

# Modélisation physique et simulation informatique d'un trébuchet à centrepoids en JavaScript

Autor(en): **Barmaz, Adrien / Martelli, Adrien / Piguet, Simon**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **101 (2022)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-1003698>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Modélisation physique et simulation informatique d'un trébuchet à contrepoids en JavaScript

Adrien BARMAZ<sup>1\*</sup>, Adrien MARTELLI<sup>2\*</sup> et Simon PIGUET<sup>3\*</sup>

BARMAZ A., MARTELLI A. & PIGUET S., 2022. Modélisation physique et simulation informatique d'un trébuchet à contrepoids en JavaScript. *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles* 101 : 139-150.

## Résumé

Ce projet, issu d'un travail de Maturité 2021 du Gymnase de Renens, consiste en la modélisation physique et la simulation informatique d'un trébuchet à contrepoids. Le trébuchet est une arme de siège du Moyen Âge qui exploite le potentiel gravitationnel pour propulser des boulets de pierre, pouvant peser jusqu'à 100 kg, contre des remparts fortifiés. Le but du travail était donc de décrire la dynamique de l'engin en utilisant les outils de la mécanique classique, notamment l'équation d'Euler-Lagrange, ainsi que les lois du mouvement de Newton. Étant donné que le système est chaotique, nous avons utilisé des méthodes d'analyse numérique, afin d'approximer les fonctions du mouvement en procédant à une intégration discrète des équations régissant la dynamique du trébuchet. Enfin, le but étant de rendre ce projet accessible, nous avons programmé la simulation en JavaScript/HTML, afin de la rendre disponible sur un site web.

**Mots-clés:** Équation de Euler-Lagrange, lois de Newton, trajectoire balistique, méthodes d'analyse numérique, double pendule.

BARMAZ A., MARTELLI A. & PIGUET S., 2022. Physical modelling and computer simulation of a counterweight trebuchet in JavaScript. *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles* 101 : 139-150.

## Abstract

This project, the results of a high school 2021 project, consists in the physical modeling and computer simulation of a counterweight trebuchet. The trebuchet is a siege weapon of the Middle Ages which exploits the gravitational potential to propel stone balls, weighing up to 100 kg, against fortified walls. The aim of this work was to describe the dynamics of the system using the tools of classical mechanics, in particular the Euler-Lagrange equation and Newton's laws of motion. Since the system is chaotic, we used numerical analysis methods to approximate the functions of motion by discrete integration of the equations of motion. Finally, the goal being to make this project accessible, we programmed the simulation in JavaScript/HTML to make it available on a web site.

**Keywords:** Euler-Lagrange equation, Newton's laws, ballistic trajectory, numerical analysis, double pendulum.

<sup>1</sup> Rue des Alpes 23, CH-1023, Crissier, Switzerland.

<sup>2</sup> Chemin de la Condémine 13, CH-1304, Cossonay-Ville, Switzerland.

<sup>3</sup> Chemin des Cèdres 8, CH-1026, Denges, Switzerland.

\* Tous les auteurs ont contribué à parts égales à ce travail.

Auteurs pour la correspondance: Adrien Barmaz (Adriarmaz@icloud.com), Adrien Martelli (Adrienmar03@gmail.com) et Simon Piguet (Simonraphaelpiguet@gmail.com)

## INTRODUCTION

Le trébuchet est une arme de siège, originaire de Chine, qui s'est imposée en Europe occidentale à la fin du Moyen Âge. Son mécanisme reprend le principe de la fronde et exploite la force gravitationnelle d'un contrepoids, aussi appelé « huche », afin de propulser des boulets de pierre. Malgré la faible fréquence de l'engin, maximum deux tirs par heure, son utilisation permet de détruire les plus épaisses fortifications de pierre. L'objet peut mesurer une vingtaine de mètres et lancer des charges de cent kilogrammes. La masse du contrepoids peut quant à elle varier de dix à vingt tonnes.

Dans le cadre de ce travail, la question centrale a été de parvenir à modéliser le mouvement du trébuchet lors du lancé, ainsi que la trajectoire balistique du projectile jusqu'à ce qu'il touche le sol, en modifiant notamment les caractéristiques physiques du modèle (longueur des bras, de la fronde, masse du contrepoids, vitesse du vent, etc.). De plus, la simulation devait être vraisemblable et retranscrire, le plus fidèlement possible, le comportement réel du trébuchet (DE JONG 2020). En outre, le dessein final étant de proposer la simulation sur un site internet, l'interface doit être fluide et facile d'utilisation. Un bon exemple de nos attentes est le site [www.virtualtrebuchet.com](http://www.virtualtrebuchet.com), principale source d'inspiration pour ce projet.

