

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 51 (1916-1917)  
**Heft:** 191

**Artikel:** Transformation d'une série double  
**Autor:** Paschoud, Maurice  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-269910>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 03.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Transformation d'une série double

PAR

MAURICE PASCHOUD

1) Dans une note des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 158, p. 1743, note relative au problème du régime uniforme dans un tube de section carrée, j'ai indiqué une expression curieuse, en série double, du coefficient  $k$ , caractéristique de la forme carrée, à savoir la formule :

$$(1) \quad k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum \sum \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2)}$$

où  $m = 1, 3, 5, \dots$  ;  $n = 1, 3, 5, \dots$

Cette série double permet, bien plus facilement que les expressions de  $k$  données autrefois par Fourier, par de Saint-Venant et plus récemment par M. Boussinesq, de calculer la valeur numérique de  $k$ .

Cependant, il faut prendre environ cent termes de la série (1) pour avoir  $k$  avec une erreur relative de moins de un dix millième.

2) Je vais montrer que l'on peut transformer la série double (1) en une série simple si rapidement convergente qu'il suffit d'en calculer trois termes pour obtenir cette approximation du dix-millième.

On peut écrire :

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_n \frac{1}{n^2} \left[ \sum_m \frac{1}{n^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2 + n^2} \right) \right]$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \left[ \sum_n \frac{1}{n^4} \sum_m \frac{1}{m^2} - \sum_n \frac{1}{n^4} \sum_m \frac{1}{m^2 + n^2} \right]$$

Or, on sait que: (Voir par ex., Fabry, *Théorie des séries à termes constants*, p. 87 et suivantes)

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

D'autre part, au moyen des méthodes de sommation de Cauchy, (Voir, Collection Borel, *Le calcul des résidus*, par M. Lindelöf, p. 54) ou par une méthode élémentaire que j'exposerai plus loin, on trouve que

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2\nu-1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2\nu-1)} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2}$$

où  $\operatorname{th} x = \text{tangente hyperbolique de } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

En tenant compte de ces expressions, il vient:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \frac{\pi^2}{2^3} \cdot \frac{\pi^4}{3 \cdot 2^5} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \frac{\pi}{2^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^5} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{2^4}{\pi^5} \left[ \operatorname{th} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5} \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^5} \operatorname{th} \frac{5\pi}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Le 1<sup>er</sup> terme de cette série donne  $k = 0,035375$ ; deux termes donnent  $k = 0,035160$ ; enfin, avec trois termes, on obtient  $k = 0,035143$ , valeur exacte au dix millième près.

Le convergence est donc très rapide.

3) On peut calculer avec une grande approximation une limite supérieure de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme déterminé de la série des  $\operatorname{th}$ .

Supposons en effet que le dernier terme calculé dans cette série soit  $\frac{1}{(2n-1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n-1)\pi}{2}$  où  $n$  a une valeur déterminée. Appelons  $R$  le reste de la série.

Puisque les  $\text{th}$  sont toujours inférieures à 1, on a

$$R < \frac{1}{(2n+1)^5} + \frac{1}{(2n+3)^5} + \dots$$

$$\text{ou } R < \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+3)^4} + \dots \right]$$

ou enfin

$$R < \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{(2n-1)^4} \right]$$

L'expression dans le crochet se calcule facilement si  $n$  a une valeur déterminée.

4) Voyons maintenant comment on peut obtenir, par une méthode élémentaire, la relation

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2n-1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2n-1)} \text{th} \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

que j'ai utilisée plus haut.

Je partirai de l'expression bien connue du cosinus en produit infini.

$$\text{On a } \cos x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2 \pi^2} \right)$$

Or, on sait que l'on passe du cosinus au cosinus hyperbolique au moyen de la relation  $\cos ix = \text{ch } x$ .

Il viendra donc en remplaçant  $x$  par  $ix$  dans la relation ci-dessus

$$\text{ch } x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2 \pi^2} \right)$$

d'où, en prenant le logarithme,

$$\log \text{ch } x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log \left( 1 + \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2 \pi^2} \right)$$

En dérivant, il vient enfin,

$$\operatorname{th} x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8x}{(2\nu-1)^2\pi^2 + 4x^2},$$

ou  $\operatorname{th} x = 8x \left[ \frac{1}{\pi^2 + 4x^2} + \frac{1}{(3\pi)^2 + 4x^2} + \dots \right]$

En faisant  $x = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}$ , on obtient

$$\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \left[ \frac{1}{\pi^2 + 4 \frac{\pi^2 a}{4b}} + \frac{1}{(3\pi)^2 + 4 \cdot \frac{\pi^2 a}{4b}} + \dots \right]$$

ou

$$\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{b}{\pi^2} \left[ \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+3^2b} + \dots \right]$$

$$= \frac{4}{\pi} \sqrt{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (2n-1)^2 b}$$

et par suite

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (2n-1)^2 b}$$

Si l'on fait  $b = 1$  et  $a = (2\nu - 1)^2$  il vient finalement

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2\nu-1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2\nu-1)} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2}$$

C'est la relation qu'il s'agissait d'obtenir.