Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace

Autor(en): **Mayor, B.**

Objekttyp: **Article**

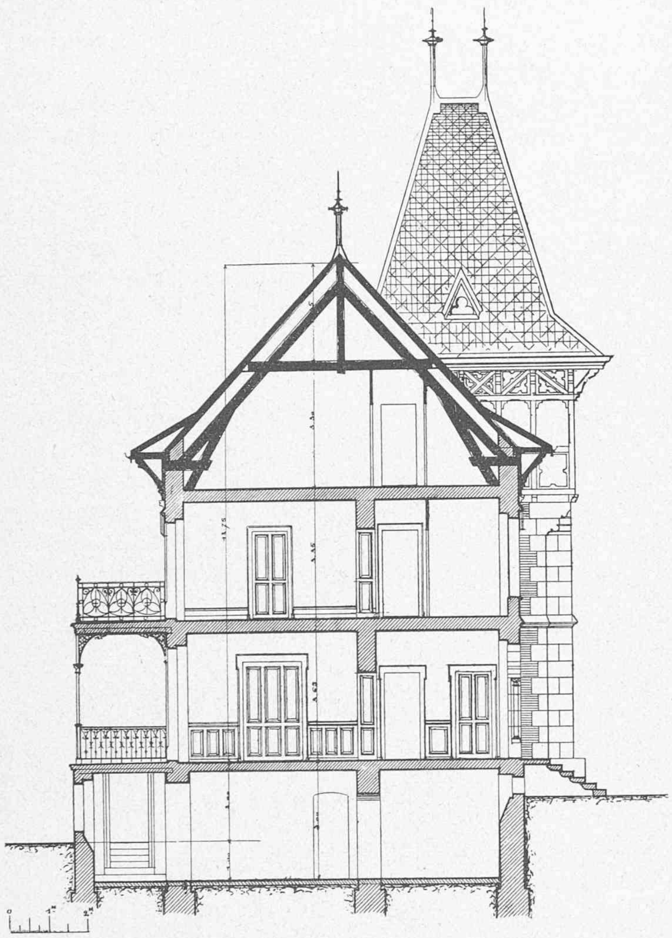
Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **30 (1904)**

Heft 2

PDF erstellt am: **05.08.2024**

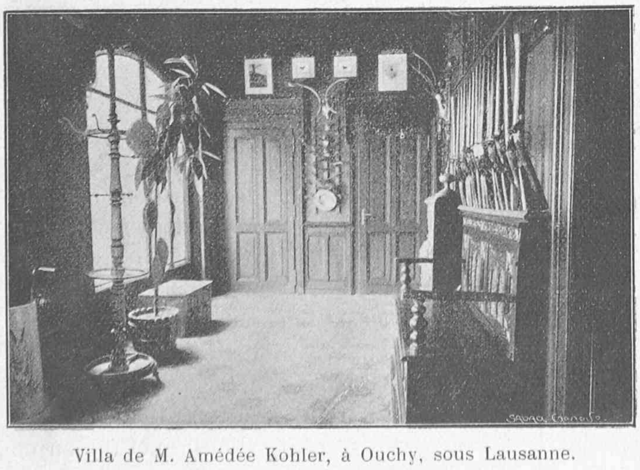
Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24107



Villa de M. Amédée Kohler, à Ouchy, sous Lausanne.
Coupe transversale.

intérieure, aux parties accessoires des façades, la menuiserie et la ferronnerie, et surtout aux arts industriels où il a produit d'excellents résultats.

Ainsi nos artistes, affranchis des préjugés d'écoles, ayant pris conscience de leur force et de leur indépendance, arriveront enfin à faire revivre un art national qui vaut bien les autres et qui sera d'autant plus admiré qu'il sera sincère et sans parti-pris.



Villa de M. Amédée Kohler, à Ouchy, sous Lausanne.
Vestibule.

Restons nous-mêmes en art comme en littérature, ne cherchons pas ailleurs ce que nous avons à notre porte, et surtout n'imitons pas les autres quand ils sont en train de se tromper.

Nous joignons à cet article, non point à titre d'exemple, car nous avons conscience de la modestie qui convient dans ce domaine, mais à titre de simple renseignement, les plans de la villa de M. Amédée Kohler, à Ouchy, qui ont été établis en cherchant à s'inspirer de ces principes, et nous espérons qu'un avenir prochain nous permettra d'admirer chez d'autres la réalisation plus complète de l'œuvre patriotique que nous venons d'esquisser.

