

Mathématique et culture

Autor(en): **Delessert, André**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **71 (1971-1973)**

Heft 340

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-276305>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mathématique et culture

PAR

ANDRÉ DELESSERT

Le texte qui suit est rédigé à partir des notes préparées pour une conférence prononcée le 26 janvier 1972, à l'Aula du Palais de Rumine, Lausanne, sous l'égide de la Société académique vaudoise et de la Société vaudoise des sciences naturelles. Le lecteur y retrouvera donc tout ce qu'un tel exposé peut avoir de sommaire.

Accoler le terme de « mathématique », qui n'évoque rien de bien clair à la plupart des gens, et celui de « culture », qui éveille chez chacun une idée très précise mais absolument incommunicable, c'est probablement abuser du droit qu'on a de choisir un titre tapageur et paradoxal. Du moins le lecteur sait-il qu'il ne trouvera pas ici une présentation des thèmes de recherche du mathématicien d'aujourd'hui. En revanche, il sera mis en présence de faits et de réflexions qui l'aideront peut-être à situer l'attitude, la démarche mathématiques sur ce qu'on peut appeler son horizon culturel.

Dans ses conversations avec les chercheurs expérimentaux, avec les critiques ou les créateurs en littérature et en art, le mathématicien s'attirait jadis la sorte de condescendance narquoise qu'on accorde à un maniaque inoffensif. Il peut déceler aujourd'hui chez ses interlocuteurs de l'inquiétude et du désarroi à l'égard des mathématiques. L'intrusion de ce qu'on a appelé la « mathématique moderne » à l'école fait redouter un bouleversement des lois de la pensée et des meilleurs critères de vérité. L'ésotérisme dont s'entoure la production des mathématiciens empêche le profane d'y aller voir par lui-même, ce qui n'est pas fait pour dissiper le malaise.

Ces craintes proviennent sans doute d'une information insuffisante ou déformée sur ce qu'est effectivement la mathématique d'aujourd'hui. Il ne semble pas inutile d'y consacrer une bonne part de cet exposé.

Dès les origines, les mathématiques se sont présentées comme des branches de ce qu'on appelle maintenant la physique. L'arithmétique

est la physique des petites collections finies d'objets vus sous le seul rapport de l'existence. La géométrie est la physique des configurations spatiales et des instruments de dessin. Cette tendance s'est confirmée lorsque les mathématiques ont investi l'optique ou la mécanique. L'histoire montre qu'elles surent manifester toutes les audaces tant que leur démarche fut garantie par des modèles matériels. En revanche, lorsque les supports concrets firent défaut, elles se révélèrent timorées ; elles s'achoppèrent aux nombres impossibles ; elles balbutièrent sur l'infini.

Ces mathématiques, que l'on appellera traditionnelles, ont étonné les Anciens par leur extraordinaire adaptation au réel. Aucun décompte, aucune vérification graphique ne sont jamais venus infirmer les propositions de l'arithmétique ou de la géométrie. Mieux encore : lorsque l'école de Platon parvint à prouver, par la spéculation, qu'il est impossible de former d'autres polyèdres réguliers que les cinq solides que l'on appelle justement « platoniciens », on eut le sentiment aigu que la nature était contrainte d'obéir à des lois mathématiques. Celles-ci apparurent comme des affleurements des principes que se donnèrent les Dieux pour construire le monde, de même que les économistes règlent sur l'arithmétique les opérations financières ou fiscales. « Dieu est géomètre » proclama Platon et, à l'autre bout des siècles, l'écho lui répondit par la voix de Jacobi : « Dieu fait toujours de l'arithmétique ». Les énoncés mathématiques se chargèrent ainsi d'un caractère absolu et d'un contenu juridique et moral, qui étaient parfaitement sensibles naguère encore, à l'école.

Ce sens de la rigueur rend plus irritante, plus douloureuse même, la mauvaise volonté que met la nature à se plier aux lois mathématiques. De même que les hommes s'efforcent à frauder le fisc, tout ce qui vit et demeure autour de nous s'ingénie à biaiser avec les symétries et la simplicité qu'imposent les nombres et les figures. On voit ainsi naître deux façons de regarder le monde : d'une part la vision scientifique, rigoriste, harmonieuse et glacée et de l'autre, la vision « artiste », sensible à l'irrégulier, à l'irrationnel par quoi se manifeste la vie. N'oublions pas que, dans le temple de la science où nous sommes rassemblés, l'une des fresques représente le spectacle saisissant de « L'homme luttant contre la nature », celle-ci étant considérée comme l'ennemie jurée de la science ; et que, jusqu'à une époque récente, le plus bel ornement d'un esprit délicat restait une solide stupidité en mathématiques.

Si intéressante soit-elle, il nous faut abandonner ici l'analyse détaillée des liaisons existant entre la vision du monde qu'on avait à une époque donnée et l'idée qu'on se faisait en même temps des mathématiques. Toutefois il convient de formuler encore une remarque au sujet de l'abstraction. Les vérités mathématiques étant cachées au cœur des choses, on ne peut les découvrir qu'en dépouillant celles-ci d'une suite d'enveloppes représentant les accidents, les imprécisions derrière lesquelles elles se dissimulent. Les faits mathématiques s'obtiennent donc au terme d'une

chaîne de distillations : ils sont abstraits, par nature. En conséquence les enfants, qui vivent à un niveau très concret, ne peuvent pas faire d'emblée des mathématiques (sauf certains d'entre eux, au bénéfice de dons choquants, d'ailleurs compensés très justement par diverses disgrâces physiques ou intellectuelles bien méritées). L'art du pédagogue consiste à les faire passer avec d'infinies précautions du concret à l'abstrait, auquel bien peu d'entre eux parviennent, fort heureusement. Car, s'il est bon de faire un peu de mathématiques afin de développer une sorte d'honnêteté un tantinet naïve, il est dangereux d'en faire trop, parce que cela tue l'imagination, cela ferme l'esprit aux réalités de la vie et de la philosophie.

Et puis, quelque chose s'est produit. Il serait facile de montrer que les idées nouvelles se sont élaborées au cours de nombreux siècles et qu'une fois exprimées, elles ne se sont imposées que très lentement à la conscience des mathématiciens. Mais les historiens de la mathématique ont le sens du drame. Passant sur les mérites de Lagrange, ils conviennent d'attacher le nom de Galois à cette révolution, Galois dont la courte et lamentable vie permet de fixer au 29 mai 1832 le jour de l'apparition des conceptions modernes. Il est vrai que l'œuvre de Galois met en lumière certains caractères de la mathématique d'aujourd'hui. Il est évidemment impossible de la présenter ici, mais on peut essayer de dégager deux points qui paraissent importants.

