Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 51 (1916-1917)
Heft: 191

Artikel: Transformation d'une série double
Autor: Paschoud, Maurice
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-269910

Transformation d'une série double

PAR

MAURICE PASCHOUD

1) Dans une note des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 158, p. 1743, note relative au problème du régime uniforme dans un tube de section carrée, j'ai indiqué une expression curieuse, en série double, du coefficient k, caractéristique de la forme carrée, à savoir la formule :

$$(1) \qquad k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum \sum \frac{1}{m^2\, n^2\, (m^2 + n^2)}$$

où $m = 1, 3, 5, \ldots$; $n = 1, 3, 5, \ldots$

Cette série double permet, bien plus facilement que les expressions de k données autrefois par Fourier, par de Saint-Venant et plus récemment par M. Boussinesq, de calculer la valeur numérique de k.

Cependant, il faut prendre environ cent termes de la série (1) pour avoir k avec une erreur relative de moins de un dix millième.

2) Je vais montrer que l'on peut transformer la série double (1) en une série simple si rapidement convergente qu'il suffit d'en calculer trois termes pour obtenir cette approximation du dix-millième.

On peut écrire:

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_n \frac{1}{n^2} \left[\sum_m \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2 + n^2} \right) \right]$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \left[\sum_n \frac{1}{n^4} \sum_m \frac{1}{m^2} - \sum_n \frac{1}{n^4} \sum_m \frac{1}{m^2 + n^2} \right]$$

Or, on sait que: (Voir par ex., Fabry, *Théorie des séries à termes constants*, p. 87 et suivantes)

$$\sum_{m=1,3,5,\ldots} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

D'autre part, au moyen des méthodes de sommation de Cauchy, (Voir, Collection Borel, *Le calcul des résidus*, par M. Lindelöf, p. 54) ou par une méthode élémentaire que j'exposerai plus loin, on trouve que

$$\sum_{m=1,3,5\ldots} \frac{1}{(2\nu-1)^2+m^2} = \frac{\pi}{4(2\nu-1)} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2}$$

où $\operatorname{th} x$ = tangente hyperbolique de $x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

En tenant compte de ces expressions, il vient:

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \frac{\pi^2}{2^3} \cdot \frac{\pi^4}{3.\,2^5} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \frac{\pi}{2^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^5} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{2^4}{\pi^5}\left[\operatorname{th}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5}\operatorname{th}\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^5}\operatorname{th}\frac{5\pi}{2} + \cdots\right]$$

Le 1er terme de cette série donne $k = 0{,}035375$; deux termes donnent $k = 0{,}035160$; enfin, avec trois termes, on obtient $k = 0{,}035143$, valeur exacte au dix millième près.

Le convergence est donc très rapide.

3) On peut calculer avec une grande approximation une limite supérieure de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme déterminé de la série des th.

Supposons en effet que le dernier terme calculé dans cette série soit $\dfrac{1}{(2n-1)^5} \operatorname{th} \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ où n a une valeur déterminée. Appelons R le reste de la série.

Puisque les th sont toujours inférieures à 1, on a

$$\mathrm{R} < \frac{1}{(2n+1)^5} + \frac{1}{(2n+3)^5} + \cdots$$

$$\text{ou } \mathrm{R} < \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+3)^4} + \cdots\right]$$

ou enfin

$$\mathrm{R} < \frac{1}{2n+1}\left[\frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3^4} - \cdots - \frac{1}{(2n-1)^4}\right]$$

L'expression dans le crochet se calcule facilement si n a une valeur déterminée.

4) Voyons maintenant comment on peut obtenir, par une méthode élémentaire, la relation

$$\sum_{m=1,3,5,\ldots} \frac{1}{(2n-1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2n-1)} \operatorname{th} \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

que j'ai utilisée plus haut.

Je partirai de l'expression bien connue du cosinus en produit infini.

On a $$\cos x = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2\pi^2}\right)$$

Or, on sait que l'on passe du cosinus au cosinus hyperbolique au moyen de la relation $\cos ix = \operatorname{ch} x$.

Il viendra donc en remplaçant x par ix dans la relation ci-dessus

$$\operatorname{ch} x = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2\pi^2}\right)$$

d'où, en prenant le logarithme,

$$\log \operatorname{ch} x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log \cdot \left(1 + \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2\pi^2}\right)$$

En dérivant, il vient enfin,

$$\operatorname{th} x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8x}{(2\nu-1)^2\pi^2 + 4x^2},$$

ou $$\operatorname{th} x = 8x\left[\frac{1}{\pi^2+4x^2} + \frac{1}{(3\pi)^2+4x^2} + \cdots\right]$$

En faisant $x = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$, on obtient

$$\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} = 8\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\left[\frac{1}{\pi^2+4\frac{\pi^2}{4}\frac{a}{b}} + \frac{1}{(3\pi)^2+4.\frac{\pi^2}{4}\frac{a}{b}} + \cdots\right]$$

ou

$$\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} = 4\pi\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\frac{b}{\pi^2}\left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+3^2 b} + \cdots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\sqrt{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(2n-1)^2 b}$$

et par suite

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(2n-1)^2 b}$$

Si l'on fait $b = 1$ et $a = (2\nu - 1)^2$ il vient finalement

$$\sum_{m=1,3,5,..}\frac{1}{(2\nu-1)^2+m^2} = \frac{\pi}{4(2\nu-1)}\operatorname{th}\frac{(2\nu-1)\pi}{2}$$

C'est la relation qu'il s'agissait d'obtenir.