Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 57 (1929-1932)

Heft: 223

Artikel: Le théorème préliminaire de Weierstrass

Autor: Dumas, Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-284159

Le théorème préliminaire de Weierstrass

PAR

Gustave DUMAS

(Séance du 20 février 1929.)

Il s'agit d'une proposition dont on s'est beaucoup occupé, qu'on a mainte fois démontrée, et sur laquelle, souvent encore, on reviendra:

Soit

$$F(z;x_1,x_2,\ldots x_n) = F(z;(x))$$

une fonction holomorphe au point

$$(1) \qquad z=0\,,\ x_i=0\,, \qquad (i=1,\ 2, \ldots n)$$

et pour laquelle on a :

$$(2) \qquad F(z;(0)) = z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \ldots = z^m \cdot \varphi(z)\ ;$$

dans une certaine étendue autour du point (1),

$$F(z;(x)) = [z^m + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{m-2} + \ldots + A_m] \cdot \Phi(z;(x)),$$

les $A_1, A_2, \ldots A_m$ *étant des séries entières des seules variables* (x), *nulles pour* $x_i=0$, $(i=1,\ 2, \ldots n)$ et Φ *une fonction holomorphe de* z *et des* (x), *différente de zéro en* (1).

Sans être complètement inédite [1], la démonstration qui suit, par sa nouvelle ordonnance, a l'avantage d'être aussi élémentaire que possible. Elle met, d'autre part, en évidence le fait que quand, dans F, les coefficients sont réels, il en est de même pour les deux facteurs au second membre de (3) [2].

Sans nuire, en aucune façon, à la généralité de la déduction, on peut supposer

$$(4) \qquad \varphi(z) = 1$$

et admettre, également, que la fonction $F(z;(x))$ est holomorphe dans le domaine

[1] Cf. G. DUMAS, Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrgang 1909, 18. Abhandlung, München 1910.

[2] Cf. PAUL STÄCKEL. *Die Bedeutung des Weierstrass'schen Vorbereitungssatzes für die Lehre von den krummen Flächen.* Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. d. Wiss. Jahrgang 1916, 1. Abhandlung, Heidelberg 1916.

(5) $$|z| < 1\,,\quad |x_i| < 1\,,\ (i = 1, 2, \ldots\, n).$$

La première de ces hypothèses interviendra au § 1 où l'égalité (3) sera établie formellement: la seconde au § 2, où sera prouvée la convergence des développements.

Au § 3, ces hypothèses tomberont et l'on examinera, en outre, le cas où $F(z;(x))$ serait en z un polynôme de degré limité.

§ 1.

Les $f_k\,(z;(x))$ étant des polynômes entiers et homogènes relativement aux variables (x) et de degré d'homogénéité égal à l'indice k, on peut en vertu de (4) écrire:

(6) $$F(z;(x)) = z^m + \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,(z;(x)).$$

Les coefficients des termes en (x) dans les f_k seront des séries entières en z.

Introduisons en même temps que F deux autres développements:

(7) $$G(z;(x)) = z^m + \sum_{k=1}^{\infty} g_k\,(z;(x)).$$

et

(8) $$\Phi(z;(x)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k\,(z;(x))$$

où les g_k et φ_k sont relativement aux (x) des polynômes de même nature que les f_k, mais où les coefficients des φ_k sont encore des séries entières en z, alors que, pour les g_k, ce ne sont que des polynômes entiers en z, de degré égal au plus à $m - 1$.

On va voir qu'il est possible de déterminer — et cela d'une manière unique — les g_k et φ_k de manière à avoir formellement l'identité

(9) $$F = G\,\Phi$$

qui, autrement écrite, n'est autre que (3), pour $\varphi = 1$.

Pour que (9) ait lieu, il faut et il suffit que les g_k et φ_k satisfassent aux identités

(10) $$\left\{\begin{array}{l} g_1 + z^m\,\varphi_1 = f_1 \\ g_2 + z^m\,\varphi_2 = f_2 - g_1\varphi_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_k + z^m\,\varphi_k = f_k - (g_1\,\varphi_{k-1} + \cdots + g_{k-1}\,\varphi_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or g_1 et φ_1 s'obtiennent de suite. Il suffit d'ordonner f_1 suivant les puissances croissantes de z, g_1 se trouve alors constitué par les termes de f_1 qui contiennent une puissance de z inférieure à la m$^{\text{ième}}$, φ_1 par l'ensemble des autres termes divisés chacun par z^m.

g_2 et φ_2 se déterminent ensuite d'une manière analogue et, de proche en proche, les g_k et φ_k, dans leur totalité.

La première partie de la démonstration est terminée.

§ 2.

L'hypothèse relative au domaine d'holomorphie que caractérise (5), entraîne pour F la conséquence d'avoir, en valeur absolue, tous les coefficients numériques de son développement au plus égaux à l'unité.