Galois s'est occupé des équations algébriques comme, par exemple :

$$3x^5 - 2x^3 + 11x^2 - 23 = 0$$

qui est du cinquième degré. Ses prédécesseurs s'étaient trouvés pris dans un piège absurde. D'une part, des considérations étrangères à l'algèbre, des faits géométriques et analytiques connus depuis longtemps les avaient convaincus que l'équation générale du cinquième degré admet certainement une solution. D'autre part, ils admettaient le principe traditionnel suivant lequel un objet mathématique n'existe au sein d'une théorie que lorsqu'on peut le construire, c'est-à-dire dès qu'on connaît une suite finie d'opérations du catalogue permettant de passer de certaines données à l'objet en cause. Or, en ce qui concerne l'équation générale du cinquième degré, malgré des efforts inouïs, les algébristes étaient incapables d'en construire une solution.

La nouveauté consiste à tenir compte de ce fait et à dissocier tout simplement « existence mathématique » et « constructivité ». On admet dorénavant que, dans une théorie donnée, il est permis d'affirmer qu'un objet existe dès que ses propriétés ne contredisent pas les lois qui sont vraies dans la théorie en question.

Par une astuce assez jolie qui consiste à construire un modèle, dont la cohérence prouve à elle seule la compatibilité des propriétés attribuées

à l'objet en cause, on montre que toute équation algébrique de degré plus grand que zéro admet une solution au moins.

Galois a encore fait usage d'une propriété intéressante que possèdent les solutions de certaines équations algébriques. Considérons l'équation $x^2 + 1 = 0$. Nous savons maintenant qu'elle a des solutions. On les désigne souvent par les symboles i et $-i$. Elles sont distinctes. Mais si, dans un texte concernant l'équation $x^2 + 1 = 0$, le typographe permutait systématiquement i et $-i$, le lecteur n'y verrait absolument rien. Aucune faute, aucune incohérence n'en découlerait, Les objets i et $-i$ ont exactement les mêmes propriétés. Ils sont indiscernables.

Retenons donc ces deux observations :

- en mathématique, existence égale non-contradiction
- en mathématique, on considère des collections d'objets à la fois distincts et indiscernables.

Pour les besoins de cet exposé, convenons d'appeler « système formel » la donnée d'une collection d'objets a priori distincts et indiscernables, munie de relations compatibles.

Galois a montré que la résolution d'une équation algébrique se ramène à l'étude d'un système formel. Par la suite, on est parvenu à montrer qu'il en était de même de toutes les parties de la mathématique. Dans cet ordre d'idées, les exploits les plus remarquables furent ceux de Hilbert, qui constitua la géométrie euclidienne en un système formel, et de Cantor, qui rendit possible la formalisation des nombres réels.

Ainsi la mathématique est-elle devenue la science des systèmes formels.

Elle bénéficie par là d'une double autonomie. D'une part, elle se libère de la tutelle des sciences d'observation. De l'autre, elle voit disparaître une foule d'obstacles qui paralysaient les mathématiques traditionnelles. Par exemple, rien ne l'empêche d'adjoindre à un système formel un objet compatible avec ce système, mais dont la construction effective nécessiterait une infinité d'opérations. Cela permet de couper court aux interminables logomachies autour de l'« infini actuel » et de l'« infini potentiel ». Sous réserve d'en prouver la non-contradiction, le mathématicien a le droit de considérer autant de copies qu'il veut d'un système formel. Par exemple, il lui est loisible d'introduire simultanément deux espaces euclidiens distincts, ce qui ne se peut pas si l'on considère que l'espace euclidien à trois dimensions est coextensif à l'espace où nous vivons.

La simple notion de système formel ne permet pas d'imaginer la multitude et la diversité des aspects qu'elle peut revêtir. Toutefois un exemple fixera l'imagination et rendra plausibles quelques remarques.

La figure 1 montre d'abord une collection de huit objets a priori distincts, puisqu'on peut les compter, mais indiscernables en ceci qu'aucun d'eux ne possède de propriétés que les autres n'ont pas. Pour faciliter

Grphe sagittal

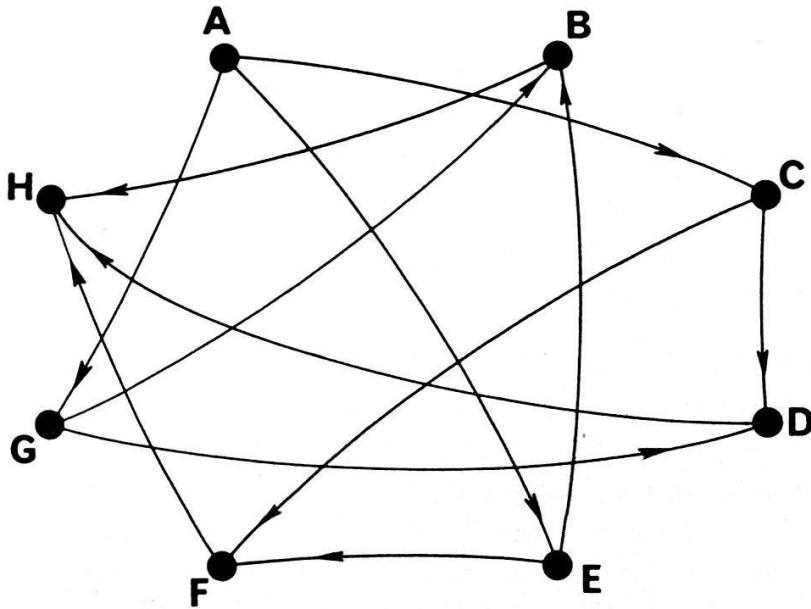


Fig. 1.

la description, on attache à chacun d'eux une lettre différente parmi les huit premières de l'alphabet, et cela d'une manière tout à fait arbitraire. On introduit ensuite entre ces huit objets certaines liaisons matérialisées par des flèches. Ainsi A est lié à E, E est lié à B, mais pas à A.

Variante 1

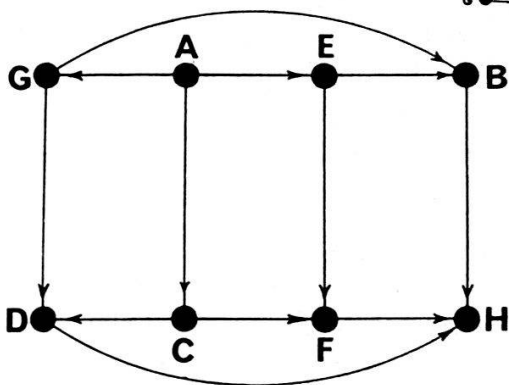
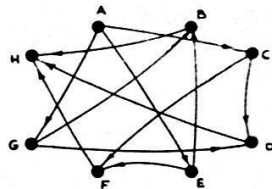


Fig. 2.

Variante 2

- A, B, C, D, E, F, G, H
- AC, AE, AG, BH, CD, CF,
- DH, EB, EF, FH, GB, GD

Ces données, que le dessin permet d'envisager d'un seul coup d'œil, déterminent un système formel. C'est un exemple très simple de ce qu'on appelle un graphe sagittal.

