du nœud  $S'$  et qui, pour cette raison, sera désignée sous le nom de *masse adjointe* de la barre  $l_i$  par rapport au nœud  $S'$ . De même, les quantités  $a_i''$ ,  $b_i''$ ,  $c_i''$  seront aussi regardées comme les coordonnées d'une masse  $m_i''$  qui sera dite la *masse adjointe* de  $l_i$  par rapport au nœud  $S''$ . Comme les formules (4) ou (5) sont applicables à tous les nœuds du système, à chaque barre correspondent ainsi autant de masses qu'il y a de nœuds, et, réciproquement, à chaque nœud correspondent autant de masses qu'il y a de barres. Si d'ailleurs on est parvenu, par un procédé quelconque, à déterminer toutes ces masses, le calcul du système ne présente plus aucune difficulté et l'on peut déterminer, à l'aide de procédés très simples, non seulement la déformation qu'il subit sous l'action de forces

quelconques, mais encore les tensions engendrées dans toutes les barres.

Il résulte, en effet, du principe de la superposition des effets des forces que l'on peut se borner à envisager le cas où le système est sollicité par une force unique  $F$  ( $X, Y, Z$ ), appliquée, par exemple, au nœud  $S''$ . La rotation  $\omega'$  subie par un nœud quelconque  $S'$  est alors donnée par les formules (4) : mais les quantités

$$\begin{aligned}x_i' &= a_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') \\y_i' &= b_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') \\z_i' &= c_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'')\end{aligned}$$

peuvent être envisagées comme les coordonnées d'une rotation partielle  $\omega_i'$ , qui s'opère évidemment autour du point de concentration de la masse  $m_i'$  et dont l'intensité est égale au produit de  $m_i'$  par le moment relatif de  $F$  et de  $m_i''$ . Cette rotation partielle peut donc être obtenue très simplement lorsqu'on connaît les masses  $m_i'$  et  $m_i''$  et, comme elle dépend essentiellement de la barre  $l_i$ , on peut l'appeler la rotation partielle due à cette barre. Dans ces conditions, la forme même des formules (4) permet d'énoncer le théorème suivant :

*La rotation subie par le nœud  $S'$  s'obtient en composant les rotations partielles, dues aux différentes barres du système, comme des masses ordinaires.*

En d'autres termes, on a symboliquement

$$\omega' = \Sigma \omega_i' = \Sigma m_i' (F, m_i'')$$

Il convient de noter ici que la détermination de la rotation  $\omega'$ , par le procédé qui découle de ces propriétés, généralise la construction classique du *centre du second degré* de Culmann et la comprend comme cas particulier <sup>1</sup>. Si l'on suppose, en effet, que le nœud  $S''$  se confonde avec  $S'$ , on voit immédiatement que le point autour duquel

<sup>1</sup> Voir en particulier l'Édition française de l'Encyclopédie des sciences mathématiques, tome VI, volume 2, fascicule 1, page 163.

s'opère la rotation  $\omega'$  se confond avec le centre du second degré, par rapport à la ligne d'action de  $F$ , d'un système de masses concentrées aux mêmes points que les masses  $m_i'$  et dont les intensités sont respectivement égales à  $m_i'^2$ .

Cette remarque faite reprenons l'étude du cas général où les nœuds  $S'$  et  $S''$  sont quelconques et remarquons qu'en vertu du principe de la superposition des effets des forces et de la définition des quantités  $U_i''$ ,  $V_i''$ ,  $W_i''$ , la tension produite dans  $l_i$  par la force  $F$  appliquée à  $S''$  est donnée par l'expression

$$T_i = X U_i'' + Y V_i'' + Z W_i''$$

ou, en tenant compte des formules (3),

$$(6) \quad T_i = \frac{1}{\mu_i} (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') = \frac{1}{\mu_i} (F \cdot m_i'')$$

En conséquence : *La tension produite dans une barre quelconque par une force appliquée en un nœud déterminé est proportionnelle au moment relatif de cette force et de la masse adjointe qui correspond à cette barre et à ce nœud.* Si donc, en particulier, la force  $F$  passe par le point de concentration de la masse, la tension s'annule dans la barre correspondante.

Dans le cas des systèmes librement dilatables, cette dernière propriété conduit à une conséquence essentielle.

