Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques

Autor(en): **Eckmann, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **63 (1945-1948)**

Heft 264

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-273562

Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques

PAR

B. ECKMANN

(Séance du 24 janvier 1945)

Il s'agit dans ce qui suit de deux problèmes simples et élémentaires : le premier est le problème classique de la répartition du courant électrique continu dans un réseau de conducteurs, répartition qui obéit aux deux lois de Kirchhoff ; le second est un problème aux limites pour des fonctions discrètes harmoniques dans un réseau.

Ces deux problèmes sont indépendants, mais seront traités par la même *méthode* appartenant à la *topologie combinatoire des réseaux* (ou polyèdres à une dimension) et se basant en première ligne sur une *projection orthogonale* dans certains espaces vectoriels.

Cette application du formalisme de la topologie combinatoire moderne dans le cas le plus simple, celui des polyèdres à une dimension, peut être généralisée aux polyèdres à un nombre quelconque de dimensions ; on constate alors que les mêmes raisonnements et leurs généralisations naturelles conduisent à des relations qui sont fondamentales pour toute la topologie. Nous resterons toujours ici dans le cas d'*une* dimension ; les généralisations sont traitées ailleurs [1].

Dans la première partie nous résumons les éléments de la théorie des réseaux et du formalisme nécessaire pour la suite, en nous bornant toujours à des réseaux *finis*. La seconde partie est consacrée au problème de Kirchhoff, la troisième au problème relatif à des fonctions harmoniques dans un réseau.

[1] B. ECKMANN : *Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex.* Commentarii mathematici helvetici 17 (1945), sous presse.

Les réseaux.

1. Nous considérons un réseau [1] (ou « complexe à une dimension » ou « graphe »), formé par β *sommets* $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$ et α *arêtes* $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ joignant certains couples de sommets ; nous supposons ces arêtes orientées d'une façon arbitraire mais fixe — cela veut dire que pour toute arête x_i l'un des deux sommets qu'elle joint est considéré comme origine, l'autre comme extrémité de x_i. Nous désignons par η_{ik} le *coefficient d'incidence* du sommet y_k et de l'arête x_i ; il est égal à $+1, -1$ ou 0 suivant que y_k est l'extrémité de x_i, l'origine de x_i ou n'est pas du tout situé sur x_i. Ces coefficients d'incidence contiennent tout ce qui nous intéresse dans le réseau.

2. *Chaînes.* Une chaîne B à 0 dimensions (ou « 0-chaîne ») dans le réseau est une forme linéaire

$$\mathrm{B} = \sum_{k=1}^{\beta} b_k y_k$$

à coefficients réels en $y_1, y_2, \ldots, y_\beta$, considérés ici comme des indéterminées; on peut aussi dire que c'est une fonction g faisant correspondre à tout sommet y_k un nombre réel $b_k = g(y_k)$.

Une chaîne A à une dimension (ou « 1-chaîne ») est une forme linéaire

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i y_i\,,$$

ou bien une fonction g des arêtes orientées qui fait correspondre à x_i le nombre réel $a_i = g(x_i)$.

On peut aussi considérer les 0-chaînes B comme *vecteurs* à β composantes $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$, et les 1-chaînes A comme vecteurs à α composantes $a_1, a_2, \ldots a_\alpha$; si on opère avec les chaînes comme on le fait avec des formes linéaires ou des vecteurs, les 0-chaînes forment un *espace vectoriel réel* V^0 de rang β, les 1-chaînes un espace vectoriel V^1 de rang α. Nous formerons dans ces espaces des *produits scalaires* définis comme d'habitude ; le produit scalaire de deux 1-chaînes $\mathrm{A} = \Sigma\, a_i x_i$ et $\mathrm{A}' = \Sigma\, a'_i x_i$ est donné par

$$\mathrm{A} \,.\, \mathrm{A}' = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i a'\,. \tag{1}$$

[1] Pour les définitions et les propriétés élémentaires des réseaux non explicitement mentionnées dans notre texte, voir le chap. I du livre de D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig 1936). Cet ouvrage sera désigné ici par König.

Nous dirons aussi que ce produit représente la *valeur* de A considérée comme fonction des arêtes orientées, sur la chaîne A′ considérée comme figure géométrique (domaine d'intégration). Dans l'espace V^0 on a les définitions analogues.