Bien qu'elle montre clairement tous les éléments constituant le système formel considéré, la figure 1 peut nous égarer dans la mesure où elle présente avec tout autant de netteté des aspects accidentels, étrangers à ce système même. La figure 2 donne deux présentations du même système formel. La première variante reprend le principe des points et des flèches. Un simple changement de disposition fait disparaître certains accidents non essentiels de la figure 1, comme les intersections de flèches, par exemple. La deuxième variante renonce à toute illustration géométrique : elle se borne à donner la liste des lettres attribuées aux objets du système et celle des couples d'objets reliés ; ainsi AC signifie que A est lié à C.

Notons que l'introduction de liaisons dans la collection des huit objets a pour effet de les rendre mieux discernables. Par exemple, l'élément A est le seul dont partent trois flèches et on peut le reconnaître à cette propriété. En revanche, les éléments C, E et G sont encore partiellement indiscernables en cela que chacun d'eux est l'extrémité d'une flèche et l'origine de deux autres. A condition de permuter en même temps les noms de B, D et F, on pourrait échanger les lettres C, E et G sans que personne s'en aperçoive.

Le caractère essentiel de ce système formel est que les éléments qui le constituent et les relations qu'on y a introduites n'ont aucune signification. Afin de le faire mieux sentir, nous allons considérer quatre dispositifs présentant une grande ressemblance avec le système formel des figures 1 et 2, mais où justement les objets et les liaisons ont une interprétation concrète.

Le premier de ces quatre codages — nous employons ici un terme qui sera précisé par la suite — nous montre les huit collections réalisables à partir de trois étoiles différentes (fig. 3). Une flèche placée entre deux collections signifie que l'on passe de la première à la seconde par l'adjonction d'une étoile. Le diagramme ainsi obtenu est formellement le même que celui de la figure 1, comme on le vérifie sans peine. On obtient le deuxième codage en considérant toutes les étapes possibles dans la confection du mélange de trois liquides différents en quantités déterminées, l'adjonction d'un liquide étant aussi figurée par une flèche. En attachant à chaque liquide l'une des étoiles du premier codage, on s'assure que cette situation conduit à un diagramme analogue à celui de la figure 1. La figure 3 suggère encore un troisième codage : on considère l'expression $3 + 6 + 5 + 12$ ainsi que toutes les expressions obtenues en effectuant, dans l'ordre qu'on veut, une ou plusieurs des opérations indiquées. Les étoiles placées au-dessus des signes d'addition proposent une répartition possible de ces huit expressions dans le diagramme

1er codage

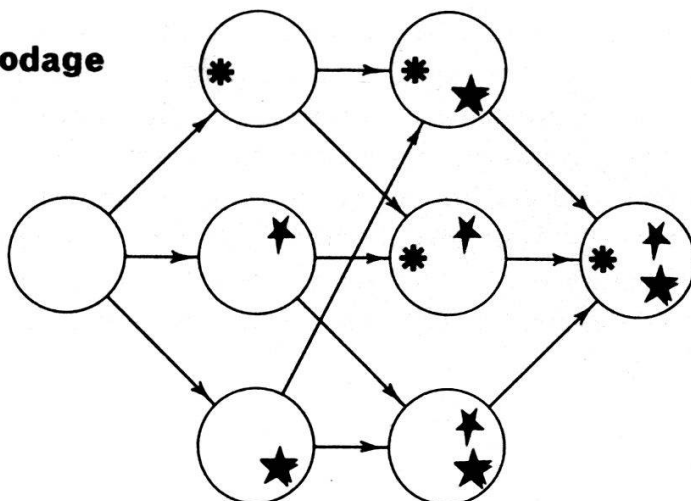


Fig. 3

2e codage : mélange de trois liquides

3e codage :

$$3 \ * \ 6 \ \star \ 5 \ \star \ 12$$

4e codage

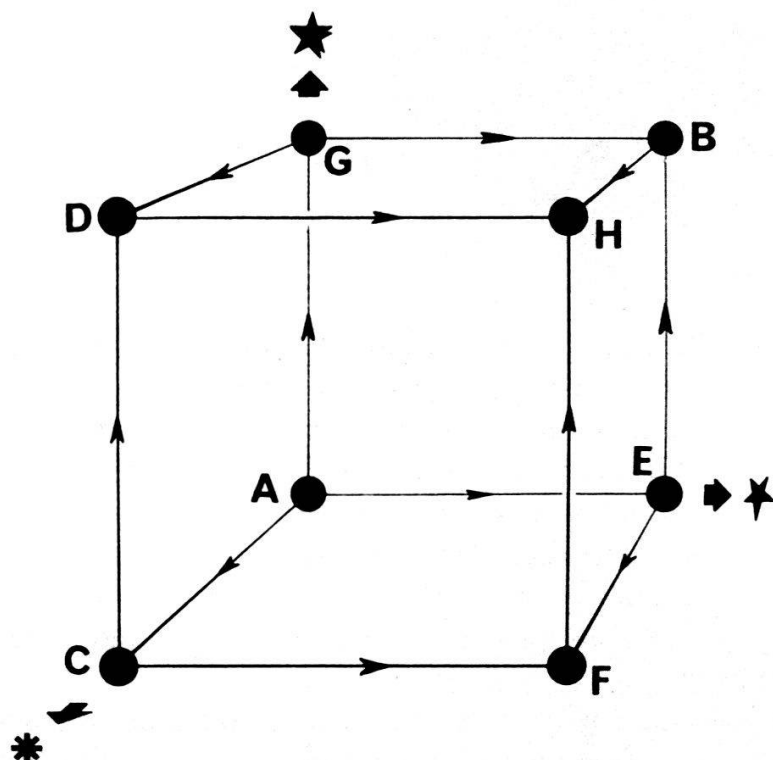


Fig. 4.

attaché au premier codage. Ainsi les quatre expressions figurant de gauche à droite dans la ligne médiane horizontale seraient $3 + 6 + 5 + 12$, $3 + 11 + 12$, $14 + 12$ et 26 .

A propos du premier codage, signalons qu'on aurait aussi pu décider de représenter par une flèche le prélèvement d'une étoile dans une

collection. Cela reviendrait à inverser le sens de toutes les flèches. Le parallélisme avec le mélange des liquides serait perdu mais le nouveau diagramme serait encore formellement semblable à celui de la figure 1.

Le quatrième codage fait intervenir un cube dont on n'a conservé que les sommets et les arêtes. Sur chacune de celles-ci, on a introduit un sens de parcours. Les lettres figurant aux sommets du cube permettent de vérifier l'analogie formelle avec le diagramme de la figure 1. Les étoiles placées aux extrémités des arêtes AC, AE et AG suggèrent la parenté avec le premier codage.