Les coefficients numériques dans g_1 et φ_1 sont par conséquent, en valeur absolue, au plus égaux à la quantité positive

$$A_1 = 1 . \tag{11}$$

Passons à la seconde égalité (10), et considérons dans son second membre le produit $g_1 \varphi_1$. Au préalable, posons

$$u = x_1 + x_2 + \dots + x_n . \tag{12}$$

Un polynôme majorant de g_1 sera, tout calcul effectué,

$$\overline{g_1} = A_1 u \, (1 + z + z^2 + \dots + z^{m-1})$$

tandis que

$$\overline{\varphi_1} = A_1 u \, (1 + z + z^2 + \dots)$$

sera, de la même façon, série majorante de φ_1.

Par multiplication, on voit que l'expression

$$m A_1^2 \, u^2 \, (1 + z + z^2 + \dots)$$

est ainsi majorante du produit $g_1 \varphi_1$.

D'un autre côté, les coefficients numériques dans f_2, sont en valeur absolue au plus égaux à l'unité, il en résulte que le second membre de la seconde égalité (10) est majoré par une expression analogue à celle qui majore le produit $g_1\varphi_1$, mais où mA_1^2 est à remplacer par

$$A_2 = 1 + m A_1^2 .$$

D'une manière générale, en prenant

$$A_k = 1 + m \, (A_1 A_{k-1} + A_2 A_{k-2} + \dots + A_{k-1} A_1) \tag{13}$$

($k = 3, 4, \ldots$), on aura, avec le produit $A_k u^k$, et pour $k > 2$, une expression majorant les coefficients, fonctions des (x), des différentes puissances de z, dans g_k et φ_k.

Ceci dit, formons la série

$$U = U(u) = A_1 u + A_2 u^2 + \ldots + A_k u^k + \ldots$$

convergente pour

(14) $$|u| < \alpha\,,$$

où α désigne une certaine quantité positive, finie et différente de zéro, d'ailleurs bien déterminée.

La série U représente, en effet, à cause de (11) et (13), celle des racines de l'équation

$$mU^2 - U + \frac{u}{1-u} = 0\,,$$

dont la valeur pour $u = 0$, est égale à zéro.

En supposant dans $U(u)$, u remplacé par son expression (12), on voit ensuite que les deux séries en z et en (x),

(15) $$\begin{cases} \overline{G} = z^m + U\,.\,(1 + z + z^2 + \ldots + z^{m-1}) \\ \overline{\Phi} = 1 \quad + U\,.\,(1 + z + z^2 + \ldots) \end{cases}$$

convergent, à cause de (12) et (14), dans une certaine étendue autour du point (1). Comme elles sont respectivement majorantes des séries G et Φ, celles-ci convergent également au voisinage de (1).

§ 3.

La validité de la relation (3) peut être considérée comme complètement établie.

Pour obtenir, F étant donnée, le second membre de (3), il n'y a qu'à multiplier F par la série entière qui correspond à φ^{-1}, puis à opérer la décomposition conformément au § 1. On en déduit immédiatement, après une multiplication par φ, la décomposition effective (3).

Mais, on peut opérer autrement, et obtenir le même résultat.

Bien que F soit maintenant de la forme

$$F = z^m \varphi(z) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z;(x)),$$

on peut procéder encore de la même manière qu'au § 1.

On prend pour G une expression identique à celle qui figure au deuxième membre de (7), et pour Φ la même que celle qui figure au deuxième membre de (8), avec cette seule différence du nombre 1 remplacé par $\varphi(z)$.

Dans F, G et Φ, les f_k, g_k et φ_k conservent la même signification que plus haut.

Pour que l'égalité (9), qui n'est qu'une autre forme de (3), soit ensuite identiquement satisfaite, il faut et il suffit qu'un système d'équations analogues aux équations (10) et dont la première s'écrit maintenant

$$g_1 \cdot \varphi + z^m \cdot \varphi_1 = f_1 , \tag{16}$$

soit également satisfait.

(16) se résoud facilement par rapport aux fonctions inconnues g_1 et φ_1, car g_1 doit être en z un polynôme de degré $m-1$ au plus. Il suffit pour résoudre (16) d'utiliser la méthode des coefficients indéterminés, ces derniers étant les polynômes homogènes en (x), facteurs des différentes puissances de z dans g_1 et φ_1.

Les g_k et φ_k se déterminent ensuite, de proche en proche, d'une manière analogue.

Lorsque F est de degré limité en z, c'est-à-dire pseudopolynôme en z, ou même polynôme entier relativement à l'ensemble des variables z et (x), les choses ne se passent pas autrement.

Mais, si F est en z de degré au plus égal à $m+p$, φ se trouve être de degré au plus égal à p. Le degré de φ_1 dans (16), à cause du degré de g_1 au plus égal à $m-1$ ne peut donc surpasser p. On verrait qu'il en est de même des degrés en z des φ_k.

Si donc, au premier membre de (3), F est de degré en z égal à $m+p$, Φ, au second, sera lui-même en z de degré égal à p [1].

[1] Pour la bibliographie générale du sujet, voir OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. II, 1er fascicule, 2e édition, 1925, p. 86. Teubner, Leipzig.
Voir aussi dans le tome 158 du «Journal de Crelle», année 1927, le mémoire de W. WIRTINGER, *Ueber den Weierstrass'schen Vorbereitungssatz*.