La valeur ainsi définie d'une 1-chaîne $A = \Sigma a_i x_i$ sur l'arête orientée x_i est a_i, sur $-x_i$ elle est $-a_i$; on convient d'entendre par $-x_i$ l'autre orientation de x_i, et on peut dire que les valeurs d'une 1-chaîne changent de signe, si on change l'orientation des arêtes.

Deux chaînes de produit scalaire 0 sont dites *orthogonales*.

3. *Projection orthogonale.* Soit U^1 un sous-espace linéaire — nous dirons tout court un *plan* — de rang γ de l'espace vectoriel V^1. D'après les éléments de la géométrie analytique des espaces vectoriels il correspond à toute chaîne A de V^1 *une et une seule* chaîne A′ de U^1 telle que A—A′ soit *orthogonale* au plan U^1, c. à. d. à toutes les chaînes de U^1 ; A′ est la *projection orthogonale* de A sur le plan U^1.

Si, dans une base vectorielle orthogonale et normée de V^1 les composantes de A sont $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_\alpha$, celles de A′ $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_\alpha$, on peut exprimer les $\bar{a}'_i$ en fonction des $\bar{a}_i$ par des formes linéaires

$$\bar{a}'_i = \sum_{j=1}^{\alpha} u_{ij} \bar{a}_j \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, \alpha \,,$$

avec des coefficients réels u_{ij} qui forment une matrice *symétrique* : $u_{ij} = u_{ji}$. En effet, c'est le cas pour une base telle que U^1 y soit le plan déterminé par les γ premiers vecteurs de base, car on a alors

$$\begin{aligned} \bar{a}'_i &= \bar{a}_i && \text{pour } i = 1, 2, \ldots, \gamma, \\ \bar{a}'_i &= 0 && \text{pour } i = \gamma + 1, \ldots, \alpha; \end{aligned}$$

or cette propriété de symétrie n'est pas modifiée, si on passe d'une base orthogonale et normée à une autre.

4. *Frontière et faisceau.*

Définitions. La *frontière* fx *d'une arête* x d'origine y_1 et d'extrémité y_2 est la 0-chaîne $y_2 - y_1$; à l'aide des coefficients d'incidence η_{ik} (voir N° 1) on peut écrire de façon générale

$$fx_i = \sum_{k=1}^{\beta} \eta_{ik} y_k \,, \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, \alpha \,.$$

Le faisceau φy *d'un sommet* y est la 1-chaîne formée par toutes les arêtes $\pm x_i$ dont y est l'extrémité, c. à. d.

$$\varphi y_k = \sum_{i=1}^{\alpha} \eta_{ik} x_i\,, \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, \beta\,.$$

La frontière d'une 1-chaîne $A = \Sigma\, a_i x_i$ et le faisceau d'une 0-chaîne $B = \Sigma\, b_k y_k$ sont définis par

$$fA = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i\, f x_i = \sum_{k=1}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^{\alpha} \eta_{ik}\, a_i \right) y_k\,,$$

$$\varphi B = \sum_{k=1}^{\beta} b_k\, \varphi y_k = \sum_{i=1}^{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\beta} \eta_{ik}\, b_k \right) x_i\,.$$

Les frontières de toutes les 1-chaînes forment un sous-espace linéaire (un plan) F^0 dans V^0, les faisceaux de toutes les 0-chaînes un plan F^1 dans V^1.

Une 1-chaîne A dont la frontière est nulle est appelée un *cycle,* une 0-chaîne B dont le faisceau est nul un *cocycle.* Les cycles forment un plan C^1 dans V^1, les cocycles un plan C^0 dans V^0.