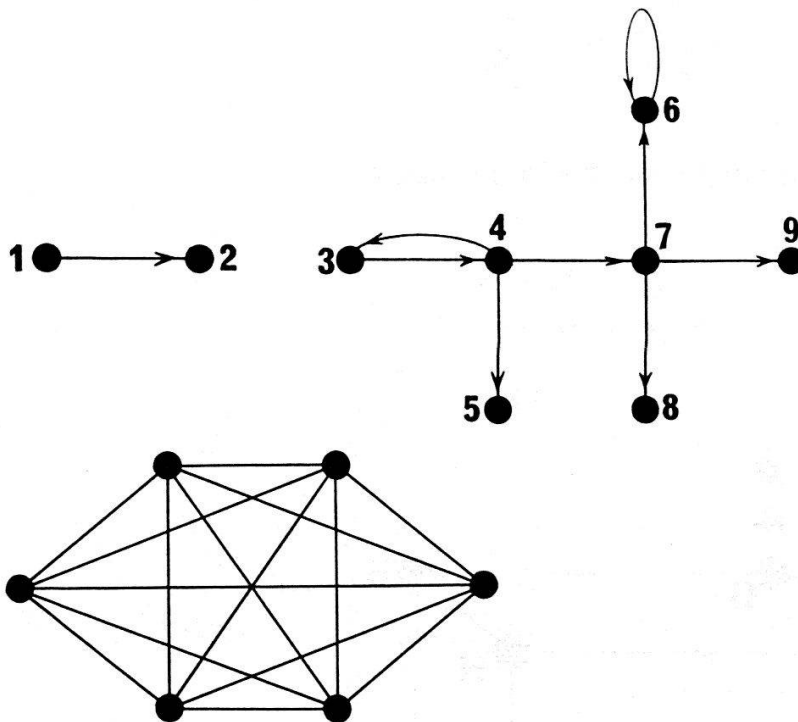


Fig. 5.

Les exemples précédents pourraient susciter l'impression que tout système formel est obtenu par abstraction à partir d'une situation concrète. Il n'en est rien. Il suffit, pour s'en convaincre, de former un système formel en posant arbitrairement des objets et des relations compatibles. La figure 5 en montre deux possibilités. (Sur le deuxième exemple, chaque trait représente deux flèches de sens inverses.) Il n'est pas exclu que l'un ou l'autre de ces graphes puisse illustrer une situation concrète ; mais chacun d'eux a été posé gratuitement, en quelque sorte, sans souci d'interprétation.

Les exemples qui précèdent permettent de formuler quelques remarques qui vont à l'encontre des opinions communément admises au sujet de la mathématique.

D'abord, un système formel n'est pas abstrait a priori. On le pose, on le choisit à la manière des règles d'un jeu, sans autre limitation que celle qu'impose la cohérence. Sans doute peut-on imaginer des systèmes formels par ressemblance ou même par abstraction à partir d'une situation

concrète. Mais le mathématicien ne les étudie pas en tant qu'objets abstraits. La mathématique n'est pas, en elle-même, une science plus abstraite que la biologie ou la sociologie.

Ensuite, un système formel n'est pas compliqué par principe. Le drame de l'enseignement traditionnel consiste justement en ceci que les systèmes formels auxquels il s'attache d'emblée presque exclusivement — la géométrie euclidienne et l'ensemble des nombres réels — sont d'une élaboration particulièrement subtile. Nous venons de voir des systèmes formels très simples à partir desquels il est possible de faire d'excellente mathématique.

Enfin, un système formel ne comporte pas nécessairement de nombres. Il faut abandonner l'illusion que le mathématicien est un individu qui calcule sans trêve ni faute, et renoncer, par la même occasion, à le mettre régulièrement à l'épreuve lorsqu'il s'agit de transformer des lieues en milles marins ou d'évaluer l'écot de chacun à la fin du repas. La mathématique ne se borne plus à « la science de la grandeur dans ce qu'elle a de mesurable et de calculable ».

Si l'on admet que la mathématique est devenue la science des systèmes formels, il convient de se demander pourquoi les mathématiciens s'obstinent à s'intéresser à des échafaudages dénués de toute signification et pourquoi la mathématique peut se rendre utile dans les applications concrètes. Le principe des réponses réside dans la notion de *codage*, que l'on peut se représenter symboliquement comme le suggère la figure 6.

On y distingue d'abord un « système physique » qui peut effectivement relever de la physique ou de toute autre discipline. Pour fixer les idées, on a représenté une culture de bactéries et une montre, par lesquelles on suggère l'étude d'une population de microbes au cours du temps. En regard, on considère un système formel. On a fait figurer ici la correspondance exponentielle qui, à tout nombre réel x , attache le nombre réel 2^x . Le troisième élément du codage est constitué par diverses liaisons introduites après coup entre certains objets du système physique et certains termes du système formel, qui devient ainsi un code du système physique. Dans l'exemple considéré, la clé du codage attache un nombre déterminé — la valeur du temps — à toute position des aiguilles de la montre ; elle associe à chaque état de la colonie de bactéries le nombre des individus qui la composent ; elle traduit enfin par la fonction exponentielle la correspondance qu'établit la simultanéité entre l'état de la montre et celui du bouillon de culture.

Outre les trois éléments constitutifs du codage : « système physique », code mathématique et clé du codage, il faut évoquer une quatrième notion : celle d'adéquation. Le diagramme de la figure 6 fait apparaître un carré de flèches. Les côtés verticaux illustrent les liaisons internes au système physique et au système formel. Les côtés horizontaux sont

fournis par la clé du codage. Au lieu de parcourir la flèche figurant dans le système physique, on peut se proposer de faire le détour par les trois autres côtés du carré. Si le codage était parfait, ces deux cheminements seraient interchangeable. L'adéquation du codage précise dans quelles conditions le détour par le modèle mathématique se révèle avantageux. Il convient toutefois de ne pas confondre adéquation avec fidélité absolue. Ainsi, dans l'exemple suggéré par la figure 6, le codage de la population de bactéries à l'aide d'une fonction variant continûment est plus adéquat que celui qui introduirait une fonction à valeurs discrètes, quand bien même celle-ci paraît mieux convenir à la description d'une collection d'individus.

Les utilisateurs de la mathématique conçoivent et exploitent des codages dont ils savent déterminer l'adéquation. Ils peuvent alors substituer à des processus physiques des démarches intellectuelles moins coûteuses ou plus rapides, grâce auxquelles ils sont en mesure d'anticiper sur le déroulement des phénomènes.

Le cas particulier d'un codage dont le « système physique » lui-même est formel est extrêmement intéressant. Nous en avons vu des exemples élémentaires aux figures 3 et 4. Cette technique permet tantôt d'analyser des systèmes formels complexes à l'aide de systèmes simples, tantôt de constituer des systèmes formels évolués à partir de systèmes plus primitifs. Le mathématicien s'en sert méthodiquement, surtout depuis l'introduction du langage dit catégorique.