## MÉTHODE

### Théories utilisées

La modélisation du trébuchet se divise en deux grandes parties : premièrement, la simulation du mouvement du trébuchet en lui-même, puis la modélisation de la trajectoire balistique du projectile. Malgré la grande différence apparente entre les notions physiques de ces deux problèmes, ils peuvent tous les deux être exprimés à l'aide d'équations différentielles. Les solutions de ces équations sont les fonctions qui régissent le mouvement du projectile et du trébuchet dans le temps. Pour déterminer les équations différentielles du mouvement du trébuchet, nous avons fait appel au formalisme Lagrangien, tandis que pour la trajectoire balistique du projectile, nous avons exploité le principe fondamental de la dynamique énoncé par Newton.

### Description de la trajectoire balistique

Lorsque le projectile du trébuchet est libéré de la fronde, il poursuit une trajectoire balistique avec une vitesse initiale  $\vec{v}_i$ . En principe, lorsque nous ne considérons pas le frottement de l'air, la trajectoire balistique d'un projectile se comporte comme un mouvement parabolique, c'est-à-dire que la particule se déplace à vitesse constante sur l'axe  $x$  (MRU) car aucune force ne s'applique sur l'horizontale, tandis que sur l'axe  $y$ , la masse est en proie à l'accélération gravitationnelle  $\vec{g}$ , ce qui l'entraîne vers le sol de manière uniformément accélérée (MRUA). En intégrant l'accélération selon le temps, on obtient un système d'équations paramétriques décrivant une parabole :

$$\begin{cases} x(t) = v_x t + x_i \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + y_i \end{cases}$$

Cependant, dans la réalité, des forces relatives à la mécanique des fluides s'appliquent sur le projectile, ce qui fait que l'accélération du boulet n'est en vérité pas uniforme au cours du temps. Dans notre cas, il s'agit de la force de traînée ( $\vec{F}_t$ ) et de l'effet Magnus ( $\vec{F}_M$ ).

### Force de traînée

Lorsqu'un corps est en mouvement dans un fluide (air par exemple), celui-ci subit une force de frottement colinéaire à la vitesse relative  $\vec{v}$  de l'air par rapport au corps. La force de traînée ( $\vec{F}_t$ ) est dépendante du module de la vitesse relative du fluide par rapport au corps  $v$ , de la masse volumique du fluide  $\rho$  de la section efficace<sup>1</sup> du corps notée  $A$ , ainsi que d'un coefficient de frottement  $C_x$ .

$$F_t = \frac{1}{2} C_x A \rho v^2 [N]$$

### Effet Magnus

L'effet Magnus est un principe physique qui se produit lorsque qu'un corps sphérique est en rotation sur lui-même dans un fluide (MIQUEY, 2008 ; GASTEBOIS, 2017). Cet effet peut être décrit comme une différence de pression entre deux points opposés de la sphère. Il a comme conséquence d'induire une force  $\vec{F}_M$  perpendiculaire à la vitesse relative  $\vec{v}$  du fluide. La norme de cette force,  $F_M$ , est dépendante du rayon du corps  $r$ , de la vitesse  $v$ , de la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  exprimée en  $\left[\frac{rad}{s}\right]$  et de la masse volumique du fluide  $\rho$ . Ici, nous avons considéré que le vecteur de rotation  $\vec{\omega}$  était perpendiculaire au vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Étant donné que la rotation du boulet provoquée par le jet était difficile à évaluer, nous avons choisi de laisser à l'utilisateur le soin de choisir lui-même une vitesse angulaire de rotation.

$$F_M = \frac{1}{2} \pi r^3 \rho \omega v [N]$$

En appliquant la deuxième loi de Newton, nous avons pu déterminer l'accélération de la balle en tout point et en tout temps :

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_t + \vec{F}_M = m \cdot \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot \vec{g} + \vec{F}_t(\vec{v}) + \vec{F}_M(\vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le but de résoudre cette équation différentielle était de déduire la fonction de la vitesse en fonction du temps. Par la suite, il nous aurait suffi d'intégrer la solution  $\vec{v}(t)$  dans le but d'obtenir la position ; la vitesse étant égale à la variation instantanée de la position. Cependant, l'équation différentielle obtenue devenant trop complexe, nous n'avons pas été en mesure de trouver une solution analytique pour la vitesse et la position du projectile au cours du temps ; nous expliquons ci-après comment nous avons finalement procédé. À ce stade-là, nous savons seulement que la trajectoire du projectile sur la simulation ne sera pas une parabole parfaite puisque la force de traînée et l'effet Magnus s'appliquent sur le boulet.

<sup>1</sup> La **section efficace** d'un corps est la plus grande section qui coupe le corps perpendiculairement à la vitesse relative de l'air. Pour un corps sphérique, tel qu'une balle, la section efficace est une constante. Généralement, la section efficace change en fonction de l'orientation du corps dans l'air qui l'entoure.