Admettons, en effet, que la force  $F$  soit appliquée au nœud  $S''$  d'un système librement dilatable et qu'elle passe par le point  $m_i''$ , de manière que la tension s'annule dans  $l_i$ . Appliquons alors le principe des travaux virtuels en choisissant la déformation virtuelle du système, de manière que la barre  $l_i$  s'allonge d'une quantité infiniment petite, les autres barres du système conservant des longueurs invariables. La somme des travaux des forces intérieures s'annule, puisqu'elle se réduit au travail de la tension produite dans  $l_i$ . Il en est donc de même du travail de la force extérieure  $F$ , ce qui exige que la rotation virtuelle

de  $S''$  s'opère autour d'un point de cette force. Et comme ce résultat subsiste quelle que soit la force  $F$ , pourvu qu'elle passe par  $m_i''$ , on en doit conclure que cette rotation s'opère autour de  $m_i''$ . Dans ces conditions, on peut énoncer la proposition suivante, qui réduit la recherche des masses adjointes à de pures considérations cinématiques :

*Lorsqu'une seule barre d'un système librement dilatable s'allonge infiniment peu, les nœuds de ce système pivotent autour des points de concentration des masses adjointes correspondantes.*

En partant des équations (4), on pourrait encore montrer très simplement que de plus, les rotations subies par les nœuds sont proportionnelles aux masses adjointes correspondantes.

**25. Masse polaire d'un vecteur ou d'une force.** — Pour mettre en évidence les relations qui existent entre les masses adjointes et la première conique d'élasticité d'un ensemble de deux nœuds, il est nécessaire d'élargir, dans un sens auquel il a été déjà fait allusion au paragraphe précédent, la théorie du système antipolaire d'un ensemble de masses. Cette extension entraîne quelques modifications dans la terminologie adoptée jusqu'ici, modifications que la suite justifiera complètement.

Considérons simultanément deux systèmes  $M'$  et  $M''$  constitués chacun par un même nombre de masses ponctuelles entre lesquelles se trouve établie une dépendance telle qu'à chaque masse du premier système en correspond une et une seule du second et réciproquement. On peut remarquer tout de suite que les systèmes constitués par les masses adjointes qui correspondent à deux nœuds quelconques  $S'$  et  $S''$  satisfont précisément à ces conditions. Le nombre des masses de chaque système est égal, en effet, à celui des barres ; de plus, deux masses telles que  $m_i'$  et  $m_i''$  sont relatives à la même barre  $l_i$  et

doivent être considérées comme se correspondant l'une à l'autre. Nous supposons donc, ce qui ne diminuera en rien la généralité des définitions qui suivent, que le système  $M'$  est formé par l'ensemble des masses  $m_i'$  relatives au nœud  $S'$ , et le système  $M''$  par l'ensemble des masses  $m_i''$  relatives à  $S''$ . De plus, nous conviendrons de dire, pour rappeler les liaisons établies entre ces masses, que les systèmes  $M'$  et  $M''$  sont *associés*.

Soit alors  $P (X, Y, Z)$  un vecteur quelconque. Transformons les masses du système  $M'$  en remplaçant chaque masse telle que  $m_i'$  par une masse nouvelle concentrée au même point et dont l'intensité soit égale à la moitié du produit de  $m_i'$  par le moment relatif de  $P$  et de  $m_i''$ . De même, transformons les masses de  $M''$  en remplaçant chaque masse telle que  $m_i''$  par une masse nouvelle concentrée au même point et dont l'intensité soit égale à la moitié du produit de  $m_i''$  par le moment relatif de  $P$  et de  $m_i'$ . Si l'on compose enfin toutes ces masses nouvelles d'après les règles ordinaires, on obtient une masse ponctuelle résultante qui sera dite *la masse polaire de  $P$  par rapport aux systèmes associés  $M'$  et  $M''$* .

Il résulte de cette définition même, et des notations adoptées, que les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  de cette masse polaire  $m$  sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \sum a_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') + \frac{1}{2} \sum a_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'), \\ (7) \quad y &= \frac{1}{2} \sum b_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') + \frac{1}{2} \sum b_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'), \\ z &= \frac{1}{2} \sum c_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') + \frac{1}{2} \sum c_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'), \end{aligned}$$

Or, si l'on envisage la conique représentée, en coordonnées tangentielles, par l'équation

$$(8) \quad \sum (a_i' X + b_i' Y + c_i' Z) (a_i'' X + b_i'' Y + c_i'' Z) = 0$$

ces formules montrent que la masse polaire  $m$  est concen-



trée au pôle de la ligne d'action du vecteur P par rapport à cette conique, ce qui justifie la terminologie introduite. Cette conique sera dite la *conique directrice* de l'ensemble des systèmes M' et M''.

