Quelques remarques au sujet de l'élasticité

Autor(en): **Mercier, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **64 (1948-1950)**

Heft 273

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-273967

Quelques remarques au sujet de l'élasticité

PAR

R. MERCIER

(Séance du 17 novembre 1948)

La théorie de l'élasticité est certainement l'une des mieux assises et des plus anciennes de la physique. En effet, l'une de ses lois fondamentales, que l'on doit à Robert Hooke, date du 17e siècle et depuis lors elle constitue l'une des bases de la théorie mathématique des solides parfaits, théorie bien connue des mathématiciens, des physiciens et des ingénieurs. Toutefois, malgré les formes élégantes et classiques que lui ont données les Lamé (1852), les Thomson et Tait (1866), cette doctrine peut encore donner des sujets de réflexion.

On sait que l'analyse du mouvement dans les environs d'un point quelconque d'un continu conduit à y distinguer la superposition d'une translation, d'une rotation (tourbillon) et d'une déformation pure. Les deux premiers éléments se retrouvent dans l'étude du continu rigide (solide invariable ou rigide) tandis que le dernier est propre au système déformable. La description de cette déformation pure fait ressortir les rôles de l'allongement spécifique et des déformations angulaires. C'est le *tenseur des déformations* qui caractérise en première approximation la distribution des déplacements relatifs des points voisins autour de l'un d'entre eux. Utilisant un trièdre cartésien de référence, ce tenseur est composé

des 3 allongements spécifiques e_{11}, e_{22} et e_{33}
des strictions spécifiques e_{12}, e_{23} et e_{31}

Les strictions e_{12}, e_{23} et e_{31} mesurent aussi la moitié des déformations angulaires d'un parallélipipède élémentaire aux arêtes initialement parallèles aux axes cartésiens. On peut encore y noter l'allongement moyen $\bar{e}$ et la dilatation spécifique $3\bar{e}$.

D'autre part, l'analyse des forces intérieures qui peuvent s'exercer mutuellement entre éléments voisins séparés par des surfaces élémentaires conduit à considérer un autre tenseur à

6 composantes. Utilisant le même système d'axes cartésiens et des surfaces qui lui seront normales, on introduit les tensions

normales σ_{11}, σ_{22} et σ_{33}
et tangentielles τ_{12}, τ_{23} et τ_{31}

Une notion, qui s'introduit tout naturellement dans la théorie des fluides, et qui peut également être utilisée ici est celle de la tension moyenne σ qui sera la pression moyenne multipliée par moins 1.

Les hypothèses de base de la théorie de l'élasticité classique du solide isotrope consistent à admettre que :

1. si toutes les déformations s'annulent, il en est de même des tensions;

2. si dans un système d'axes (dit principal de déformation) les strictions sont nulles, il en sera de même des tensions tangentielles (et le référentiel est aussi principal pour les tensions).

En postulant encore que les déformations doivent être des fonctions linéaires des tensions, on est conduit au système de relations suivantes, valables dans tout référentiel :

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+m}\left\{ e_{11} + \frac{m}{1\text{-}2\,m}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} \qquad \tau_{12} = \frac{E}{1+m} e_{12}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1+m}\left\{ e_{22} + \frac{m}{1\text{-}2\,m}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} \qquad \tau_{23} = \frac{E}{1+m} e_{23}$$

$$\sigma_{33} = \frac{E}{1+m}\left\{ e_{33} + \frac{m}{1\text{-}2\,m}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} \qquad \tau_{31} = \frac{E}{1+m} e_{31}$$

Ces relations contiennent deux constantes indépendantes, E et m. La première est le module d'Young, la seconde le module de Poisson. Rappelons rapidement leur signification. Lorsqu'en un point, le solide élastique n'est sollicité que par des tensions normales, parallèles à une seule direction, l'allongement spécifique dans cette direction est proportionnel à cette tension normale et 1/E est précisément le facteur de proportionnalité. Simultanément, des allongements de signe contraire existent pour les deux directions orthogonales et leur valeur spécifique est proportionnelle à la première, m étant le facteur de proportionnalité (cœfficient de contraction latérale).

$$\sigma_{11} = Ee_{11} \qquad e_{22} = -\,me_{11} \qquad e_{33} = -\,me_{11}$$
$$e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0$$

Or, dans le cas de sollicitation quelconque, il est facile d'établir que l'allongement spécifique moyen $\bar{e}$ est proportionnel à la tension moyenne $\bar{\sigma}$ et qu'il en est de même alors de la dilatation spécifique $3\,\bar{e} = \theta$.