<sup>2</sup> Le **vecteur  $\vec{\omega}$**  est un vecteur perpendiculaire au plan de rotation. Nous considérons que sa norme est positive lorsque la balle est en rotation vers l'avant et donc négative lorsque la balle est en rotation vers l'arrière (en fonction de l'axe x).

Description du mouvement du trébuchet : équation d'Euler-Lagrange

L'équation d'Euler-Lagrange permet d'exprimer la dynamique du trébuchet à l'aide de l'énergie mécanique. Cette égalité se présente ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Où  $\mathcal{L}$ , le lagrangien, correspond à la différence entre l'énergie cinétique, notée  $T$ , et l'énergie potentielle du système, notée  $V$ .

Contrairement à la mécanique newtonienne, l'approche lagrangienne n'utilise pas des coordonnées cartésiennes, car leur utilisation se révèle inefficace dans un système complexe comme le trébuchet. C'est pourquoi nous utilisons un nouveau type de coordonnées dites « généralisées » (SHAPIRO, 2010) qui permettent de représenter les contraintes du système sans utiliser forcément la position sous forme directe. Dans notre cas, il s'agit des angles formés par les bras de l'engin, à savoir :  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$ , ce qui nous donne les trois équations de Lagrange pour notre système.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} = 0$$

En effet, l'engin que nous souhaitons simuler peut se représenter uniquement avec trois angles qui varient au cours du temps ; le mouvement des bras et des masses se déduisant par la suite. Les équations ne se calculent pas en fonction de la position de tous les points, mais elles permettent tout de même de décrire leurs mouvements. Bien que toutes ces nouvelles notations puissent paraître piégeuses, la mécanique lagrangienne nous sera très utile pour déterminer les équations du mouvement.

## Méthodes d'intégration numérique

Comme décrit précédemment, la description mathématique de notre modèle repose sur des équations différentielles. Or, la solution analytique d'une équation différentielle peut parfois ne pas être déterminée. Dans ce cas, il faut estimer la fonction à l'aide d'une intégration numérique. Certaines méthodes étant plus précises que d'autres, nous avons décidé d'en comparer trois différentes : la méthode d'Euler (1<sup>er</sup> ordre), de Heun (2<sup>e</sup> ordre), ainsi que de Runge-Kutta (4<sup>e</sup> ordre). Ces trois méthodes utilisent les dérivées de la fonction du mouvement à un instant  $t$  afin d'approximer la position sur un pas de temps  $h$  très faible.

## Application sur le trébuchet

Le but étant ici de rester concis, nous présentons surtout les résultats et évitons de réécrire le développement entier des calculs. Le rapport complet est toutefois disponible en annexe.

## Équations du trébuchet

Les trois équations de Lagrange enfin développées, nous avons pu les écrire sous la forme d'un système linéaire ayant comme inconnues les trois accélérations angulaires. Cela ne veut pas dire que les coefficients ne varient pas dans le temps, mais juste qu'ils ne dépendent pas explicitement de  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$ ,  $\ddot{\gamma}$ .

$$c_{11}\ddot{\alpha} + c_{12}\ddot{\beta} + c_{13}\ddot{\gamma} = w_1$$

$$c_{21}\ddot{\alpha} + c_{22}\ddot{\beta} + c_{23}\ddot{\gamma} = w_2$$

$$c_{31}\ddot{\alpha} + c_{32}\ddot{\beta} + c_{33}\ddot{\gamma} = w_3$$

Ce système linéaire peut ensuite s'écrire sous la forme d'une multiplication matricielle, qui nous permettra de déterminer les coefficients à chaque nouveau pas de temps.

## Programmation

Ce projet a été programmé en JavaScript car ce langage est exécuté directement dans une page web ce qui permet de partager facilement le projet. Nous avons utilisé chart.js pour afficher les graphiques sur le site. Notre code se divise en deux parties principales :

1. Le calcul des angles du trébuchet et de la position du projectile pour toute la durée de la simulation
2. L'affichage de la simulation

Cette structure a été choisie pour assurer la fluidité de l'affichage. Par conséquent, au fur et à mesure de l'exécution des calculs, les résultats sont stockés dans des listes. Une fois que le projectile touche le sol, l'exécution des calculs se termine et le programme lance en temps réel l'affichage de la simulation en se basant sur les résultats déterminés précédemment. Pour plus de précision sur le fonctionnement du code, nous vous invitons à parcourir la partie programmation de notre rapport en annexe, ainsi que le code source disponible en ligne sur le site GitHub ([https://github.com/AdrienB2/TM\\_trebuchet](https://github.com/AdrienB2/TM_trebuchet)).

