Calcul des vitesses de régime dans les tubes cylindriques

Autor(en): **Paschoud, Maurice**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **51 (1916-1917)**

Heft 193

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-269926

Calcul des vitesses de régime dans les tubes cylindriques

PAR

MAURICE PASCHOUD

---

1. — Dans le problème de l'écoulement permanent bien continu du liquide qui remplit un tube de section donnée σ, tube mouillé par le liquide, la vitesse V du filet fluide qui perce cette section au point (x, y) est régie par l'équation indéfinie :

$$(1) \qquad \Delta_2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = -K, \qquad \text{où} \qquad K = \frac{\rho g I}{\varepsilon},$$

ρ étant le poids spécifique du liquide, ε son coefficient de viscosité, g l'accélération de la pesanteur et I la pente motrice qui produit l'écoulement.

Le long du contour χ du tube, le fluide est immobilisé et l'on a la condition définie

$$(2) \qquad V = 0.$$

Ce problème paraît bien particulier. En réalité, il présente un grand intérêt en raison des nombreuses questions de physique mathématique qui s'y ramènent. Citons parmi les plus importantes de ces questions celle de la torsion d'un cylindre élastique plein, de section normale donnée σ, et celle de l'équilibre élastique d'une membrane homogène, mince, flexible, également tendue dans tous les sens, fixée sur un cadre χ plan et sollicitée par une charge constante par unité d'aire.

Si l'on pose $V = -\frac{Kx^2}{2} + \Phi$, l'équation (1) prend la forme $\Delta_2\Phi = 0$ et la condition définie (2) devient

$$\Phi = K\frac{x^2}{2}.$$

Ainsi, notre problème est un cas particulier de celui des températures stationnaires. Plus généralement, puisqu'il s'agit de trouver une fonction harmonique dans un domaine plan σ limité par un contour fermé χ, fonction prenant des valeurs données sur ce contour, on a affaire à un cas particulier du problème de Dirichlet dans le plan.

2. — A part le cas de la section rectangulaire, où l'intégrale de (1), due à Fourier, est une série infinie de termes transcendants, la méthode la plus féconde pour traiter cette question est celle que Saint-Venant a indiquée dans son mémoire sur la *Torsion des prismes* (*Savants étrangers*, t. XIV). Cette méthode est exposée dans le *Cours d'analyse* de M. Boussinesq (T. II, Compléments, p. 419-426). Dans son cours, M. Boussinesq indique la solution rigoureuse du problème pour la section elliptique et pour la section triangulaire équilatérale. Il y donne, pour la section carrée, une solution approchée. Plus tard, (C. R., t. 158, 1914, et *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, t. 32, 1915), toujours pour le cas de la section carrée, il a poussé le calcul plus loin. Après de Saint-Venant, M. Boussinesq exprime Φ par un polynôme, dont chaque partie, homogène de degré n est formée au moyen des deux intégrales évidentes $(x \pm y\sqrt{-1})^n$ de $\Delta_2\Phi = 0$. En s'arrêtant aux termes du n^e degré, l'expression ainsi obtenue pour V contient $2n + 1$ constantes arbitraires. On dispose de ces constantes de manière que l'expression vérifie la condition $V = 0$ en $2n + 1$ points régulièrement distribués sur le contour du tube. Quelquefois, l'équation $V = 0$ représente alors *tout* le contour du tube et la solution obtenue est rigoureuse.

Lorsque cela n'a pas lieu, l'expression de V se trouvant nulle en $2n + 1$ points du contour, on peut admettre qu'elle représente approximativement les vitesses, l'approximation étant d'autant plus grande que n est pris plus élevé.

3. — La méthode de Ritz (*Œuvres*, Gauthier-Villars, 1911) permet de retrouver les solutions rigoureuses du problème dans les cas du contour elliptique et du contour triangulaire équilatéral et de donner une solution nouvelle pour la section rectangulaire.