Cette possibilité de combiner des systèmes formels a fait naître l'espoir d'unifier toute la mathématique en un monumental système formel. Cette entreprise est sans doute l'une des plus passionnantes aventures intellectuelles. Toutefois elle rencontre de sérieux obstacles au niveau des fondements. C'est là, en effet, que les risques de contamination par le langage commun et l'intuition sont particulièrement difficiles à éviter. Malgré l'importance de ces recherches, il serait faux d'y voir toute la mathématique et l'on peut constater que la majeure partie des mathématiciens s'en désintéressent complètement. Il est donc plus réaliste de considérer la mathématique comme la science des systèmes formels que comme la construction d'un édifice formel susceptible de contenir toutes les spécialités mathématiques présentes et à venir.

N'est-il pas déraisonnable de s'attarder ainsi à décrire une conversion de la mathématique qui, pour l'essentiel, s'est accomplie au cours du siècle dernier ? Malheureusement le profane en est généralement resté à une image périmée de la mathématique et l'on peut lire tous les jours des ouvrages apparemment sérieux qui se réfèrent à la mathématique comme si rien ne s'était passé depuis Lagrange. Les propositions mathématiques sont aujourd'hui encore des modèles inégalés de vérités absolues et l'ambition de toute certitude est d'être « quasi-mathématique ». Le

mathématicien est identifié à un calculateur prodige vers qui, à l'instant de payer son écot, chacun se tourne avec angoisse dans l'espoir de mener à bonne fin une division par dix-sept que le pauvre n'a jamais su faire.

Nous sommes tous si profondément imprégnés de la conception traditionnelle de la mathématique qu'il nous est extrêmement difficile d'admettre que la mathématique ne pourra jamais rien démontrer, sauf peut-être en mathématique. Un exemple peut nous rendre sensible l'inertie de notre pensée en cette matière.

N'étant pas météorologue, l'auteur de ces lignes n'a aucune honte à confesser qu'il est totalement incompetent en matière de météorologie. Il se propose pourtant de prouver qu'il existe, en cet instant même, deux points antipodes de notre globe où il règne la même pression atmosphérique. Cela peut se faire sous forme d'une courte bande dessinée.

La figure 7 montre un grand cercle de notre globe, situé dans un plan passant par le pôle nord N et le pôle sud S. En chaque point M de ce grand cercle, il règne une pression atmosphérique $p(M)$. Reportons à partir de M, sur la verticale en direction du zénith, un segment de longueur $p(M)$. On obtient ainsi une courbe indicatrice des pressions qui s'éloigne plus ou moins du sol suivant que la pression croît ou décroît. Il est naturel d'admettre que cette ligne est continue car la pression ne saurait faire de saut brusque. Il s'agit de montrer qu'il

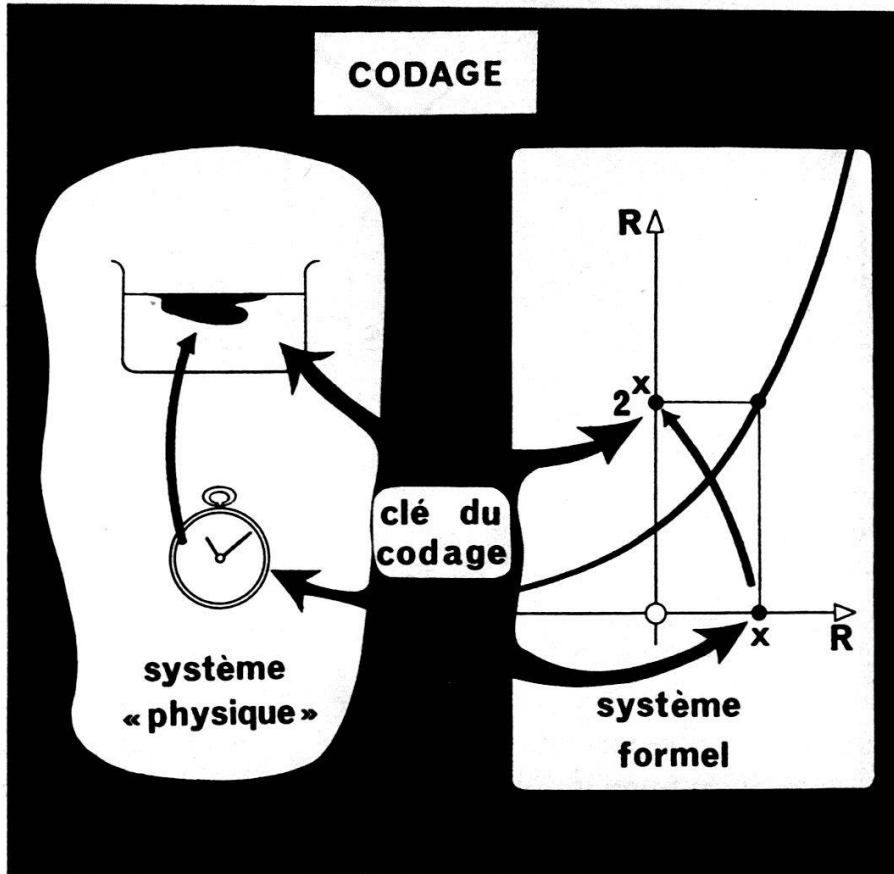


Fig. 6.

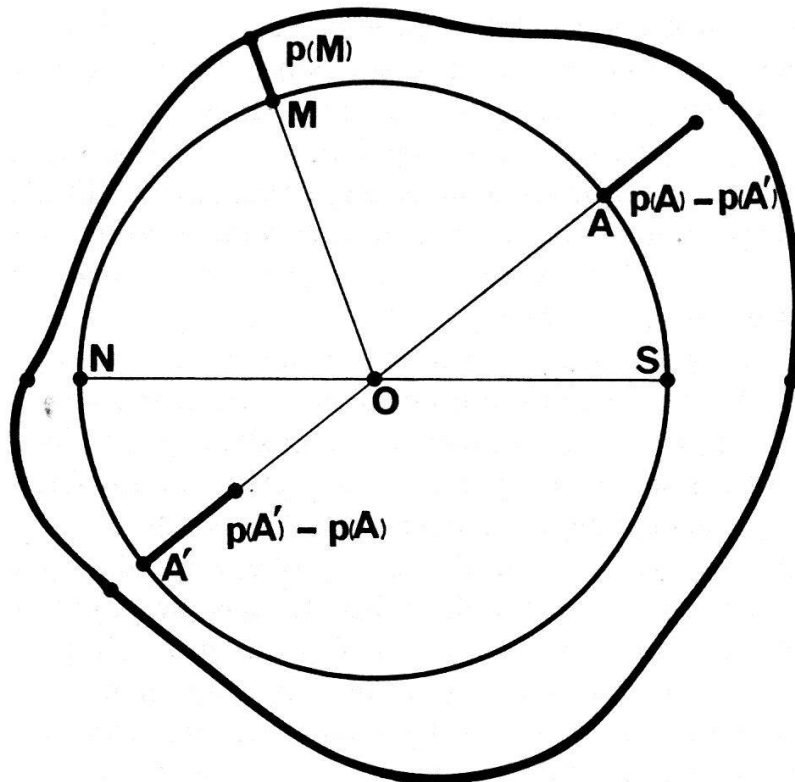


Fig. 7.