## Méthodes de vérification

Test avec modèle réduit (catapulte simple)

Nous avons vérifié l'intégration numérique en utilisant un modèle simplifié de notre trébuchet, où la longueur de la fronde est quasiment nulle. En effet, un modèle comme celui-ci possède une solution analytique et nous pourrions la comparer avec les graphes fournis par nos méthodes d'intégration. En étudiant donc les moments de force et le moment d'inertie de ce modèle, nous sommes arrivés à l'équation différentielle  $-c \cdot \sin \alpha = \ddot{\alpha}$ , où  $c$  dépend de l'accélération  $g$ , des masses et des longueurs du balancier. Cette équation est cependant complexe à résoudre, c'est pourquoi nous pouvons la simplifier en approximant la fonction sinus lorsque  $\alpha$  est petit.

$$-c \cdot \sin \alpha = \ddot{\alpha} \Rightarrow -c \cdot \alpha = \ddot{\alpha}, -\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{6}$$

La solution de cette équation simplifiée est une fonction harmonique :  $S(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$ , où  $A$ ,  $\omega$  et  $\phi$  déterminent l'amplitude, la fréquence et la constante de phase de  $S$ . Par conséquent, si le graphique de  $\alpha$  en fonction du temps est semblable à une fonction harmonique, nous aurons alors d'une part une preuve de la pertinence de l'intégration numérique, et d'autre part de notre simulation par rapport à la réalité.

### Étude des graphiques de $\alpha, \beta, \gamma$

Puisque les équations différentielles auxquelles nous avons fait face n'avaient pas de solution analytique, nous avons dû les approximer à l'aide d'intégrations numériques. Or, cette intégration a tendance à diverger au cours du temps, les valeurs angulaires devenant de plus en plus chaotiques. L'étude des graphiques de  $\alpha, \beta, \gamma$  en fonction du temps nous a permis de déterminer lorsque la simulation s'éloigne de la réalité, mais aussi de tester la validité des différentes méthodes d'intégration numérique en vérifiant la convergence des données lors de l'augmentation de la précision.

### Conservation de l'énergie avec modèles sans frottement

La vérification de la conservation de l'énergie consiste à établir si l'énergie du système reste constante au cours du temps. Dans le cas inverse, cela signifierait que le système "trébuchet + projectile" subit des forces dissipatives ou bien que les calculs liés au système soient incorrects. La motivation derrière cette vérification est donc de valider nos équations du mouvement. Pour ce faire, nous avons calculé à chaque pas de notre simulation la somme de l'énergie potentielle ( $U$ ) et de l'énergie cinétique ( $K$ ) du système, ce qui comprend le trébuchet ainsi que le projectile. Pour le trébuchet, il a suffi de reprendre le calcul du lagrangien et de changer le signe de l'énergie potentielle afin de connaître non pas la différence entre l'énergie potentielle et cinétique mais la somme des deux :

$$\mathcal{L} = T - V = K_{treb} - U_{treb} \Rightarrow E_{treb} = K_{treb} + U_{treb} = T + V$$

Cependant, pour que le calcul de l'énergie soit correct, nous devons nous assurer que le système soit bien isolé, ce qui n'est pas le cas puisqu'il est en proie à des forces dissipatives liées au frottement de l'air et à l'effet Magnus. Nous isolons donc le système en supprimant temporairement tout effet lié aux frottements de l'air. De plus, nous faisons en sorte d'avoir le moins de perte d'énergie dans les collisions. Dans ces conditions, si nos calculs sont corrects, l'énergie ne devrait presque pas varier.

Pour les mesures de l'énergie, nous nous sommes basés sur deux modèles à échelles différentes. Le premier correspond aux dimensions entrées par défaut tandis que le second est le modèle réduit construit par Piotr Maleika, mesurant approximativement un mètre. De plus, pour chacun des modèles, nous avons pris les mesures avec et sans les collisions afin d'éviter toute subjectivité dans notre raisonnement.

### Comparaison de la portée avec des modèles réels de trébuchets

En comparant la portée simulée de notre simulation avec la portée mesurée d'un vrai projectile de trébuchet, nous pouvons évaluer la validité de notre simulation. Ainsi, nous avons comparé la portée de notre simulation avec deux modèles réels de trébuchets :