Ritz remarque que la fonction V qui vérifie l'équation(1) et qui s'annule sur le contour du tube rend extremum l'intégrale

$$(3) \qquad I = \int_\sigma \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 - 2KV \right] d\sigma$$

étendue à toute la section du tube. En effet, la variation première de I est

$$\delta I = \int_\sigma \left[2 \frac{dV}{dx} \delta \frac{dV}{dx} + 2 \frac{dV}{dy} \delta \frac{dV}{dy} - 2K \delta V \right] d\sigma.$$

Comme $V = 0$ sur le contour, on a aussi $\delta V = 0$ sur ce contour et δI s'écrit, en appliquant à ses deux premiers termes la formule de Green

$$\delta I = -2 \int_\sigma [\Delta_2 V + K] \, \delta V \, d\sigma.$$

Sous cette forme, on voit que toute solution de (1) annule δI. Alors, au lieu de partir des équations (1) et (2), nous considérerons ces équations comme les conditions *nécessaires* pour rendre minimum l'intégrale I. En supposant la solution développée en série de polynômes ou en série de Fourier, nous la représenterons par une série *limitée* de polynômes ou de fonctions trigonométriques, chacun des termes de cette série étant affecté d'un coefficient arbitraire. En portant cette série limitée au terme de rang m dans l'intégrale I, celle-ci devient une fonction *connue* I_m des coefficients arbitraires. Il reste à déterminer ces coefficients de façon à rendre I_m extremum.

Contour elliptique.

4. — Soit l'ellipse rapportée à son centre $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$ En tenant compte des conditions de symétrie, nous prendrons pour V l'expression suivante, en série de polynômes qui vérifient la condition $V = 0$ au contour :

$$V = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left[A + B\left(x^2 + y^2\right) + \ldots\right].$$

En première approximation, nous ne conservons que le terme en A. L'intégrale I devient

$$I_1 = \int\int_\sigma \left[4A^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) - 2KA\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] dx\, dy$$

$$= 4A^2 \int_{-a}^{+} \frac{x^2}{a^4}\, dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy + 4A^2 \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{y^2}{b^4}\, dy$$

$$- 2KA \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy + 2KA \int_{-a}^{+a} \frac{x^2}{a^2}\, dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy$$

$$+ 2KA \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{y^2}{b^2}\, dx.$$

La condition de minimum $\dfrac{d\,\mathrm{I}_1}{d\,\mathrm{A}} = 0$ donne, après que l'intégration par rapport à y a été effectuée :

$$\frac{16\,\mathrm{A}\,b}{a^4}\int_{-a}^{+a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,x^2\,dx + \frac{16\,\mathrm{A}}{3\,b}\int_{-a}^{+a}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^3 dx$$

$$-4\,\mathrm{K}\,b\int_{-a}^{+a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx + 4\,\mathrm{K}\frac{b}{a^2}\int_{-a}^{+a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,x^2\,dx$$

$$+\frac{4}{3}\mathrm{K}\,b\int_{-a}^{+a}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^3 dx = 0.$$

Tout calcul fait, il vient :

$$\frac{16\,\mathrm{A}}{3}\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{b}\right)\frac{6\,a\,\pi}{16} - 2\,ab\,\mathrm{K}\,\pi + \frac{8}{3}\,b\,\mathrm{K}\,a\,\frac{6\,\pi}{16} = 0, \quad \text{d'où}$$

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{K}}{2}\,\frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \frac{\rho\,g\,\mathrm{I}}{2\,\varepsilon}\,\frac{a^2\,b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

C'est la solution rigoureuse, car, outre la condition (2) au contour, elle vérifie rigoureusement l'équation (1).

A titre de comparaison, voici la solution de M. Boussinesq. En posant $\mathrm{V} = -\dfrac{\mathrm{K}\,x^2}{2} + \Phi$, le problème revient, on l'a vu, à intégrer l'équation (4) $\Delta_2\,\Phi = 0$, avec (5) $\Phi = \dfrac{\mathrm{K}\,x^2}{2}$ sur le contour.

La fonction $\Phi = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,(x^2 - y^2) + \ldots.$ formée comme il a été dit au § 2, satisfait à l'équation (4). Ecrivons, pour déterminer les constantes, que la condition (5) est satisfaite aux quatre sommets de l'ellipse. Il vient

$$B = \frac{K}{2}\frac{a^2}{a^2+b^2} \quad , \quad A = \frac{K}{2}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2} \quad \text{et}$$

$$(6)\quad V = \frac{K}{2}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(1 + \frac{x^2-y^2}{b^2} - \frac{a^2+b^2}{a^2 b^2}x^2\right) = \frac{\rho g I}{2\varepsilon}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

expression trouvée ci-dessus.