Lausanne, 6 janvier 1904.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. MAYOR, ingénieur,
Professeur ordinaire.
Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs (1884-1887).

(Suite) [1].

CHAPITRE IV

Représentation des systèmes de forces.

52. Considérons un système de forces (F) constitué par n forces quelconques (F_1), (F_2), ..., (F_i), ..., (F_n), et supposons essentiellement que chacune de ces forces soit définie sur le plan Π, non seulement par ses deux éléments représentatifs, mais encore à l'aide de ceux qui correspondent à sa conjuguée. La force (F_i), par exemple, sera donnée par les quatre éléments F_i, F'_i, Φ_i, Φ'_i.

Imaginons, alors, qu'on concentre en chaque point tel que Φ_i une masse fictive égale à la composante verticale de la force correspondante (F_i) et, par suite, égale aussi au produit du moment, relativement au point O, de la force F'_i par le facteur constant $\frac{1}{a}$. De même, concentrons en chaque point tel que Φ'_i une masse fictive égale au produit du facteur constant $\frac{1}{a}$ par le moment de la force F_i pris par rapport au point O. Si l'on détermine enfin les résultantes F et F' des deux systèmes plans constitués respectivement par les forces F_i et F'_i, ainsi que les centres de gravité Φ et Φ' des deux systèmes de masses fictives Φ_i et Φ'_i, les quatre éléments F, F', Φ, Φ' obtenus de cette manière, définissent complètement, non seulement le système (F), mais encore son conjugué (F') par rapport au complexe directeur.

En effet, le système (F) est réductible, d'une manière et d'une seule, à deux composantes dont l'une, située dans le plan Π, sera dite la composante horizontale, et l'autre, normale à ce plan, sera dite la composante verticale. Il est d'ailleurs évident que la composante horizontale coïncide avec F, tandis que la composante verticale

[1] Voir N° du 10 janvier 1904, page 24.

passe par le point Φ et a pour intensité la somme algébrique des masses Φ_i. Elle est donc égale à la somme des moments, par rapport à O, des diverses forces F'_i multipliée par le facteur $\frac{1}{a}$ ou, ce qui revient au même, égale au produit de ce facteur $\frac{1}{a}$ par le moment de la résultante F', ce moment étant encore calculé par rapport au point O. Il résulte de là que les seuls éléments F, F' et Φ suffisent pour représenter le système considéré puisqu'il est possible d'en déduire en grandeur, direction, position et sens, deux composantes formant un système qui lui est équivalent.

On verrait, d'une manière analogue, que les trois éléments F', F et Φ' représentent complètement le système conjugué (F') ; par suite, les quatre éléments F, F', Φ et Φ' suffisent bien, comme nous l'avions annoncé, pour représenter le système donné (F) et son conjugué (F'). En conséquence, ces éléments seront appelés les éléments représentatifs des systèmes (F) et (F'). Comme il est utile, d'autre part, de distinguer les éléments représentatifs dont l'origine est purement géométrique de ceux dont la nature est plutôt mécanique, nous conviendrons désormais de désigner par les minuscules f et f' les lignes d'action des composantes horizontales F et F'. Quant aux deux points représentatifs, nous les caractériserons par les minuscules grecques φ et φ' ; les majuscules Φ et Φ' seront alors réservées pour dénoter les intensités des composantes verticales du système considéré et de son conjugué ou, ce qui revient au même, les masses fictives qu'il est souvent utile de concevoir comme concentrées sur ces points représentatifs.

53. Les éléments représentatifs qu'on vient de définir ne peuvent être choisis arbitrairement ; ils sont au contraire liés par certaines relations qu'on obtient sans aucune peine si l'on a soin de chercher préalablement les expressions analytiques qui permettent de les caractériser.