5. Pour une arête x_i et un sommet y_k quelconques on a

$$\varphi y_k \,.\, x_i = \sum_{j=1}^{\alpha} \eta_{jk} x_j \,.\, x_i = \eta_{ik}\,,$$

et

$$y_k \,.\, f x_i = \sum_{j=1}^{\beta} \eta_{ij}\, y_j \,.\, y_k = \eta_{ik}\,.$$

donc

$$\varphi y_k \,.\, x_i = y_k \,.\, f x_i$$

et pour toute 1-chaîne A et 0-chaîne B

$$\varphi B \,.\, A = B \,.\, fA\,. \tag{2}$$

De cette formule importante on tire facilement les conclusions suivantes : *Pour qu'une 1-chaîne A soit un cycle, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à tous les faisceaux, et pour qu'une 0-chaîne B soit un cocycle, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toutes les frontières.* En effet : Si $fA = 0$, $\varphi\, B.\, A = 0$ pour toute chaîne B ; et si $\varphi\, B.\, A = 0$ pour toute chaîne B, alors B . $fA = 0$ pour toute chaîne B, donc $fA = 0$. La seconde partie de la proposition se démontre de la même façon.

En d'autres termes : C^1 est l'ensemble des chaînes de V^1 orthogonales à F^1. Mais une telle relation est toujours symétrique ; F^1 est donc l'ensemble des chaînes de V^1 orthogonales à C^1. Nous dirons que C^1 et F^1 sont *deux plans orthogonaux et complémentaires* dans V^1. — C^0 et F^0 sont de la même façon deux plans orthogonaux et complémentaires dans V^0.

6. Remarques sur les cycles et les cocycles.

Considérons un *polygone fermé* simple dans le réseau, parcouru une fois dans un sens déterminé ; nous lui associons la chaîne

$$P = \sum_{i=1}^{\alpha} p_i x_i ,$$

où $p_i = 0$ pour les arêtes n'appartenant pas au polygone et $p_i = +1$ ou -1 pour les arêtes du polygone suivant que le sens de parcours du polygone coïncide ou non avec l'orientation de x_i. Alors on voit facilement que P est un cycle, et on sait [1] que tout cycle est une combinaison linéaire à coefficients réels de chaînes P de ce type associées à des polygones.

Un *cocycle* $B = \Sigma b_k y_k$ est caractérisé par la propriété que sa valeur est 0 sur toute frontière $fx_i = y_{k_1} - y_{k_2}$ du réseau, donc que $b_{k_1} = b_{k_2}$; il a la même valeur en deux sommets *voisins* (c. à. d. joints par une arête), et il a donc également la même valeur en deux sommets qui peuvent être joints par un *chemin* [2] (un polygone ouvert ou une « suite d'arêtes » dans le réseau). Si dans un réseau tout couple de sommets peut être joint par un chemin, on dit que le réseau est *connexe* [2] ; alors la valeur d'un cocycle est la même en tous les sommets du réseau (B est une « constante »). Si le réseau n'est pas connexe, il peut être décomposé en un nombre fini de *composants* [2] connexes ; *les cocycles sont les 0-chaînes de valeur constante dans chaque composant du réseau.*

Pour qu'une 0-chaîne B soit une frontière $B = fA$, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à tous les cocycles. Soit B_0 un cocycle de valeur 1 en tout sommet d'un certain composant du réseau, 0 dans les autres ; B. B_0 est la somme des coefficients de B dans ce composant, et elle doit être nulle. Si réci-

[1] Voir König, p. 123, théorème 1.
[2] Voir König, chap. I.

proquement la somme des coefficients d'une 0-chaîne B est nulle dans chaque composant du réseau, B est orthogonale au plan C^0 des cocycles, donc une frontière. *Pour qu'une 0-chaîne B soit une frontière, il faut et il suffit que la somme de ses coefficients soit nulle dans chaque composant du réseau.*

7. *Chaîne de frontière donnée.*

Soit B une 0-chaîne vérifiant la condition que nous venons d'énoncer, et soit E une 1-chaîne arbitraire. Alors *il existe toujours une et une seule chaîne S de frontière B et telle que E—S soit orthogonale à tous les cycles.*

Démonstration. Soit A une chaîne de frontière B, et soient A′ et E′ les projections orthogonales de A et E dans le plan C^1 des cycles. Alors

$$S = E' + A - A'$$

a les propriétés exigées. En effet

$$fS = fE' + fA - fA' = fA = B$$

et

$$E - S = (E - E') - (A - A')$$

est orthogonale à C^1. Soit S_1 une seconde solution vérifiant les deux conditions ; alors

$$f\,(S - S_1) = fS - fS_1 = 0$$

et

$$S - S_1 = (E - S_1) - (E - S),$$

c. à. d. $S - S_1$ est un cycle orthogonal au plan C^1 de tous les cycles, donc $S - S_1 = 0$: la solution S est unique.