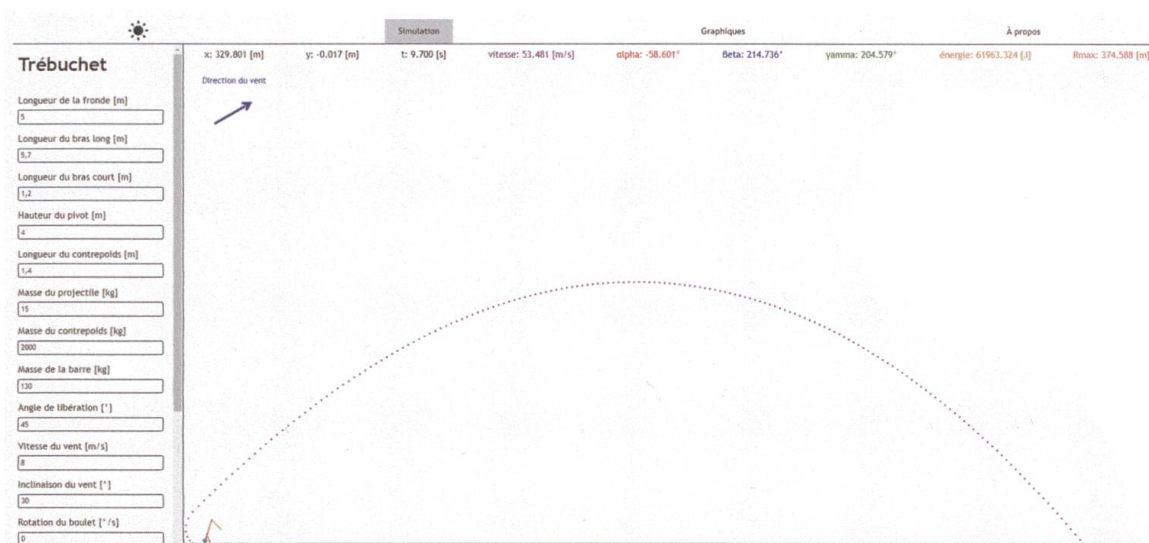
- Une maquette de trébuchet d'env. 1 m, pouvant effectuer de vrais tirs, construite par P. Maleika.
- Un trébuchet de taille réelle construit en Utah par Daniel Bertrand, sous le pseudonyme Reddit « Dawesome21 ».

## RÉSULTATS

### Visuel de la simulation

La simulation représente le produit final de notre travail et donc son résultat. Celle-ci se trouve sur notre site ([www.trebuket.org](http://www.trebuket.org)) qui peut être consulté librement. Le site permet de simuler le tir d'un trébuchet en fonction de différents paramètres (figure 1, interface sur la gauche), puis de visualiser la trajectoire du projectile (onglet « Simulation ») et l'évolution de plusieurs variables en fonction du temps (onglet « Graphiques »).





**Figure 1.** Simulation d'un tir de trébuchet sur notre site : [www.trebuket.org](http://www.trebuket.org). Les paramètres du tir peuvent être modifié dans la colonne de gauche, et les résultats du tir sont visibles dans les onglets de haut de page « Simulation » et « Graphiques ».

## Vérification de la simulation

Angle  $\alpha$  (pivot) avec des longueurs de fronde et de contrepoids proches de zéro

Lorsque la fronde et la longueur du contrepoids tendent vers zéro, le graphe de  $\alpha$  confirme nos prédictions car nous avons bien affaire à une fonction harmonique (figure 2). D'autre part, la diminution de l'amplitude au cours du temps, qui n'apparaît pas dans la solution de notre équation, est également correcte.

Convergence des valeurs des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  en fonction des différentes méthodes d'intégration

En se penchant la méthode d'Euler (degré 1), nous observons une variation de l'amplitude d'oscillation beaucoup plus élevée qu'avec les autres méthodes, ceci est particulièrement visible sur  $\gamma(t)$  où l'on aperçoit une amplitude d'oscillation de plus en plus grande vers la fin du graphique (figure 3). D'autre part, avec la méthode d'Heun (degré 2), la variation d'amplitude semble être beaucoup plus faible voire nulle au cours du temps, ce qui fait état d'une plus grande stabilité du système. Ce constat peut également être fait pour la méthode de Runge-Kutta (degré 4). Les graphiques d'Heun et Runge-Kutta ne se distinguent pas à l'œil nu, ce qui indique une convergence des valeurs des angles lors de l'augmentation de la précision de la méthode d'intégration.