Ces exemples montrent bien les caractères différents des deux méthodes.

Dans la dernière, on part d'un polynôme qui satisfait à l'équation indéfinie et la condition au contour permet de déterminer les constantes arbitraires. Avec Ritz, au contraire, on choisit un polynôme qui satisfait aux conditions au contour et les constantes se déterminent en écrivant que l'intégrale *I* est minimum, condition qui remplace l'équation indéfinie.

L'expression (6) de la vitesse montre que cette vitesse est maximum au centre de l'ellipse, pour $x = y = 0$ et l'on a :

$$V\max = \frac{\rho g I}{2\varepsilon}\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}$$

Le débit du tube se calcule facilement. L'équation d'une ellipse d'égale vitesse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u$ et l'aire de cette ellipse $= \pi a b u$. L'aire comprise entre cette ellipse et l'ellipse infiniment voisine est $\pi a b du$. On a donc le débit :

$$Q = \frac{\pi \rho g I}{2\varepsilon}\frac{a^3 b^3}{a^2+b^2}\int_0^1 (1-u)\,du = \frac{1}{4\pi}\frac{ab}{a^2+b^2}\frac{\rho g I \sigma^2}{\varepsilon}$$

σ étant l'aire $\pi a b$ de la section du tube.

La vitesse moyenne $U = \frac{Q}{\sigma} = \frac{1}{4\pi} \frac{a\,b}{a^2+b^2} \frac{\rho\,g\,I}{\varepsilon}\,\sigma.$

Si l'on pose $U = k\,K\,\sigma$, k étant le *coefficient caractéristique* de la forme du tube, il vient $k = \frac{1}{4\pi} \frac{ab}{a^2+b^2}$.

Lorsque $a = b = r$, l'ellipse devient un *cercle* de rayon r. Pour ce cas, on a

$$V = \frac{K}{4}(r^2 - x^2 - y^2) \quad , \quad V\max = \frac{Kr^2}{4},$$

$$Q = \frac{1}{8\pi} K\sigma^2 \quad , \quad U = \frac{1}{8\pi} K\sigma \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{8\pi}.$$

Pour trouver la section elliptique qui, à surfaces égales, donne le débit le plus fort, il faut rendre k maximum ou $\frac{1}{k} = 4\pi\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ minimum. Pour cela, il faut que $a = b$. C'est donc le cercle qui donne le débit le plus fort, ainsi qu'on pouvait le prévoir.

La section étant toujours elliptique, supposons que b augmente indéfiniment, a restant fixe. Pour tous les *points à distance finie*, on aura les expressions suivantes :

$$V_{\lim} = \frac{K}{2} a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad V\max_{\lim} = \frac{K\,a^2}{2}, \quad U_{\lim} = \frac{K\,a^2}{4}$$

Contour triangulaire équilatéral.

5. — La méthode de Ritz permet de traiter ce cas aussi simplement que le précédent ; l'écriture, que nous abrégeons dans ce qui suit, est seulement un peu plus longue.

Pour V, nous prenons l'expression suivante, où h représente la hauteur du triangle.

$$V = y\,(y - h + \sqrt{3}\,x)\,(y - h - \sqrt{3}\,x)\,[A + By + C\,(x^2+y^2) + ..]$$

Elle satisfait à la condition $V = 0$ sur le contour du triangle équilatéral et aux conditions de symétrie de ce triangle.

En première approximation, il vient :

$$I_1 = \int\int_\sigma [A^2 (18 x^2 y^2 + 9 x^4 + 9 y^4 - 6 h^2 x^2 + 22 h^2 y^2$$
$$+ 24 h x^2 y - 24 h y^3 - 8 h^3 y + h^4) - 2 KA (y^3 - 2 hy^2$$
$$+ h^2 y - 3 x^2 y)] \, dx \, dy$$

intégrale double étendue à l'aire σ du triangle.