Répartition du courant électrique dans un réseau de conducteurs.

8. *Lois de Kirchhoff.* Le courant électrique en régime permanent dans un réseau de conducteurs obéit aux deux lois suivantes : 1° En tout point de ramification du réseau la somme des courants qui affluent vers ce point est nulle. 2° Le long de tout circuit fermé dans le réseau la somme des forces électromotrices est égale à la somme des chutes ohmiques du potentiel.

Si les forces électromotrices et les résistances des conducteurs sont données, il existe toujours une et une seule répartition du courant dans le réseau vérifiant ces deux lois ; en d'autres termes : ces conditions sont toujours compatibles et suffisent pour déterminer les intensités du courant.

Ce théorème important, énoncé déjà par Kirchhoff sans démonstration complète, a été démontré pour la première fois en 1923 par H. Weyl [1]. Les remarques que nous venons de faire sur les réseaux nous permettent de donner une démonstration très simple de ce théorème, pas très différente d'ailleurs de celle donnée par Weyl, et d'y ajouter quelques propriétés de la répartition du courant.

9. Soit R un réseau (abstrait) représentant le réseau de conducteurs ; les arêtes x_i de R correspondent aux conducteurs (p. ex. à des fils métalliques), les sommets y_k aux points de ramification [2]. Soit $r_i > 0$ la résistance ohmique de x_i, *et* e_i la force électromotrice introduite sur x_i mesurée dans le sens de x_i, et soit s_i l'intensité du courant sur x_i, prise avec le signe $+$ si la direction du courant est celle de x_i, avec le signe $-$ dans l'autre cas. A la répartition du courant nous faisons correspondre la chaîne

$$S = \sum_{i=1}^{\alpha} s_i x_i \,,$$

aux forces électromotrices la chaîne

$$E = \sum_{i=1}^{\alpha} e'_i x_i$$

avec $e'_i = \dfrac{e_i}{r_i}$ (se présentant mieux aux calculs que $\Sigma\, e_i x_i$).

Alors la première loi de Kirchhoff exprime que la valeur de S est nulle sur tout faisceau φy_k du réseau, c. à. d. que *S est un cycle*. Pour formuler la seconde, considérons une chaîne $P = \Sigma\, p_i x_i$ associée à un polygone fermé simple (n° 6) ; $\Sigma\, p_i s_i r_i$ est la somme des chutes ohmiques du potentiel, $\Sigma\, p_i e_i$ la somme des forces électromotrices sur le polygone, les deux mesurées dans le sens de parcours du polygone, et il faut qu'on ait

[1] H. Weyl : *Repartilión de corriente en una red conductora,* Revista matemática Hispano-Americana 5 (1923), p. 153-164.

[2] Naturellement il n'est pas exclu qu'en un sommet il n'y ait que deux arêtes ; les sommets du réseau peuvent être des points auxiliaires qui subdivisent un conducteur en plusieurs arêtes.

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_i e_i = \sum_{i=1}^{\alpha} p_i s_i r_i$$

ou
$$\sum_{i=1}^{\alpha} r_i p_i (e'_i - s_i) = 0 \,. \tag{3}$$

Il est indiqué de modifier ici légèrement la définition (1) du produit scalaire et de poser pour $A = \Sigma\, a_i x_i$, $A' = \Sigma\, a'_i x_i$

$$A \circ A' = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i a_i a'_i : \tag{4}$$

pour ce produit scalaire toutes les propriétés relatives à la projection orthogonale (n° 3) subsistent, parce que les r_i sont positifs et en conséquence la forme quadratique $A \circ A$ est définie positive [1]. Avec cette convention (3) peut s'écrire

$$P \circ (E - S) = 0 \,;$$

la seconde loi de Kirchhoff exige donc que $E - S$ soit orthogonale [1] à tout polygone P et, puisque tout cycle est une combinaison linéaire de polygones P, à tout cycle du réseau.

Le problème qui consiste à déterminer le courant S par les deux lois de Kirchhoff s'énonce donc ainsi :

Etant donnée la chaîne E des forces électromotrices, on cherche un cycle S tel que $E - S$ soit orthogonal au plan C^1 des cycles.