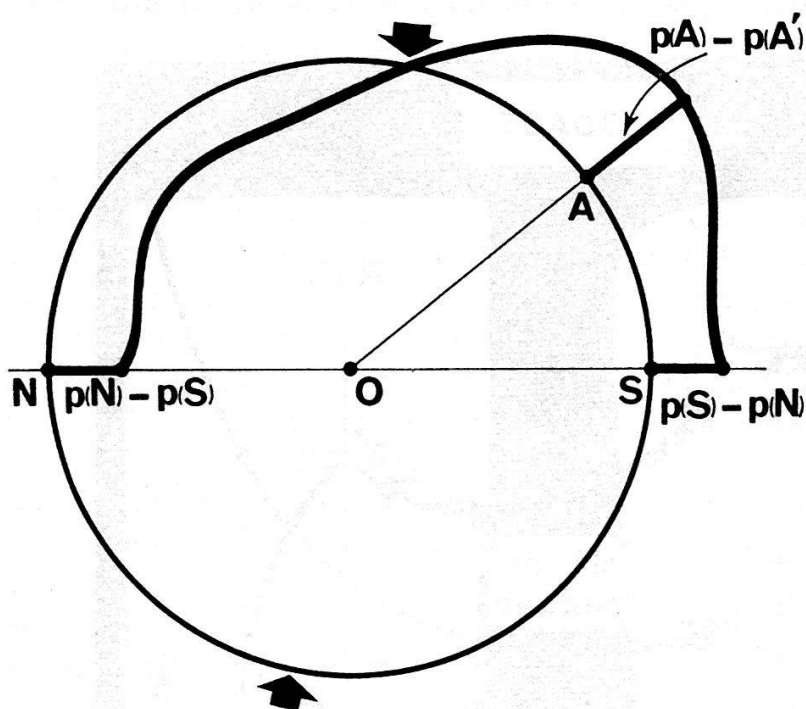


Fig. 8.

existe deux points antipodes où cette indicatrice des pressions passe à la même altitude. Si l'on préfère, il suffit de calculer, pour chaque point A du grand cercle et pour son antipode A' , la valeur $p(A) - p(A')$ de la différence des pressions en A et en A' , puis de montrer qu'il existe un point du demi-grand cercle supérieur où cette quantité est nulle.

C'est ce qu'on a représenté sur la figure 8. En tout point A du demi-grand cercle supérieur, on a reporté sur la verticale un segment de longueur $p(A) - p(A')$, vers le zénith lorsque ce nombre est positif, vers le centre du globe dans le cas contraire. La courbe indicatrice des différences de pression ainsi engendrée est à nouveau continue car, lorsque deux quantités varient sans faire de saut, il en est de même de leur différence.

Lorsque la pression atmosphérique est la même aux pôles, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, les valeurs de la différence des pressions au pôle nord et au pôle sud, soit $p(N) - p(S)$ et $p(S) - p(N)$, sont opposées et non nulles. Géométriquement, cela se traduit par le fait que l'indicatrice des différences de pression part d'un point situé à l'intérieur du grand cercle pour aboutir en un point situé à l'extérieur. Comme elle est continue, elle coupe nécessairement le méridien considéré en un point au moins où, par construction, la pression atmosphérique est la même qu'au point antipode. Notre assertion se trouve ainsi prouvée.

On a de la peine à se défaire de l'impression que la nature, ici l'atmosphère terrestre, est asservie à certaines conditions mathématiques. Notre démonstration aurait alors pour objet de dégager ces liaisons nécessaires. En réalité nous n'avons rien fait de plus que d'établir un petit théorème de géométrie : pour toute fonction réelle continue définie sur une sphère, il existe deux points antipodes où la fonction prend des valeurs égales. Quant au comportement de la pression atmosphérique, en revanche, nous devons reconnaître avec le mathématicien que nous ignorons ce qu'il en est. C'est au météorologue d'exploiter une énorme documentation expérimentale afin de décider s'il est adéquat d'assimiler la Terre à une sphère, d'y considérer des points antipodes et de coder la pression atmosphérique par une fonction continue. Dans ce cas seulement, la propriété annoncée peut être considérée comme valide. Mais elle est cachée dans le codage et non dans la nature, ce qui est déjà très mystérieux.

Cette difficulté à concevoir la mathématique comme la science des systèmes formels est considérable. Même de bons mathématiciens ne parviennent pas toujours à la surmonter. Il nous souvient d'un exposé où le conférencier cherchait un codage mathématique susceptible de décrire le fonctionnement du cerveau humain. Certains mathématiciens présents, bien connus pour leur habileté à manipuler des systèmes formels, ne cachaient pas leur réprobation. Pour eux, une semblable démarche portait atteinte à l'esprit de l'homme en le réduisant à un simple mécanisme. Or il apparaît qu'un codage est tout juste le contraire d'une réduction et l'on ne voit pas au nom de quelle morale on interdirait une recherche de cet ordre. Le danger n'apparaît que lorsqu'un tel codage, par la

malédiction de l'autorité scientifique, du pouvoir politique ou du simple consensus populaire, reçoit une charge affective incontrôlée qui l'élève au rang de vérité exclusive.

* * *

Jusqu'ici nous avons essayé de décrire la profonde évolution qui a marqué la mathématique. Si sommaire qu'elle soit, l'esquisse que nous en avons faite exige un minimum de développements. Ils sont indispensables toutefois si l'on veut placer dans son véritable éclairage l'étude des relations entre mathématique et culture. Nous serons beaucoup plus négligent en ce qui concerne la notion de culture, par quoi nous désignerons d'une manière vague cet ensemble de certitudes, de craintes, de tendances, de tabous et d'images qui déclanchent, colorent ou inhibent notre pensée et notre action.

L'intrication de la mathématique avec les diverses composantes de la culture est telle qu'il faut renoncer à en aborder ici l'examen même superficiel. Aussi nous bornerons-nous à formuler, à titre d'échantillons, quelques remarques touchant aux relations de la mathématique avec l'enseignement, avec les autres sciences et, pour finir, avec ce que l'on pourrait appeler l'ordre général de la pensée.

* * *

L'enseignement traditionnel se sentait chargé de transmettre des connaissances mathématiques. Il en détenait la collection. Il avait pour tâche de les ordonner. Il s'appuyait sur une loi impérative : le passage du concret à l'abstrait. L'histoire des mathématiques lui fournissait un fil directeur tout naturel. Les mathématiques scolaires s'organisaient ainsi en un gigantesque jeu de l'oie. Les gagnants devenaient mathématiciens. Les autres s'égarèrent en chemin, prisonniers des fractions ordinaires ou de la trigonométrie.