La condition de minimum $\dfrac{d I_1}{dA} = 0$ donne, toutes les quadratures étant effectuées

$$\frac{8}{45}\sqrt{3}\, A h^6 - \frac{4\sqrt{3}}{90} K h^5 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{K}{4h},$$

Donc, $V = \dfrac{\rho g I}{4 \varepsilon h} y (y - h + \sqrt{3} x) (y - h - \sqrt{3} x)$.

C'est encore la solution obtenue par M. Boussinesq au moyen de la méthode de Barré de Saint-Venant. Elle satisfait rigoureusement soit à la condition au contour, soit à l'équation indéfinie (1).

On peut lui donner une forme plus symétrique. Appelons p, p', p'' les distances d'un point (x, y), intérieur au triangle, respectivement, aux trois côtés du triangle.

$$p = y \quad , \quad p' = \frac{h - y - \sqrt{3} x}{2} \quad , \quad p'' = \frac{h - y + \sqrt{3} x}{2} \, .$$

et V s'écrit $V = \dfrac{\rho g I}{\varepsilon} \dfrac{p . p' . p''}{h} = \dfrac{\rho g I}{\varepsilon} \dfrac{p . p' . p''}{p + p' + p''}$.

Sous cette forme, on voit que le maximum du produit p, p', p'' des trois facteurs p, p', p'', dont la somme

$p + p' + p'' = h$ est constante a lieu pour $p = p' = p'' = \frac{h}{3}$, soit au centre du triangle et l'on a :

$$V \max = \frac{\rho g I}{27 \varepsilon} h^2 = \frac{1}{9\sqrt{3}} \frac{\rho g I}{\varepsilon} \sigma$$

si σ est la surface du triangle.

On obtient sans peine :

$$Q = 2 \int_0^h dy \int_0^{\frac{h-y}{\sqrt{3}}} V\, dy = \frac{\rho g I}{60\sqrt{3}} \frac{h^4}{\varepsilon} = \frac{\rho g I \sigma^2}{20\sqrt{3}\, \varepsilon}$$

$$U = \frac{\rho g I \sigma}{20\sqrt{3}\, \varepsilon}$$

Enfin, si l'on pose $U = k K \sigma$, il vient pour le coefficient k caractéristique de la section triangulaire équilatérale $k = \frac{1}{20\sqrt{3}}$

6. — Une fois que l'on connaît la forme des solutions dans les deux cas précédents, il est très facile de retrouver dans ces deux cas les coefficients numériques. Il suffit de partir des expressions $V = K C_e \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ dans le cas de l'ellipse et $V = K C_t y (y - h + \sqrt{3}\, x)(y - h - \sqrt{3}\, x)$ dans celui du triangle et de déterminer directement C_e et C_t en écrivant que l'équation $\Delta_2 V = - K$ est identiquement vérifiée. On trouve de suite :

$$C_c = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \qquad C_t = \frac{1}{4h}.$$

Contour rectangulaire.

7. — Pour traiter ce cas de la même façon que les deux précédents, il faudrait partir de l'expression suivante de la vitesse, au moyen de polynômes

$$V = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)[A + B(x^2+y^2) + \ldots]$$

Elle s'annule sur le contour du rectangle de centre à l'origine et de côtés 2 a et 2 b et elle satisfait aux conditions de symétrie du rectangle. La première approximation donne presque sans calcul, $A = \dfrac{5K}{8} \dfrac{a^3 b^3}{a^5 b^3 + a^3 b^5}$

d'où la solution approchée $V = \dfrac{5K}{8} \dfrac{a^3 b^3}{a^5 b^3 + a^3 b^5}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$

Mais si l'on veut passer à une deuxième approximation, en utilisant les deux constantes A et B, les calculs, sans offrir de difficultés, deviennent d'une longueur rebutante. On sait du reste, à priori, grâce à la solution de Fourier sous forme de série infinie simple de termes transcendants que, quelque grand que soit le nombre des constantes utilisées, jamais on n'obtiendra une solution vérifiant rigoureusement l'équation indéfinie (1). D'ailleurs, la première approximation obtenue ci-dessus donne, il faut le remarquer, des résultats déjà assez exacts. Pour nous en rendre compte, calculons le coefficient k caractéristique de la forme *carrée*, en nous servant de cette approximation. Elle donne pour le carré les expressions :

$$V = \frac{5K}{16\,a^2}(x^2 - a^2)^2 \quad , \quad V\max = \frac{5K\,a^2}{16}$$

$$Q = \int_\sigma V\,dx\,dy = \frac{5K}{9}a^4 = \frac{5K}{9.16}\sigma^2, \; \sigma \text{ étant la section} = 4\,a^2.$$