Ce problème possède toujours une et une seule solution : *S est la projection orthogonale de E sur le plan C des cycles.* Le théorème de Kirchhoff est ainsi démontré.

10. Choisissons une base $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_\alpha$ de l'espace vectotiel V^1, *orthogonale et normée par rapport au produit scalaire* (4), en posant

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{\sqrt{r_i}} \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, \alpha \,,$$

et soient $\bar{s}_i$ et $\bar{e}_i$ les composantes de S et de E dans cette base :

[1] Aux n^{os} 9-11 «orthogonal» signifie toujours orthogonal par rapport au produit scalaire $\circ$ défini par (4).

$$\bar{s}_i = \sqrt{r_i}\, s_i \,,$$

$$\bar{e}_i = \sqrt{r_i}\, e'_i = \frac{e_i}{\sqrt{r_i}} \,.$$

Alors les $\bar{s}_i$ s'expriment en fonction des $\bar{e}_i$ par des formes

$$\bar{s}_i = \sum_{j=1}^{\alpha} u_{ij} \bar{e}_j \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, \alpha \,.$$

avec $u_{ij} = u_{ji}$; d'où

$$\sqrt{r_i}\, s_i = \sum_{j=1}^{\alpha} u_{ij} \frac{e_i}{\sqrt{r_j}} \,,$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{u_{ij}}{\sqrt{r_i r_j}}\, e_j = \sum_{j=1}^{\alpha} v_{ij} e_j \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, \alpha \,.$$

où les v_{ij} forment une matrice symétrique.

Dans la solution explicite $s_i = \Sigma\, v_{ij}\, e_j$ *du problème de Kirchhoff les coefficients* v_{ij} *forment une matrice symétrique.* Cela signifie : Si la force électromotrice est 1 en x_j et 0 ailleurs, on a en x_i la même intensité de courant qu'on aurait en x_j, si la force électromotrice était 1 en x_i et 0 ailleurs.

11. *Une généralisation.* Supposons qu'on ait introduit aux points de ramification y_k du réseau R, par des conducteurs n'appartenant pas à R, des *courants d'intensités données* b_k, et qu'on cherche toujours la répartition du courant dans R vérifiant les lois de Kirchhoff. Alors la condition énoncée par la seconde loi n'est pas modifiée ; mais la condition imposée par la première au courant S dans le réseau R prend la forme suivante : En tout sommet y_k, la valeur [1] de S sur le faisceau φy_k augmentée de b_k doit être nulle :

$$S \,.\, \varphi y_k + b_k = 0 \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, \beta \,.$$

D'après la formule (2), cela signifie que

$$fS \,.\, y_k = -b_k \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, \beta \,,$$

[1] Ici il s'agit du produit scalaire ordinaire défini par (1) et désigné par A . A'.

ou $$fS = -B,$$

si on désigne par B la 0-chaîne $\Sigma\, b_k\, y_k$ donnée.

E et B étant données, on cherche donc ici une chaîne S de frontière donnée — B telle que E — S soit orthogonale à tous les cycles du réseau.

Cela n'est possible (n° 6) que lorsque la somme des coefficients de B est nulle dans chaque composant du réseau, c. à. d. que le courant total introduit dans chaque composant est nul. Mais si c'est le cas, il existe, d'après le résultat du n° 7, toujours *une et une seule solution S*, et le théorème de Kirchhoff reste valable.

Fonctions harmoniques.

12. Nous considérons une 0-chaîne $B = \Sigma\, b_k\, y_k$ dans un réseau R comme *fonction g des sommets* faisant correspondre au sommet y_k le nombre réel $g(y_k) = b_k$. Une telle fonction sera dite *harmonique* en un sommet y_k, *si sa valeur en y_k est égale à la moyenne arithmétique des valeurs aux sommets voisins de y_k* ; par sommet voisin de y_k on entend tout sommet qui est joint à y_k par une arête du réseau. (Evidemment il s'agit dans cette définition d'une analogie avec une propriété bien connue des fonctions harmoniques continues.)

