

Sur l'intégrale

Autor(en): **Vaney, Félix**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **55 (1923-1925)**

Heft 213

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-271280>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Sur l'intégrale $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$,

PAR

FÉLIX VANEY

1. — Dans un travail précédent ¹, j'ai étudié l'intégrale :

$$(1) \quad I_n = \int x^n e^{ax^2 + bx} dx,$$

pour n entier positif et a, b nombres réels, a n'étant pas nul. Il m'a paru intéressant d'examiner spécialement le cas particulier :

$$I_n = \int x^n e^{x^2} dx,$$

où $a = 1$ et $b = 0$, en empruntant une méthode due à Hermite ².

2. — En partant de l'identité, pour n entier positif,

$$\frac{d}{dx} \left[x^{n-1} e^{x^2} \right] = 2 x^n e^{x^2} + (n-1) x^{n-2} e^{x^2},$$

puis en multipliant par dx et en intégrant, il vient :

$$x^{n-1} e^{x^2} = 2 \int x^n e^{x^2} dx + (n-1) \int x^{n-2} e^{x^2} dx,$$

qui fournit la formule de récurrence :

$$(2) \quad I_n = \frac{x^{n-1}}{2} e^{x^2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2}.$$

Donnons successivement à n les valeurs 0, 1, 2, etc., en séparant les résultats pour n impair et n pair :

$$n = 1 : I_1 = \frac{1}{2} e^{x^2};$$

$$n = 3 : I_3 = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2};$$

$$n = 5 : I_5 = \left(\frac{x^4}{2} - x^2 + 1 \right) e^{x^2};$$

¹ Bulletin des sciences naturelles, 1924.

² Œuvres. Tome II, p. 481. Sur l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$n = 7 : I_7 = 3 \left(\frac{x^6}{3!} - \frac{x^4}{2!} + x^2 - 1 \right) e^{x^2}.$$

$$n = 2 : I_2 = \frac{x}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} I_0;$$

$$n = 4 : I_4 = \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x \right) e^{x^2} + \frac{3}{4} I_0;$$

$$n = 6 : I_6 = \left(\frac{1}{2} x^5 - \frac{5}{4} x^3 + \frac{3.5}{8} x \right) e^{x^2} - \frac{3.5}{8} I_0;$$

$$n = 8 : I_8 = \left(\frac{x^7}{2} - \frac{7}{4} x^5 + \frac{7.5}{8} x^3 - \frac{7.5.3}{16} x \right) e^{x^2} + \frac{3.5.7}{16} I_0.$$

Il résulte de la formule de récurrence (2) que l'intégrale I_n présente deux cas bien distincts, suivant que n est impair ou pair.

Dans le cas de $n = 2p + 1$, il vient :

$$(3) \quad I_{2p+1} = P_{2p} e^{x^2}$$

où P_{2p} désigne un polynome en x de degré $2p$; le produit $e^{-x^2} I_{2p+1}$ est donc entièrement rationnel.

Pour $n = 2p$, nous avons

$$(4) \quad I_{2p} = \mathcal{P}_{2p-1} e^{x^2} + A_p \int e^{x^2} dx.$$

où \mathcal{P}_{2p-1} désigne un nouveau polynome de degré $2p - 1$ et où A_p est une constante.

Je cherche à déterminer les polynomes P_{2p} et \mathcal{P}_{2p-1} ainsi que quelques-unes de leurs propriétés.

3. — Dans le cas de n impair, l'intégrale I_{2p+1} se calcule facilement par la substitution $x^2 = z$ et au moyen du procédé de l'intégration par parties ; il vient :

$$(5) \quad I_{2p+1} = \frac{p!}{2} \left[\frac{x^{2p}}{p!} - \frac{x^{2p-2}}{(p-1)!} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{x^2}{1!} + (-1)^p \right] e^{x^2}.$$

Afin de mieux mettre en évidence la nature de ce polynome P_{2p} , je puis poser pour obtenir P_{2p} :

$$(6) \quad \int_0^x x^{2p+1} e^{x^2} dx = P_{2p} e^{x^2} - C,$$

où C est une constante ; on en déduit :

$$P_{2p} = C e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_0^x x^{2p+1} e^{x^2} dx.$$

Or, si l'on développe chacun des deux termes de cette somme

suivant les puissances ascendantes de la variable, le premier terme donnera la série infinie suivante :

$$(7) \quad Ce^{-x^2} = C \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} + \dots \right);$$

quant au second terme, il donnera aussi une série infinie, mais qui commence par x^{2p+2} . Comme P_{2p} est un polynome de degré $2p$, il en résulte que l'effet du second terme doit être de détruire tous les termes de la série Ce^{-x^2} , venant après la puissance x^{2p} ; on en déduit la proposition suivante :

I. — Dans la relation (3), le polynome P_{2p} de degré $2p$ est formé, à un facteur constant près, des premiers termes du développement de e^{-x^2} , jusqu'au terme en x^{2p} , suivant les puissances ascendantes de la variable.