La vitesse moyenne est $U = \dfrac{5K}{9.16}\,\sigma$, d'où pour le coefficient k la valeur approchée $k = \frac{5}{144} = 0{,}0347$. Or, la valeur exacte de k, ainsi que nous le verrons plus loin, est 0,0351. L'erreur relative est de $\frac{4}{351} = \frac{1}{88}$ seulement.

Si l'on pose $V max = k' K \sigma$, on trouve ici $k' = \frac{5}{64} = 0{,}0781$. La valeur exacte de k' est 0,0736. L'erreur relative $= \frac{45}{736} = \frac{1}{16}$ est plus grande que sur k.

8. — M. Boussinesq, dans son mémoire cité des Annales de l'Ecole normale supérieure, a calculé, par la méthode de Barré de Saint-Venant, une troisième approximation dans le cas de la section carrée et il obtient pour V l'expression suivante :

$$V = \frac{K\sigma}{16}\left[\frac{73}{75} - \xi^2 - \eta^2 + \frac{1}{5}(1 - \xi^4 + 6\,\xi^2\eta^2 - \eta^4) + \frac{1}{5}\Phi'\right]$$

$$\text{où} \qquad \xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{a} \qquad \text{et}$$

$$\Phi' = B\left(\frac{4}{5} + \xi^4 - 6\,\xi^2\eta^2 + \eta^4\right)$$

$$+ C\left(-\frac{16}{9} + \xi^8 - 28\,\xi^6\eta^2 + 70\,\xi^4\eta^4 - 28\,\xi^2\eta^6 + \eta^8\right)$$

$$+ D\left(\frac{64}{13} + \xi^{12} - 66\xi^{10}\eta^2 + 495\xi^8\eta^4 - 924\xi^6\eta^6 + 495\,\xi^4\eta^8 - 66^2\eta\xi^{10} + \eta^{12}\right) + ..$$

$$\text{avec } B = \frac{140\,857.81.3}{10.39\,337\,142}, \; C = \frac{99\,088.81}{10.39\,337\,142}, \; D = \frac{-119.81^2}{10.39\,337\,142}$$

Cette expression est très compliquée et elle ne met pas en évidence la symétrie du carré. En outre, l'approximation, qui est très bonne, il est vrai, ne peut pas être poussée plus loin, car les calculs deviennent inextricables.

9. — La méthode de Ritz, et cela montre sa souplesse,

va nous fournir une expression de V tout à-fait symétrique et où l'approximation peut être poussée aussi loin que l'on voudra. Il suffit de prendre pour V, au lieu d'une série de polynômes, une série double de Fourier. Prenons donc l'expression suivante, qui s'annule sur le contour du rectangle $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0$.

$$V_{mn} = \sum_{\substack{1 \\ m=1,-3,5}}^{m} \sum_{\substack{1 \\ n=1,-3,5}}^{n} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}$$

En portant Vmn à la place de V dans l'intégrale I, et en appliquant les conditions de minimum

$$\frac{d\, I_{mn}}{d\, A_{\mu\nu}} = 0 \quad \substack{\mu=1,-3,5,\dots \\ \nu=1,-3,5,\dots}$$

j'ai montré (*C. R.* Académie des Sciences t. 158, p. 1743) que les coefficients Amn se déterminent *individuellement*, ce qui est essentiel pour que le calcul soit possible pratiquement et que l'on peut trouver leur expression générale.

On trouve ainsi :

$$V = \frac{16\,K}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}}{mn\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\right]}$$

série absolument et uniformément convergente dans toute la section du tube.