Si l'on désigne ensuite par  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées de la masse polaire  $m_0$  qui correspond à un couple de moment-unité, on obtient, après des réductions évidentes,

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{2} \sum a_i' m_i'' + \frac{1}{2} \sum a_i'' m_i', \\y_0 &= \frac{1}{2} \sum b_i' m_i'' + \frac{1}{2} \sum b_i'' m_i', \\z_0 &= \frac{1}{2} \sum c_i' m_i'' + \frac{1}{2} \sum c_i'' m_i'.\end{aligned}$$

D'autre part, l'intensité de la masse polaire  $m$  du vecteur P a pour expression

$$m = \frac{1}{2} \sum m_i' (X a_i'' + Y b_i'' + Z c_i'') + \frac{1}{2} \sum m_i'' (X a_i' + Y b_i' + Z c_i'),$$

ou, en tenant compte des formules précédentes,

$$m = Xx_0 + Yy_0 + Zz_0$$

En d'autres termes : *l'intensité de la masse polaire d'un vecteur est égale au moment relatif de ce vecteur et de la masse polaire qui correspond à un couple de moment unité.*

D'autre part, la théorie des moments quadratiques peut être immédiatement étendue aux systèmes associés.

Soit, en effet,  $P_1 (X_1 Y_1 Z_1)$  un deuxième vecteur arbitraire. Si l'on calcule à l'aide des formules (7) le moment relatif de  $m$  et de  $P_1$ , on obtient

$$\begin{aligned}(P_1, m) &= \frac{1}{2} \sum (a_i' X_1 + b_i' Y_1 + c_i' Z_1) (a_i'' X + b_i'' Y + c_i'' Z) + \\&+ \frac{1}{2} \sum (a_i'' X_1 + b_i'' Y_1 + c_i'' Z_1) (a_i' X + b_i' Y + c_i' Z).\end{aligned}$$

Cette expression est symétrique par rapport aux vecteurs P et  $P_1$ ; elle doit être envisagée comme générali-

sant la notion de moment centrifuge d'un système de masses et nous la désignerons simplement sous le nom de *moment quadratique* des systèmes associés par rapport aux deux vecteurs  $P$  et  $P_1$ . Dans le cas particulier où  $P_1$  se confond avec  $P$ , ce moment quadratique se réduit à  $(P, m) = \Sigma (a_i' X + b_i' Y + c_i' Z) (a_i'' X + b_i'' Y + c_i'' Z)$  et généralise la notion de moment d'inertie.

Les théorèmes généraux de la théorie des moments d'inertie s'étendent immédiatement aux cas des systèmes associés. En particulier, il résulte de la définition même qu'on vient de donner que le *moment quadratique s'anule lorsque les lignes d'action des deux vecteurs sont conjuguées par rapport à la conique directrice*. De là découlent toute une série de corollaires identiques à ceux que l'on rencontre dans la théorie ordinaire et qu'il est inutile d'énoncer.

Sans insister longuement sur cette extension, il convient toutefois de signaler une propriété que possèdent les masses cycliques et qui se rattache directement à ce qui précède. Ces masses peuvent être regardées comme formant deux systèmes associés et, si l'on calcule leur moment quadratique par rapport à deux vecteurs quelconques, on est conduit, en tenant compte des résultats obtenus au paragraphe 15, au théorème suivant ;

*Le moment quadratique des masses cycliques par rapport à deux vecteurs quelconques est égal au produit scalaire de ces deux vecteurs.*

Un dernier cas particulier à noter est celui où toute masse  $m_1''$  de  $M'$  est concentrée au même point que sa correspondante  $m_1'$  de  $M''$ . On retrouve alors les résultats de la théorie relative à un système unique, à condition d'attribuer à la masse de ce système unique qui correspond à deux masses primitivement associées telles que  $m_1'$  et  $m_1''$ , une intensité égale au produit  $m_1' m_1''$ .