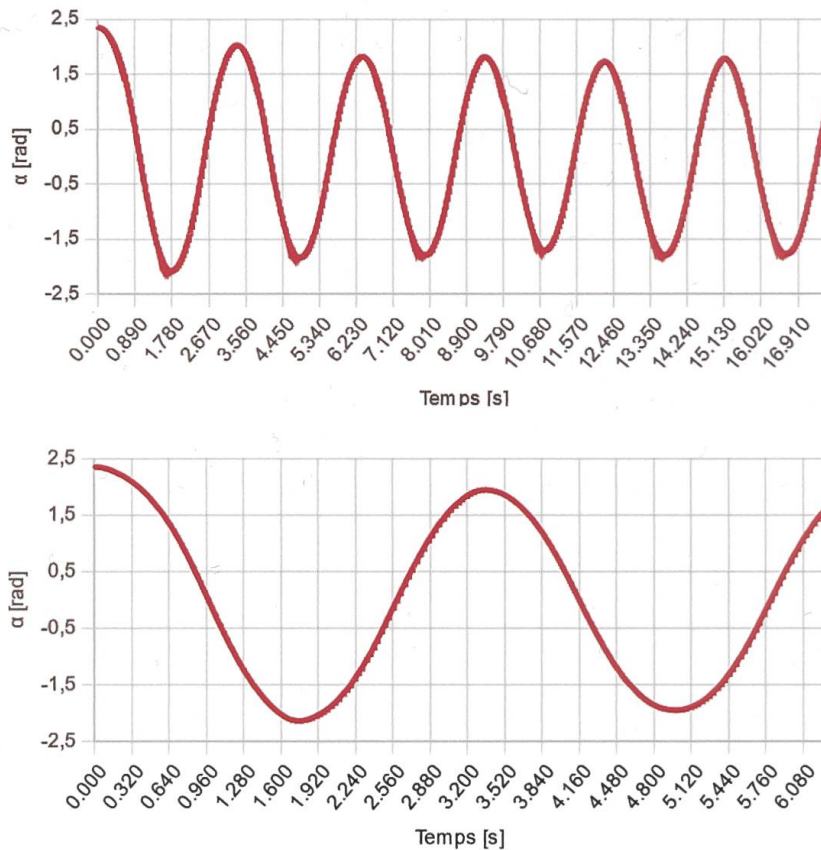
Évolution de l'énergie des modèles avec et sans frottement

Les collisions créent de légères fluctuations de l'énergie, bien visibles sur le modèle basé sur la reproduction de trébuchet de P. Maleika (figure 4, haut droite). En comparaison, les modèles sans frottement et sans collision ne présentent aucune fluctuation significative (figure 4, bas). Nous observons une conservation du niveau d'énergie du système au cours du temps.

Comparaison entre portée simulée et portée réelle de vrais trébuchets

Premièrement, nous avons comparé la portée simulée avec notre méthode à celle mesurée avec la maquette de 1 m (pouvant effectuer de vrais tirs) construite par P. Maleika. Nous avons ap-





**Figure 2.** Graphique de l'angle  $\alpha$  (pivot) avec la fronde et la longueur du contrepoids tendant vers zéro (0,01 m). Le graphe en bas est un grossissement de celui en haut pour la période entre 0 et 6 secondes.

proximé l'angle de libération (tableau 1) car il est assez compliqué à déterminer sur le modèle physique. La portée mesurée était de 26,1 m, alors que celle prédite était de 26,0 m, ce qui correspond à une dizaine de centimètres de différences entre la prédiction par notre modèle et la réalité (tableau 1).

**Tableau 1.** Données du trébuchet de P. Maleika, et comparaison de sa portée avec celle simulée par notre modèle.

Données	
$m_1$	0.121 [kg]
$m_2$	16.1 [kg]
$m_b$	5.00 [kg]
$l_1$	0.298 [m]
$l_2$	0.882 [m]
$l_3$	0.529 [m]
$l_4$	0.250 [m]
$l_5$	0.980 [m]
$l_b$	0.590 [m]
angle de libération	$\approx 40$ [ $^\circ$ ]
portée JavaScript	26.0 [m]
portée physique	26.1 [m]