Pour les fonctions harmoniques dans le réseau R nous posons le problème aux limites suivant :

P) *On donne les valeurs d'une fonction g en certains sommets du réseau — désignons l'ensemble de ces sommets par L — ; on cherche à déterminer les valeurs de g aux autres sommets de R — soit M leur ensemble — de telle façon qu'en tout sommet de M la fonction g soit harmonique.*

Exemple : Soit R une partie finie du réseau quadratique du plan ; on donne les valeurs d'une fonction sur le bord et on les cherche à l'intérieur de telle façon que la fonction y soit harmonique.

Nous démontrerons que le problème général P) admet toujours une solution, et que cette solution est *unique* lorsque l'ensemble L où on donne les valeurs de la fonction contient au moins un point de chaque composant du réseau, et seulement en ce cas.

13. Soient dans le réseau $y_2, y_3, \ldots, y_l$ les voisins du sommet y_1 ; la fonction g ou la chaîne $B = \Sigma\, b_k\, y_k$ est harmonique en y_1, lorsque

$$b_1 = \frac{b_2 + b_3 + \ldots + b_l}{l - 1},$$

ou bien

$$b_2 - b_1 + b_3 - b_1 + \ldots + b_l - b_1 = 0.$$

Remarquons que la frontière du faisceau de y_1 est

$$f\varphi y_1 = y_2 - y_1 + y_3 - y_1 + \ldots + y_l - y_1$$

et que $\quad B.\, f\varphi y_1 = b_2 - b_1 + b_3 - b_l + \ldots + b_l - b_1.$

Dire qu'une chaîne B est harmonique en un point revient donc à dire que sa valeur sur la frontière du faisceau de ce point est nulle.

On peut donc formuler le problème P) de la façon suivante : Les valeurs d'une chaîne B sont données aux sommets de L et cherchées aux sommets de M de telle façon que pour tout sommet y_k de M

$$B.\, f\varphi y_k = 0.$$

D'après la formule (2) cela équivaut à

$$\varphi B.\, \varphi y_k = 0.$$

Décomposons encore B en une somme

$$B = B_L + B_M$$

d'une chaîne B_L de L et d'une chaîne B_M de M (cela veut dire que dans B_L les coefficients des sommets de M sont tous 0 et dans B_M ceux de L). B_L est donnée, B_M est cherchée.

14. Démontrons d'abord, que P) possède toujours une solution B (ou B_M). On cherche B_M telle que

$$\varphi\,(B_L + B_M)\,.\,\varphi y_k = 0 \tag{5}$$

pour tout sommet y_k de M. Considérons dans l'espace vectoriel V^1 le plan F^1 formé par tous les faisceaux ; il contient le plan F^1_M de *tous les faisceaux des chaînes de M*. (5) exprime que $\varphi B_L + \varphi B_M$ doit être orthogonal à F^1_M : φB_L étant donné, on cherche une chaîne φB_M de F^1_M telle que $\varphi B_L + \varphi B_M$ soit orthogonale à F^1_M : φB_M *est la projection orthogonale de* $-\varphi B_L$ *sur le plan* F^1_M, projection qui existe toujours et qui est bien déterminée. Puisque cette projection appartient à F^1_M, elle est effectivement le faisceau d'une chaîne B_M, qui est une solution du problème.

15. Comme nous venons de voir, B_M n'est en général pas déterminée d'une façon univoque par P), mais seulement φB_M. Pour que B_M aussi soit bien déterminée, il faut et il suffit que

$$\varphi B_M = \varphi B'_M$$

entraîne

$$B_M = B'_M,$$

c. à. d., si on pose $B_M - B'_M = D_M$, que $\varphi D_M = 0$ entraîne $D_M = 0$.

Pour que le problème P) n'ait qu'une seule solution B, il faut donc et il suffit que *la seule chaîne D_M de M qui est un cocycle du réseau soit $D_M = 0$.* En d'autres termes qu'une 0-chaîne D répondant aux deux conditions suivantes a) et b) soit nécessairement nulle :

a) les coefficients de D sont 0 pour les sommets de L ;

b) la valeur de D est constante dans chaque composant du réseau (d'après n° 6).

Or cela signifie tout simplement que *L contient au moins un sommet de chaque composant du réseau,* et l'affirmation énoncée au n° 12 sur le problème aux limites P) est démontrée.