La constante C se détermine par comparaison des développements (5) et (7); il vient :

$$C = (-1)^p \frac{p!}{2}.$$

Remplaçons maintenant dans la formule de récurrence (2) n par $2p+1$, puis écrivons pour I son expression (3), nous obtenons ainsi la formule de récurrence entre deux polynomes consécutifs :

$$(8) \quad P_{2p} + p P_{2p-2} = \frac{x^{2p}}{2}.$$

En outre, si nous dérivons deux fois de suite l'équation (6), ce qui donne :

$$x^{2p+1} = \frac{dP_{2p}}{dx} + 2x P_{2p},$$

et

$$(2p+1)x^{2p} = \frac{d^2P_{2p}}{dx^2} + 2P_{2p} + 2x \frac{dP_{2p}}{dx};$$

puis si nous éliminons le terme indépendant de P_{2p} et de ses dérivées, nous trouvons l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre :

$$(9) \quad x \frac{d^2P}{dx^2} + (2x^2 - 2p - 1) \frac{dP}{dx} - 4pxP = 0.$$

Or cette équation est aussi vérifiée en posant $P = e^{-x^2}$; d'où la conclusion :

II. — Si l'on partage d'une manière quelconque le développement ordonné suivant les puissances croissantes de x de la série e^{-x^2} ,

les deux parties satisfont à la même équation différentielle du second ordre.

4. — Pour n pair, j'établis la formule de récurrence entre deux polynômes \mathcal{P} de la relation (4), puis je détermine le coefficient A_p .

Pour cela, faisons dans (2) $n = 2p$ et portons l'expression (4) dans cette nouvelle relation, il vient :

$$\mathcal{P}_{2p-1} e^{x^2} + A_p I_0 = \frac{x^{2p-1}}{2} e^{x^2} - \frac{2p-1}{2} [\mathcal{P}_{2p-3} e^{x^2} + A_{p-1} I_0].$$

En identifiant les coefficients de e^{x^2} , nous avons la formule de récurrence entre deux polynômes P consécutifs :

$$(10) \quad \mathcal{P}_{2p-1} + \frac{2p-1}{2} \mathcal{P}_{2p-3} = \frac{x^{2p-1}}{2},$$

et en comparant les coefficients de I_0 , nous trouvons entre deux constantes A la relation suivante :

$$(11) \quad A_p = -\frac{2p-1}{2} A_{p-1}.$$

Posons $A_0 = 1$; nous aurons successivement :

$$A_1 = -\frac{1}{2} ; A_2 = -\frac{3}{2} A_1, \text{ etc.}$$

$$(12) \quad \text{et } A_p = (-1)^p \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2p-1}{2} = (-1)^p \frac{1.3.5 \dots (2p-1)}{2^p}.$$

Pour déterminer le polynôme \mathcal{P}_{2p-1} , je tire de la relation (4) :

$$(13) \quad \mathcal{P}_{2p-1} = -A_p e^{-x^2} \int e^{x^2} dx + e^{-x^2} \int x^{2p} e^{x^2} dx$$

et, opérant comme dans le cas de n impair, j'obtiens la conclusion :

III. — Dans la relation (4), le polynôme \mathcal{P}_{2p-1} est formé, à un facteur constant près, des premiers termes du développement de la fonction transcendante $e^{-x^2} \int e^{x^2} dx$, jusqu'au terme en x^{2p-1} , suivant les puissances ascendantes de la variable.

Or ce développement s'obtient immédiatement au moyen de l'équation différentielle :

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 1,$$

qui est vérifiée par la fonction $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{x^2} dx$.

Posons :

$$y = u_0 x + u_1 x^3 + \dots + u_p x^{2p+1} + \dots,$$

nous trouvons facilement :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad (2p + 1) u_p + 2 u_{p-1} = 0;$$

ce qui fournit :

$$u_p = (-1)^p \frac{2^p}{3.5\dots(2p+1)}$$

et, par suite, le développement suivant :

(15)

$$e^{-x^2} \int_0^x e^{x^2} dx = x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2^2}{3.5} x^5 - \dots + (-1)^p \frac{2^p}{3.5\dots(2p+1)} x^{2p+1} + \dots$$

Portons dans (13) le développement (15) ainsi que la valeur de A_p donnée dans (12), nous obtenons l'expression générale du polynome \mathcal{P} :

$$(16) \quad \mathcal{P}_{2p-1} = (-1)^{p+1} \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2^p} \left[x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2^2}{3.5} x^5 - \dots + (-1)^{p-1} \frac{2^{p-1}}{3.5\dots(2p+1)} x^{2p-1} \right].$$

qui satisfait à l'équation différentielle du second ordre avec second membre :

$$(17) \quad x \frac{d^2 \mathcal{P}}{dx^2} + 2(x^2 - p) \frac{d \mathcal{P}}{dx} - 2(2p-1)x \mathcal{P} = (-1)^p \frac{1.3.5\dots(2p-1)2p}{2^p}.$$

Lausanne, août 1923.