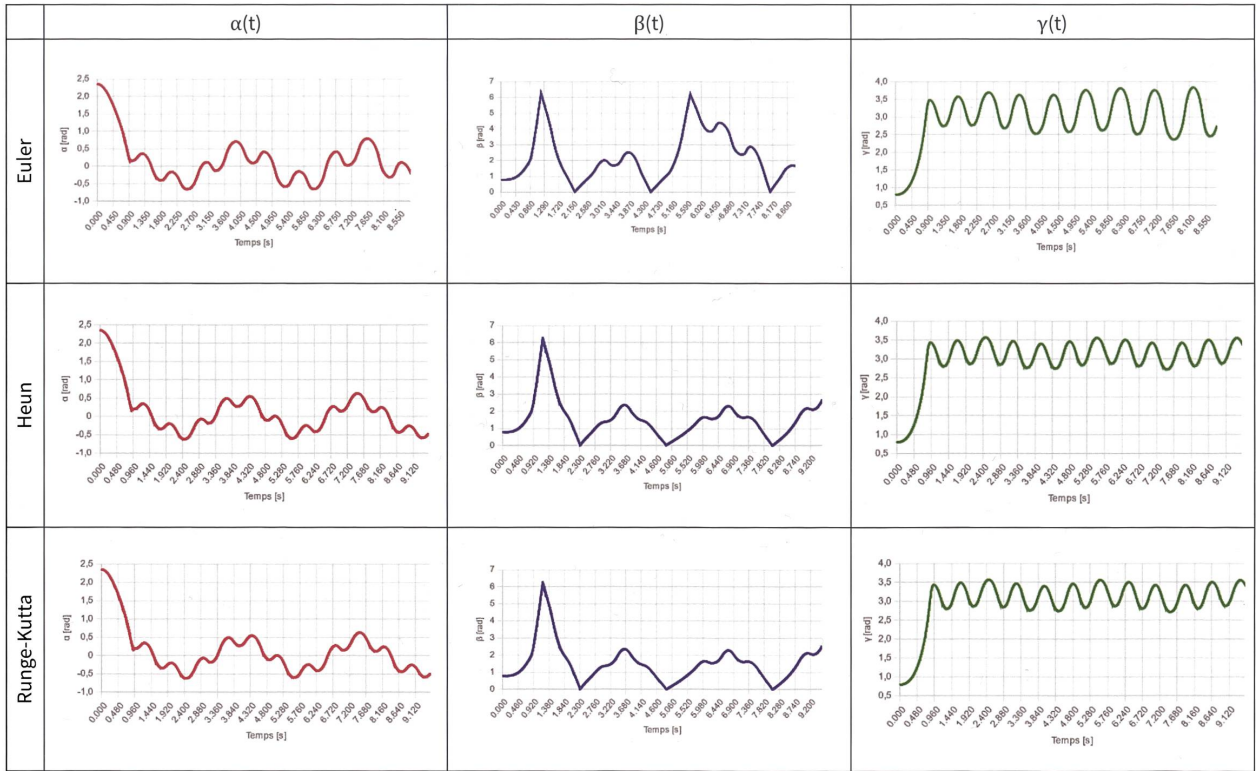


Figure 3. Variation des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  au cours du temps, en fonction des trois différentes méthodes d'intégration (Euler = 1<sup>er</sup> ordre; Heun = 2<sup>e</sup> ordre; Runge-Kutta = 4<sup>e</sup> ordre).

Deuxièmement, nous avons comparé la portée du trébuchet construit par Daniel Bertrand (taille réelle) à celle prédite par notre modèle. Il s'est avéré que l'erreur absolue entre la portée réelle du projectile et la simulation allait de 0,3 à 3 m, à une distance évaluée de 300 m.

## DISCUSSION

Dans ce travail, nous avons effectué une modélisation physique et une simulation informatique d'un trébuchet à contrepoids. Premièrement, nous avons validé la pertinence de la simulation en nous basant sur les graphiques obtenus après la fin des calculs, puis nous avons comparé les résultats obtenus avec les données réelles issues de deux trébuchets, un modèle réduit et une reproduction à taille réelle.

### Vérification des calculs

#### Test avec modèle réduit (catapulte simple)

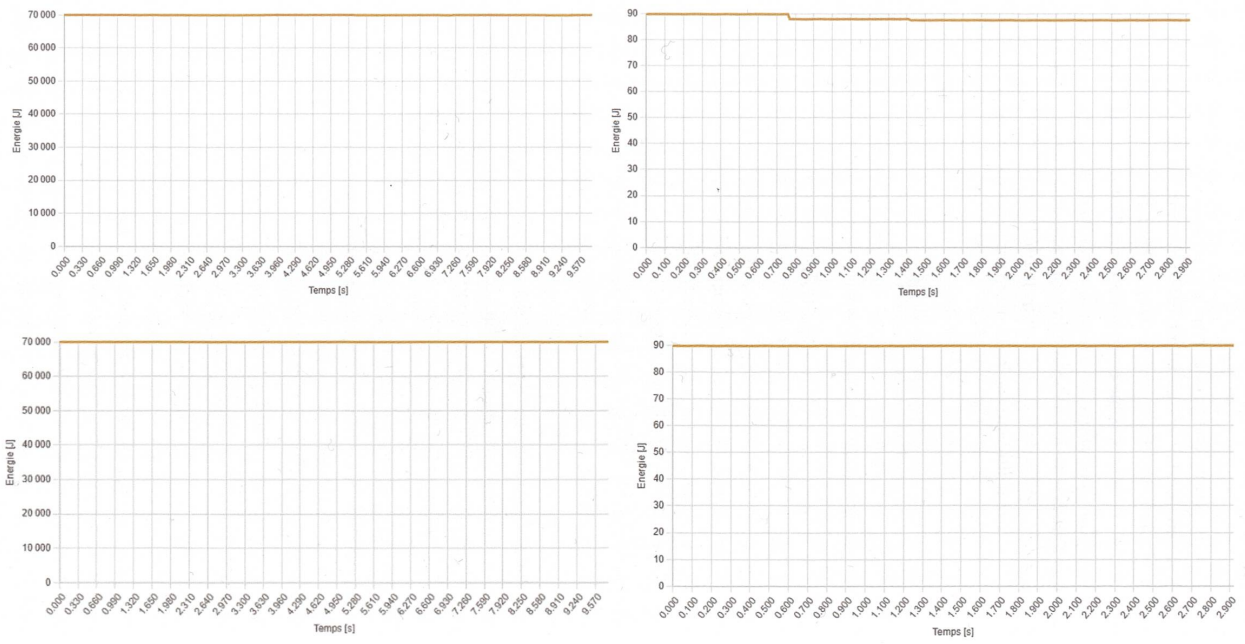
Notre solution est confirmée car, lorsque la fronde et la longueur du contrepoids tendent vers zéro, l'angle  $\alpha$  se comporte bien comme une fonction harmonique (figure 2). De plus, la diminution de l'amplitude de  $\alpha$  au cours du temps, qui n'apparaît pas dans la solution de notre équation, est bien correcte. En effet, l'approximation du sinus que nous avons appliquée induit une légère extrapolation de la fonction. En revanche, la période demeure constante, ce qui nous indique que l'intégration numérique est stable. Bien que ce test n'indique pas directement que nos calculs sur le trébuchet sont corrects, celui-ci nous indique que la simulation suit le bon chemin.