**26. Relations entre la rotation principale, la rotation auxiliaire et les masses adjointes.** Il est maintenant bien facile de déterminer la rotation principale  $\omega$  qui correspond à un ensemble de deux nœuds  $S'$  et  $S''$ . En désignant comme nous l'avons déjà fait par  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées de cette rotation, on a, en vertu des formules (9) et (10) du paragraphe 16

$$x = \frac{1}{2} (x' + x''),$$

$$y = \frac{1}{2} (y' + y''),$$

$$z = \frac{1}{2} (z' + z'').$$

Or si l'on remplace les quantités  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  par les valeurs obtenues au paragraphe 23 et qui sont données par les formules (4) et (5), on retrouve exactement les formules (7) qui définissent la masse polaire d'un vecteur ou d'une force. Dans ces conditions, on peut énoncer le théorème suivant :

*La rotation principale relative à un système de deux nœuds se confond avec la masse polaire de la force correspondante par rapport aux systèmes associés formés par les masses adjointes de ces nœuds.*

De ce théorème et du fait que la rotation principale s'opère autour du pôle de la force par rapport à la première conique d'élastique, résulte encore la propriété suivante :

*La première conique d'élasticité relative à un ensemble de deux nœuds se confond avec la conique directrice des systèmes associés constitués par les masses adjointes de ces nœuds.*

D'autre part, il résulte encore des formules (9) et (10) qu'on vient de rappeler que les coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  de la rotation auxiliaire  $\theta$ , ont pour expressions

$$\xi = \frac{1}{2} (x' - x''),$$

$$\eta = \frac{1}{2} (y' - y''),$$

$$\zeta = \frac{1}{2} (z' - z'').$$

En remplaçant encore les quantités  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et  $x''$ ,  $y''$ ,  $z''$  par leurs valeurs, on obtient, après des simplifications évidentes

$$2 \xi = Y \Sigma (a_i' b_i'' - a_i'' b_i') - Z \Sigma (c_i' a_i'' - c_i'' a_i'),$$

$$2 \eta = Z \Sigma (b_i' c_i'' - b_i'' c_i') - X \Sigma (a_i' b_i'' - a_i'' b_i'),$$

$$2 \zeta = X \Sigma (c_i' a_i'' - c_i'' a_i') - Y \Sigma (b_i' c_i'' - b_i'' c_i').$$

Mais en désignant par  $2 P_i$ ,  $2 Q_i$ ,  $2 R_i$  les coordonnées du produit vectoriel de la masse  $m_i'$  par la masse  $m_i''$ , on a (§ 12)

$$2 P_i = \frac{1}{H} (b_i' c_i'' - b_i'' c_i'),$$

$$2 Q_i = \frac{1}{H} (c_i' a_i'' - c_i'' a_i'),$$

$$2 R_i = \frac{1}{H} (a_i' b_i'' - a_i'' b_i')$$

et les formules précédentes peuvent s'écrire

$$\xi = H (Y \Sigma R_i - Z \Sigma Q_i),$$

$$\eta = H (Z \Sigma P_i - X \Sigma R_i),$$

$$\zeta = H (X \Sigma Q_i - Y \Sigma P_i).$$

En posant encore

$$P = \Sigma P_i, \quad Q = \Sigma Q_i, \quad R = \Sigma R_i,$$

on aura finalement

$$\xi = H (Y R - Z Q),$$

$$\eta = H (Z P - X R),$$

$$\zeta = H (X Q - Y P).$$

Mais ce résultat indique que la rotation auxiliaire se confond avec le *produit ponctuel* de la force  $F$  par le vecteur résultant admettant  $P, Q, R$ , comme coordonnées. Ce vecteur résultant par suite, se confond avec le vecteur auxillaire  $G$  relatif à l'ensemble des deux nœuds  $S'$  et  $S''$ . On peut donc énoncer la règle suivante :

*Pour obtenir le vecteur auxiliaire relatif à deux nœuds  $S'$  et  $S''$ , il suffit de former les produits vectoriels de chaque masse adjointe à  $S'$  par la masse correspondante de  $S''$ , puis de déterminer le vecteur résultant de tous ces produits. Ce vecteur résultant est alors égal au double du vecteur auxiliaire  $G$ .*

(A suivre.)

---