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1\text{-}2\,m}\,\bar{e} = \frac{E}{3\,(1\text{-}2m)}\,\theta$$

Le coefficient $\varkappa = \dfrac{3\,(1\text{-}2m)}{E}$ est appelé coefficient de compressibilité.

Si un solide est déformable mais incompressible, ce cœfficient doit s'annuler, ce qui n'est possible que si le module de Poisson m vaut $1/2$. Ainsi, *pour un solide élastique, la condition d'incompressibilité est que le module de Poisson soit égal à* $1/2$.

Or, il est possible d'étendre cette terminologie aux fluides. Mais alors, à l'état permanent (état d'équilibre) les tensions normales sont égales (et négatives) et leur valeur commune est la *pression* p au point considéré.

Pour ne pas avoir de difficultés mathématiques, écrivons les relations tensions-déformations en substituant à E le cœfficient de compressibilité :

$$\sigma_{11} = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\left\{e_{11} + \frac{m}{1\text{-}2\,m}\,(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} \qquad \tau_{12} = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\,e_{12}$$

$$\sigma_{22} = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\left\{e_{22} + \frac{m}{1\text{-}2\,m}\,(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} \qquad \tau_{23} = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\,e_{23}$$

$$\sigma_{33} = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\left\{e_{33} + \frac{m}{1\text{-}2\,m}\,(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right\} \qquad \tau_{31} = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\,e_{31}$$

Considérons alors un fluide enfermé dans un cylindre fermé par un piston et utilisons un référentiel dont le premier axe est parallèle à celui du cylindre. Lors d'une compression du fluide, supposé compressible, tous les déplacements sont parallèles à cet axe. Les formules générales de l'élasticité prennent la forme suivante :

$$\sigma_{11} = -\,p = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\left\{\frac{1\text{-}m}{1\text{-}2\,m}\,e_{11}\right\}$$

$$\sigma_{22} = -\,p = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\left\{\frac{m}{1\text{-}2\,m}\,e_{11}\right\}$$

$$\sigma_{33} = -\,p = \frac{3\,(1\text{-}2m)}{\varkappa\,(1+m)}\left\{\frac{m}{1\text{-}2\,m}\,e_{11}\right\}$$

On voit immédiatement que ces équations ne sont compatibles que si $m = 1/2$. Ainsi *pour les fluides, la condition de compressibilité est que leur module de Poisson soit égal à* $1/2$, en opposition avec le cas des solides.

De plus, cette condition étant satisfaite, les tensions tangentielles seront identiquement nulles, même s'il n'y a pas équilibre. On se rend compte facilement du fait que les fluides parfaits sont caractérisés par un module d'Young qui est nul; c'est la raison pour laquelle il convient, dans leur cas, d'écrire les relations tensions-déformations en introduisant $\varkappa$.

Une seconde remarque intéressante au sujet du solide élastique peut se faire en cherchant l'expression des excès des tensions normales sur leur moyenne $\bar{\sigma}$. Nous le ferons en mettant en évidence le module de glissement G, défini par

$$G = \frac{E}{2\,(1+m)}$$

Il mesure le quotient constant de la tension tangentielle par la striction (déformation angulaire) correspondante. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \bar{\sigma} &= 2\,G\,(e_{11} - \bar{e}) & \tau_{12} &= 2\,G\,e_{12} \\ \sigma_{22} - \bar{\sigma} &= 2\,G\,(e_{22} - \bar{e}) & \tau_{23} &= 2\,G\,e_{23} \\ \sigma_{33} - \bar{\sigma} &= 2\,G\,(e_{33} - \bar{e}) & \tau_{31} &= 2\,G\,e_{31} \end{aligned}$$

auxquelles équations il convient d'adjoindre la relation

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\varkappa}\,3\,\bar{e}$$

On distingue alors immédiatement le rôle particulier de chacun des cœfficients $\varkappa$ et G. On peut dire que le cœfficient de glissement G, qui mesure l'importance de la rigidité de forme du solide, est responsable, non seulement de l'existence des tensions tangentielles, mais encore des écarts que présentent les tensions normales sur leur valeur moyenne. Cette remarque justifie l'emploi systématique du module de glissement que fait l'auteur [1] dans une autre étude relative à la propagation des ultrasons dans les solides.

[1] R. Mercier, *Bull. Soc. vaud. Sc. nat.*, Vol. 64, N° 272, 1948.