Cette expression montre immédiatement que la vitesse maxima a lieu au centre du tube et donne

$$V_{max} = \frac{16\,K}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\right]},$$

$$Q = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} V\,dx\,dy = \frac{64.\sigma.K}{\pi^6}\sum_m\sum_n \frac{1}{m^2 n^2\left[\left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2\right]},$$

$$U = \frac{64.\sigma.K}{\pi^6}\sum_m\sum_n \frac{1}{m^2 n^2\left[m^2\frac{b}{a} + n^2\frac{a}{b}\right]}.$$

Enfin, pour le coefficient k caractéristique de la section rectangulaire, il vient :

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_m\sum_n \frac{1}{m^2 n^2\left[m^2\frac{b}{a} + n^2\frac{a}{b}\right]}.$$

10. — Si, la longueur a d'un des côtés du rectangle restant fixe, celle b de l'autre côté augmente indéfiniment, il vient pour V en tous les points à distance finie l'expression limite

$$V_{lim} = \frac{16K}{\pi^2}\sum_m\sum_n \frac{\cos\frac{m\pi x}{2a}}{mn\frac{m^2\pi^2}{4a^2}} = \frac{64.K.a^2}{\pi^4}\cdot\frac{\pi}{4}\sum_m \frac{\cos m\pi x}{m^3}.$$

Or, on sait que $\displaystyle\sum_m \frac{\cos mz}{m^3} = \frac{\pi^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{2^3} - \frac{\pi\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}{2^3}$

En utilisant cette relation, il vient, toutes réductions faites, $V_{lim} = \dfrac{16.K.a^2}{\pi^3}\cdot\dfrac{\pi^3}{2^3}\cdot\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) = \dfrac{Ka^2}{2}\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ et par suite, $V_{\substack{lim\\max}} = \dfrac{Ka^2}{2}$.

Ce sont les mêmes expressions que celles trouvées pour la vitesse limite dans le cas de la section elliptique. Il en résulte une vérification de tous nos calculs.

On trouve de même

$$U_{lim} = \frac{256\,K}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2 \dfrac{m^2}{a^2}} = \frac{256.\,K.\,a^2}{\pi^6} \cdot \frac{\pi^6}{768} = \frac{K a^2}{3},$$

valeur plus grande, ainsi qu'on pouvait le prévoir, que celle de U lim. dans le cas du tube elliptique.

11. — En faisant $a = b$ dans les formules du § 9, il vient pour le cas du *carré* les formules suivantes :

$$V = \frac{16\,K}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{\cos \dfrac{m\pi x}{2a} \cos \dfrac{n\pi y}{2a}}{mn\left[\left(\dfrac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{2a}\right)^2\right]}$$

$$V_{max} = \frac{16.\,K.}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn\left[\left(\dfrac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{n\pi}{2a}\right)^2\right]},$$

$$Q = \frac{64.\,\sigma.\,K}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2\left[\left(\dfrac{m}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{n}{2a}\right)^2\right]},$$

$$U = \frac{64.\,\sigma.\,K}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2 [m^2 + n^2]},$$

$$k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2 [m^2 + n^2]}.$$

Deuxième solution pour le contour rectangulaire.

12. — Dans le cas du contour rectangulaire, on peut donner une autre solution qui est très analogue à celle de Fourier.

Il s'agit d'intégrer l'équation (1) $\Delta_2 V = - K$, avec la condition V = 0 au contour. Nous supposerons V de la forme $V = \sum_{i=1,3,5} Y_i \cos\frac{i\pi x}{2a}$, les Y_i étant fonction de y seul.

Cette expression s'annule pour $x = \pm a$. Si l'on pose, pour abréger l'écriture, $\alpha_i = \frac{i\pi}{2a}$, il vient en portant cette expression de V dans (1)

$$-Y_1 \alpha^2_1 \cos\frac{\pi x}{2a} - Y_3 \alpha_3{}^2 \cos\frac{3\pi x}{2a} - .. + Y''_1 \cos\frac{\pi x}{2a}$$

$$+ Y''_3 \cos\frac{3\pi x}{2a} + .. = -K$$

Multiplions les deux membres par $\cos\frac{\pi x}{2a}$ et intégrons de $-a$ à $+a$, il vient finalement $Y''_1 - \alpha_1 Y_1 = -\frac{2K}{a\alpha_1}$ et, d'une façon générale $Y_i''i - \alpha_i^2 Y_i = -\frac{2K}{a\alpha_i}$, avec $i = 1, -3, 5, ..$