Vers les années cinquante apparut un mouvement réformiste inspiré par des enseignants et des mathématiciens professionnels exaltés par la vision d'une mathématique monolithique. Ils adoptèrent comme fil directeur la construction du système complet de la mathématique, en commençant par la logique et la théorie des ensembles. C'est à cette doctrine que l'on pense en général lorsqu'on parle de « mathématiques modernes ».

Les tenants des deux écoles se sont affrontés avec violence. Les modernes reprochaient aux anciens un attachement romantique à des notions et des problèmes qui ont perdu aujourd'hui beaucoup de leur intérêt ; en n'accédant qu'à grand-peine aux mathématiques du dix-septième siècle, l'enseignement traditionnel se privait des perspectives récentes qui mettent en relief même les idées les plus classiques. En revanche, les

anciens accusaient les novateurs d'abîmer leurs élèves dans la contemplation extatique des fondements de la mathématique sans jamais leur mettre entre les mains les outils plus élaborés qui interviennent effectivement dans les applications. Toutefois les uns et les autres se trouvaient tacitement d'accord pour considérer que le contenu de l'enseignement mathématique était entièrement déterminé par un programme, c'est-à-dire par un enchaînement linéaire de « choses à voir ».

Depuis quelques années des recherches sont entreprises dans divers pays pour adapter l'enseignement à une mathématique liée à l'art des codages. Un codage est un mécanisme en prise sur une situation problématique. Il est destiné à fonctionner en s'intégrant à une recherche ; il permet de représenter, d'observer, de prévoir. Il convient de l'éprouver, de le critiquer, de le modifier afin de le rendre plus adéquat selon tel ou tel critère. Comme on le voit, l'accent porte sur des activités intellectuelles — choix, décision, comparaison, classification, traduction, etc. — plus que sur des notions inertes. Dès lors, le contenu de l'enseignement ne saurait se définir par une table des matières, mais par un système d'objectifs exprimés en termes de comportement de l'élève. Il n'est pas question de faire disparaître des connaissances et des automatismes indispensables, mais la préoccupation centrale devient l'aptitude de l'élève à penser par lui-même.

A certains égards, cet enseignement est plus ambitieux que celui de l'école traditionnelle. Ses critères de réussite ne sont plus étroitement scolaires, car ils se fondent sur l'autonomie et l'adaptabilité intellectuelles de ceux auxquels il s'adresse. Il fera sans doute la part moins belle aux élèves qui, naguère, se tiraient d'affaire grâce à des vertus mineures telles que la docilité et le conformisme. En revanche, par l'emploi de systèmes formels beaucoup plus variés, il devient possible d'harmoniser plus souplesment les situations de travail aux moyens de chaque élève. L'essentiel est que celui-ci, quel que soit le niveau qu'il peut atteindre, soit mis en état de réussir quelque chose par lui-même en mathématique.

Notons aussi que l'idée de système formel permet de découper les théories-fleuves de la géométrie ou des nombres réels en « micro-théories » autonomes, à partir de bases axiomatiques résumant les connaissances antérieures ou présupposées. Cette technique libère l'élève qui n'est plus contraint d'actualiser à chaque instant tout son passé mathématique. C'est ainsi que procèdent les mathématiciens. On entrevoit que l'enseignement d'aujourd'hui se propose en modèle, non pas une mathématique livresque, mais l'activité même du mathématicien.

Ajoutons que l'enseignement actuel fait une place grandissante au matériel de didactique mathématique. L'école traditionnelle entretenait avec la réalité des relations ambiguës. Les notions mathématiques, tenues pour essentiellement abstraites, ne pouvaient que souffrir d'un contact trop étroit avec les applications pratiques. Aussi de bons esprits étaient-ils

portés à bannir l'observation de l'apprentissage mathématique. Au contraire, la notion de codage permet d'échapper au fallacieux dialogue du concret et de l'abstrait, et d'insister sur la nature formelle du code mathématique. Celle-ci apparaît d'autant plus clairement que le modèle mathématique est mis en relation avec des systèmes physiques plus variés. Pour la plupart des élèves, cette voie est la seule qui puisse mener à une compréhension intime de la mathématique d'aujourd'hui. N'oublions pas que les règles du jeu d'échecs en font un système formel mais que seuls les joueurs chevronnés parviennent à jouer une partie sans pièces ni échiquier. Si paradoxal que cela puisse paraître, l'enseignement mathématique multiplie et améliore les contacts avec le réel dans la mesure où il s'attache consciemment à l'étude des systèmes formels.

* * *

Cette dernière remarque nous fait aborder les rapports de la mathématique avec les autres sciences. L'aptitude d'une science à formuler des lois de type mathématique était traditionnellement considérée comme le stade ultime de son développement. Elle montrait par là qu'elle était parvenue à ancrer ses fondements dans l'absolu des idées mathématiques et qu'elle accédait au plus haut niveau de vérité et de précision. Cette conception perd évidemment toute consistance à la suite des bouleversements apportés par les idées post-galoisiennes au contenu et à la portée des énoncés mathématiques. Le renouveau de la mathématique remet donc en cause l'idéal et les méthodes des sciences qui ont recours à elle.

La gravité de ce problème semble avoir échappé à beaucoup d'utilisateurs qui n'ont vu dans la révolution de la mathématique que l'agrandissement d'une fabrique de gadgets. Il n'est pas question de l'étudier ici. Aussi nous bornerons-nous à remarquer qu'en acquérant son autonomie, la mathématique se place dans une position centrale vis-à-vis de toutes les disciplines disposées à employer des codages impliquant des systèmes formels. Ses relations historiques « privilégiées » — en réalité, sa subordination — à l'égard de la physique n'ont plus de raison d'être. Sans perdre aucune de ses utilisations traditionnelles, elle peut se mettre au service d'activités — telles les sciences humaines — qui jadis se tenaient farouchement à l'écart. Cette situation devrait lui permettre de jouer le rôle de principe ordonnateur dans la constellation des sciences et des techniques. La mathématique pourrait, par exemple, établir la liaison entre des recherches très différentes ayant recours à un même système formel, mettant ainsi en évidence ce qui relève de la démarche intellectuelle plutôt que de la particularité des objets étudiés.

Hélas ! cette situation idyllique est loin d'être réalisée aujourd'hui. La plupart des utilisateurs en sont restés à la conception traditionnelle.

Le même code mathématique est introduit sous vingt formes diverses au sein de vingt disciplines différentes. Il cesse d'être un système formel pour renaître, méconnaissable, sous les espèces de vingt fondements ontologiques distincts dans les vingt disciplines considérées. Il faut ensuite désigner des chimistes, des esthètes ou des sociologues pour enseigner les mathématiques propres à leurs branches respectives. Pour un gain de temps modeste, on accentue l'éclatement des sciences, et l'on perd une nouvelle chance de reprendre en main le phénomène scientifique qui semble avoir échappé à l'homme de science.