#### Étude des graphiques de $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$

Les résultats montrent directement une convergence des données lors de l'augmentation de la précision des méthodes d'intégration (figure 3). En effet, les graphiques avec la méthode d'Euler, ayant la plus faible précision, diffèrent de ceux obtenus avec la méthode d'Heun, ayant une meilleure précision. Cependant, lorsque l'on compare les graphiques d'Heun et de Runge-Kutta, nous ne pouvons pas les discriminer à l'œil nu. Ceci nous indique que plus la précision des méthodes d'intégration numérique augmente, plus les valeurs tendent à converger. Ceci prouve la validité et de la pertinence de ces différentes approximations.

#### Conservation de l'énergie avec modèles sans frottement

La comparaison des modèles avec et sans collisions indique que celles-ci peuvent créer de légères fluctuations de l'énergie (figure 4). Nous pouvons également supposer que le même phénomène se produit pour le premier modèle (figure 4, haut gauche), toutefois on ne peut pas l'observer à cause de l'échelle. Par ces observations, nous pouvons affirmer que les collisions amènent un facteur d'erreur, qui reste cependant insignifiant. Il est important de noter qu'avec ou sans collisions, l'énergie du système semble rester constante dans le temps. Cela permet de confirmer que notre système a été implémenté correctement puisqu'il respecte le principe de la conservation de l'énergie.



**Figure 4.** Comparaison de l'évolution de l'énergie pour des modèles avec (haut) et sans (bas) frottements. Les graphiques de gauche correspondent au modèle de trébuchet par défaut de la simulation, et à droite au modèle basé sur le modèle réduit P. Maleika.

## Vérification de la portée

Premièrement, nous pouvons véritablement observer la concordance entre les résultats du modèle réduit (26,1 m) et ceux de notre simulation (26,0 m), variant de seulement 0,4 % de la distance parcourue par le projectile (environ 10 cm). Pour ce qui est du trébuchet de « Dawesome21 » (taille réelle), l'erreur absolue entre la portée réelle du projectile et la simulation allait de 0,3 à 3 m à une distance évaluée de 300 m. L'erreur relative se situe donc entre 0,1 et 1 %, ce qui est largement au-dessus de nos attentes en matière de précision. Pour conclure, la comparaison avec ces deux modèles de trébuchet nous permet ainsi d'affirmer que la simulation est extrêmement fidèle à la réalité, du moins concernant la portée du boulet.

## BIBLIOGRAPHIE

- GASTEBOIS G., 2017. L'effet Magnus. [http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/magnus/mvt\\_magnus.pdf](http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/magnus/mvt_magnus.pdf)
- MIQUEY E, 2008. Trajectoire et rebond d'une balle au tennis de table. <https://www.irif.fr/~emiquey/stuff/TIPE.pdf>
- SHAPIRO J.A., 2010. Classical Mechanics. Chapter 2 - Lagrange's and Hamilton's Equations. The State University of New Jersey. Rutgers. <https://www.physics.rutgers.edu/~shapiro/507/book3.pdf>
- DE JONG R., 2020. Modelling the movements of a counterweight trebuchet while firing. Technische Universiteit (TU) Delft. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:9c66e4d3-d048-4d1b-8234-89664682181f>

## ANNEXE

À consulter sur <https://wp.unil.ch/svsn/publications/bulletins/>