L'intégrale générale de cette équation est $\frac{2K}{a\alpha_i^3} + A_i sh\, \alpha_i y + B\, ch\, \alpha_i y$. Si l'on tient compte de la condition V = 0, pour $y = \pm b$, on détermine A_i et B_i et il vient enfin :

$$V = \sum_{i=1,-3,5,\ldots} \frac{16 k a^2}{c^3 \pi^3} \left(1 - \frac{ch\, \alpha_i\, y}{ch\frac{i\pi b}{2\ a}}\right) \cos\frac{i\pi x}{2a}.$$ On en tire

$$V_{max} = \frac{16 K a^2}{\pi^3} \sum_i \frac{1}{i^3}\left(1 - \frac{1}{ch\frac{i\pi b}{2a}}\right),$$

$$Q = \sum_i \frac{126 K a^3}{i^4 \pi^4}\left[b - \frac{2a}{i\pi} th\frac{i\pi b}{2a}\right]$$

$$U = \sum_i \frac{32 K a^2}{i^4 \pi^4}\left[1 - \frac{2a}{i\pi b} th\frac{i\pi b}{2a}\right]$$ et

$$k = \left(\frac{2}{4}\right)^4 \sum_i \frac{1}{i^4}\left[\frac{a}{2\,b} - \frac{a^2}{i\pi b^2}\,th\,\frac{i\pi b}{2\,a}\right].$$

Si, la longueur de a restant fixe, celle de b augmente indéfiniment, il vient pour tous les points à distance finie

$$V_{lim} = \sum_i \frac{16\,K\,a^2}{\pi^3}\,\frac{1}{i^3}\cos\frac{i\pi x}{2a} = \frac{K\,a^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$\text{d'où } V_{\substack{lim\\max}} = \frac{K\,a^2}{2}\,.$$

$$\text{De même, } U_{lim} = \sum_i \frac{32\,K\,a^2}{i^4\,\pi^4}\,(1-0) = \frac{K\,a^2}{2}.$$

Ce sont bien les valeurs trouvées par la première méthode.

13. — A cause de la symétrie du tube, les expressions ci-dessus de V, Q, U et k ne doivent pas changer si l'on y remplace x par y et a par b. On obtient de cette façon des identités curieuses, telles que la suivante :

$$\sum_i \frac{a^2}{i^3}\left(1 - \frac{ch\,\dfrac{i\pi y}{2\,b}}{ch\,\dfrac{i\pi b}{2\,a}}\right)\cos\frac{i\pi x}{2\,a} = \sum_i \frac{b^2}{i^3}\left(1 - \frac{ch\,\dfrac{i\pi x}{2\,a}}{ch\,\dfrac{i\pi a}{2\,b}}\right)\cos\frac{i\pi y}{2\,b}$$

dont la raison profonde réside dans certaines transformations des fonctions elliptiques, ainsi que l'a montré M. Purser (*Messenger of. Math.* Vol. XI).

Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes.

14. — On obtient d'autres identités en comparant les résultats donnés par les deux méthodes ci-dessus.

Par exemple, on a :

$$\sum_m \sum_n \frac{\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}}{mn\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\right]} = \frac{a^2}{\pi}\sum_m \frac{1}{m^3}\left(1-\frac{ch\frac{m\pi y}{2a}}{ch\frac{m\pi b}{2a}}\right)\cos\frac{m\pi x}{2a}$$

$$= \frac{b^2}{\pi}\sum_n \frac{1}{n^3}\left(1-\frac{ch\frac{n\pi x}{2b}}{ch\frac{n\pi a}{2b}}\right)\cos\frac{n\pi y}{2b}.$$

En particulier, si l'on identifie les valeurs de k pour la section carrée, on trouve :

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2 (m^2+n^2)} = \frac{1}{12} - \frac{2^4}{\pi^5}\sum_i \frac{th\frac{i\pi}{2}}{i^3}$$

identité que j'ai établie directement (*Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles*, t. 51, p. 255).

15. — Il est facile de montrer directement l'identité des expressions données pour V par les deux méthodes.