* * *

Venons-en, pour terminer, à une remarque plus générale encore. La mathématique est considérée habituellement comme le terrain d'élection de la logique. Or on a noté depuis longtemps que rien n'est plus bête qu'un raisonnement. Dans le meilleur des cas, il affirme que si A est vrai, alors A est vrai. Celui qui, apprenant que tous les hommes sont mortels, en déduit astucieusement que Socrate est mortel, est semblable à un enfant auquel on aurait confié un sac de billes et qui les aurait toutes perdues, sauf une. Comment la mathématique peut-elle construire ses théories avec un outil aussi grossier ? La réponse est simple : c'est parce que la logique est loin de constituer à elle seule toute la panoplie du mathématicien.

Un exemple nous le fera comprendre. Rappelons-nous que, pour avoir le droit d'adjoindre un objet à un système formel, il n'est pas nécessaire que les propriétés de cet objet soient des conséquences logiques de celles du système ; il suffit qu'elles n'entrent pas en contradiction avec elles. C'est le cas en particulier lorsque l'objet en question n'a aucune propriété. Nulle règle logique ne peut suggérer au mathématicien l'introduction d'un objet sans propriété. Et pourtant il s'agit là d'un acte créateur auquel la mathématique recourt très souvent. C'est à ce titre, par exemple, que la lettre x s'introduit dans le calcul des polynômes en x . Devant le succès de l'opération, on sera sans doute tenté d'introduire par imitation un nouvel objet sans propriété, y , grâce auquel on construira les polynômes en x et y .

Nous voyons surgir ainsi une deuxième technique de création, tout aussi étrangère à la logique que la précédente, qui n'est autre que l'analogie. C'est l'analogie qui, à partir des espaces à deux ou trois dimensions, permet de créer des espaces à quatre, cinq ou même une infinité de dimensions. C'est l'analogie encore qui constitue la clé de la plupart des codages. Il est piquant de noter que l'analogie, considérée en général comme une figure poétique de mauvais aloi, bannie de la conversation des honnêtes gens avec les dernières fumées de l'alchimie, a droit de cité au cœur de la science raisonnable entre toutes.

L'analogie est un mode de penser très général. Il est sans doute impossible de penser sans symbole, sans image, sans modèle. Mais celui qui pratique l'analogie court de grands risques car il côtoie le gouffre diabolique de la « confusion des analogues ». Nous désignons par là la faute qui consiste à identifier au sein d'un codage un objet codé avec son correspondant dans le code. Il serait facile d'en donner une multitude d'exemples, et de si banals qu'ils laissent des traces dans le langage courant. Il est sans doute commode d'associer le bien à la lumière et au blanc et, à l'opposé, le mal à l'obscurité et au noir. La confusion des analogues conduit à admettre que les êtres noirs sont mauvais. Les mathématiques intuitives n'en sont pas indemnes, qui désignent indifféremment du terme de « volume » un solide de l'espace et le nombre qui lui est attaché par une mesure (les mesures constituant une classe particulièrement importante de codages).

La confusion des analogues attribue aux objets étudiés les relations existant entre leurs images dans le code, à l'instar de celui qui prétend que Monsieur A est plus grand que Monsieur B sous prétexte que c'est ainsi que la perspective les montre sur une photographie. Elle est extrêmement tentante parce qu'elle procure l'illusion de l'objectivité. De là découlent l'intolérance et l'agressivité que manifestent généralement ceux qui s'en rendent coupables. Les grandes masses humaines étant portées à hisser leurs représentations au rang de vérités révélées, on s'explique sans peine l'insolence dont témoigne chaque culture — à commencer par la nôtre — à l'égard de toutes les autres.

Il est important de pouvoir exercer la spéculation analogique, d'en expérimenter les possibilités et les abus. C'est exactement ce que permet la mathématique d'aujourd'hui qui enseigne systématiquement à distinguer les objets et leurs images dans le code. Elle s'adonne même à la confusion contrôlée des analogues, comme, par exemple, lorsqu'elle identifie le nombre naturel 2 et la fraction ordinaire $6/3$. Celui qui a pratiqué cette sorte de mathématique ne pourra pas toujours transporter ses connaissances telles quelles à l'art, la politique ou la morale. Mais il aura acquis l'expérience vécue d'une certaine forme de pensée, dont il comprendra intimement les possibilités et les risques.

Nous venons de voir, à propos de l'analogie, une situation qu'on peut considérer comme typique : la mathématique est capable de mettre à l'épreuve des formes de pensée très générales. Il est facile de multiplier les exemples. Que l'on songe au langage des ensembles, si proche de la tendance à s'exprimer en termes de collectivités ; ou à la notion d'infini en mathématique, qui illustre à la fois les insuffisances de la logique aristotélicienne et la paresse de notre imagination ; ou à la continuité, à la linéarité, aux notions de repère et de relativité, ou à bien d'autres encore. Il serait intéressant d'entreprendre cette démonstration. Mais elle exigerait une présentation soignée des notions mathématiques mises

en jeu et il est impossible de le faire ici. Toutefois on peut d'ores et déjà déclarer que, de même que les systèmes formels fournissent des codes à diverses disciplines scientifiques ou techniques, la démarche mathématique elle-même se constitue en laboratoire expérimental pour la pensée la plus générale. La mathématique est l'un des domaines où la pensée peut déployer ses pouvoirs les plus audacieux. Ainsi s'expliquent tant son rôle culturel que la séduction qu'elle exerce sur les esprits curieux d'idées générales.

Tout cela ressort d'une manière particulièrement claire dès l'instant où la mathématique accède à l'autonomie. Mais n'est-il pas abusif de vouloir tant tirer d'une science qui, modestement, déclare se cantonner dans l'étude des systèmes formels ? N'oublions pas que la mathématique constitue un phénomène global. La métamorphose que nous avons décrite n'en affecte en réalité qu'un aspect assez superficiel. Si les systèmes que manipule le mathématicien sont formels, il n'en est pas de même de son activité ni de la signification de son travail. Celui-ci engage la totalité de l'être pensant. Il s'enracine par là au cœur de notre culture, sur laquelle la mathématique peut jeter des lueurs révélatrices.

* * *

Le sujet proposé était vaste. Les lignes qui précèdent ne sauraient prétendre l'avoir traité. Mais elles mériteraient quelque mansuétude si elles faisaient apparaître qu'on ne peut dégager le rôle culturel de la mathématique qu'après avoir compris le renversement quasi copernicien qui s'est opéré depuis plus d'un siècle dans son attitude et sa démarche. Le texte qu'on vient de lire voudrait apporter ce préambule indispensable. A partir de là, on pourrait songer à entreprendre une étude systématique des grands thèmes mathématiques et de leurs diverses interprétations analogiques, étude qui, pour l'essentiel, reste à faire.