Pour cela, calculons la somme

$$S = \sum_{n=1,-3,5\ldots} \frac{\cos\frac{n\pi y}{2b}}{mn\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\right]}$$

Elle s'écrit : $S = \dfrac{4a^2 b^2}{m\pi^2}\sum_n \dfrac{\cos nz}{nl+n^3 k}$

si l'on pose $\dfrac{\pi y}{2b} = z$, $l = m^2 b^2$, $k = a^2$.

Soit alors $v = \sum_n \dfrac{\cos nz}{nl+n^3k} = \sum \dfrac{1}{l+n^2 k}\dfrac{\cos nz}{n}$

On vérifie de suite que l'on a :

$$l v - k v'' = \sum_{n=1,-3,5..} \frac{\cos n z}{n} = \frac{\pi}{4}$$

les dérivations successives terme à terme de la série v étant légitimes.

L'intégrale générale de l'équation $l v - k v'' = \frac{\pi}{4}$

est $V = A \, sh \sqrt{\frac{l}{k}} z + B \, ch \sqrt{\frac{l}{k}} z + \frac{\pi}{4 l}$.

Comme v est paire, $A = 0$. D'ailleurs v s'annule pour

$y = b$, ce qui donne : $B = -\frac{\pi}{4 m^2 b^2} \frac{1}{ch \frac{m \pi b}{2 a}}$.

On trouve ainsi : $v = \frac{\pi}{4 m^2 b^2} \left[1 - \frac{ch \frac{m \pi y}{2 a}}{ch \frac{m \pi b}{2 a}} \right]$

et $S = \frac{4 a^2 b^2}{m \pi^2} \frac{\pi}{4 m^2 b^2} \left[1 - \frac{ch \frac{m \pi y}{2 a}}{ch \frac{m \pi b}{2 a}} \right] = \frac{a^2}{\pi} \frac{1}{m^3} \left(- \frac{ch \frac{m \pi y}{2 a}}{ch \frac{m \pi b}{2 a}} \right)$.

De la même façon, on verrait que :

$$\sum_n \frac{\cos \frac{n \pi x}{2 a}}{m n \left[\left(\frac{m \pi}{2 a} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{2 b} \right)^2 \right]} = \frac{b^2}{\pi} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{ch \frac{n \pi x}{2 b}}{ch \frac{n \pi a}{2 b}} \right)$$

Ces résultats montrent bien que

$$\sum_m \sum_n \frac{\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}}{mn\left[\left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2\right]} = \frac{a^2}{\pi}\sum\frac{1}{m^3}\left(1-\frac{ch\frac{m\pi y}{2a}}{ch\frac{m\pi b}{2a}}\right)\cos\frac{m\pi x}{2a}$$

$$= \frac{b^2}{\pi}\sum\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{ch\frac{n\pi x}{2b}}{ch\frac{n\pi a}{2b}}\right)\cos\frac{n\pi y}{2b}\,.$$

Résultats numériques.

16. — Nous avons vu que, dans les trois formes de sections étudiées précédemment, la vitesse maximum V*max* et la vitesse moyenne U peuvent se mettre sous la forme

$$V_{max} = k'\,K\sigma \quad , \quad U = k\,K\sigma\ ,$$

les coefficients k' et k étant caractéristiques pour les sections de tube considérées.

M. Boussinesq a montré (*Annales de l'Ecole normale supérieure,* 1915) que le fait est général pour toutes les formes de tubes.

Voici les valeurs numériques de k' et de k pour le triangle équilatéral, le carré et le cercle.

Triangle équilatéral :

$$k' = \frac{1}{9\sqrt{3}} = 0{,}0642 \quad , \quad k = \frac{1}{20\sqrt{3}} = 0{,}0289\ ;$$

$$\text{carré : } k' = 0{,}0736 \quad , \quad k = 0{,}0351\ ;$$

$$\text{cercle : } k' = \frac{1}{4\pi} = 0{,}0796 \quad ; \quad k = \frac{1}{8\pi} = 0{,}0398.$$

En supposant la continuité, les valeurs de k' et de k pour des tubes en forme de polygones réguliers de plus de quatre côtés seront comprises entre celles obtenues pour le carré et pour le cercle.