Désignons, à cet effet, par

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i$$

les coordonnées, calculées par rapport aux axes précédemment choisis, de la force (F_i). Les coordonnées du système (F) ont alors respectivement pour valeurs

$$1)\qquad \begin{aligned} X &= \sum_1^n X_i\,, & L &= \sum_1^n L_i\,,\\ Y &= \sum_1^n Y_i\,, & M &= \sum_1^n M_i\,,\\ Z &= \sum_1^n Z_i\,, & N &= \sum_1^n N_i\,; \end{aligned}$$

de plus, on voit immédiatement, en appliquant les relations du paragraphe 36 (chap. III), que les coordonnées du conjugué (F') sont données par les formules

$$2)\qquad \begin{aligned} X' &= -\ X\,, & L' &= -\ L\,,\\ Y' &= -\ Y\,, & M' &= -\ M\,,\\ Z' &= \frac{1}{a}\,N\,, & N' &= aZ\,. \end{aligned}$$

Dès lors, si l'on remarque que le moment du système (F) par rapport à l'axe Oz est égal au moment, par rapport au même axe, de la composante horizontale de ce système, on aura, entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de la ligne d'action f, la relation suivante :

$$3)\qquad x\,Y - y\,X = N,$$

qui constitue précisément l'équation de cette ligne. En raisonnant d'une manière analogue et en tenant compte des formules ci-dessus, on obtient immédiatement, pour équation de la droite f', la relation

$$4)\qquad x\,Y - y\,X = -\,aZ.$$

Si l'on remarque ensuite que la composante verticale de la force (F_i) a pour valeur Z_i et qu'on désigne par x_i et y_i les coordonnées du point où la ligne d'action de cette dernière force perce le plan Π, on aura, en appliquant les formules qui donnent le centre de gravité d'un système de masses, et en appelant x et y les coordonnées du point représentatif φ,

$$x = \frac{\sum_1^n x_i\,Z_i}{\sum_1^n Z_i}\,, \qquad y = \frac{\sum_1^n y_i\,Z_i}{\sum_1^n Z_i}\,.$$

Comme, d'ailleurs, le point $(x_i,\ y_i)$ est le point représentatif de la conjuguée (F'_i), on a (§ 36) :

$$x_i = -\,\frac{M_i}{Z_i}\,, \qquad y_i = \frac{L_i}{Z_i}\,,$$

et, par suite,

$$x = -\,\frac{\sum_1^n M_i}{\sum_1^n Z_i}\,, \qquad y = \frac{\sum_1^n L_i}{\sum_1^n Z_i}\,.$$

Finalement, en tenant compte des équations (1), on obtient, pour les coordonnées du point φ, les valeurs suivantes :

$$5)\qquad x = -\,\frac{M}{Z}\,, \qquad y = \frac{L}{Z}\,.$$

Un calcul analogue montrerait enfin que les coordonnées x' et y' du point représentatif φ' sont données par les formules

$$6)\qquad x' = a\,\frac{M}{N}\,, \qquad y' = -\,a\,\frac{L}{N}\,.$$

54. Ces résultats obtenus, il est facile de trouver les relations qui lient les éléments représentatifs d'un même système de forces.

Tout d'abord, la forme même des équations (3) et (4) montre que les deux lignes représentatives f et f' sont parallèles, et les deux premières relations du groupe (2) indiquent que les composantes horizontales F et F' sont égales, parallèles, et de sens opposés. D'ailleurs, ces propriétés résultent immédiatement du fait que deux forces telles que F_i et F'_i sont égales, parallèles et de sens opposés.

Si l'on compare ensuite les équations (5) et (6), on obtient immédiatement

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} ;$$

par suite, les trois points O, φ et φ' sont en ligne droite.

Jusqu'ici les éléments représentatifs d'un système de forces satisfont donc aux mêmes relations que les éléments représentatifs d'une force; cependant, comme nous le verrons, les points φ et φ' ne sont plus respectivement situés sur les lignes représentatives correspondantes f et f'. En revanche, ils satisfont à une condition essentielle qu'on peut obtenir de la manière suivante.

Soit :

$$y = kx$$

l'équation d'une droite quelconque issue du point O et coupant en c et c' (fig. 10) les deux droites représentatives f et f'. On trouve facilement que les droites f et f' sont définies par les équations suivantes :

$$7) \quad xY - yX - N - \frac{LX + MY + NZ}{L + kM}(y - kx) = 0\,,$$

$$8) \quad xY - yX + aZ - \frac{LX + MY + NZ}{L + kM}(y - kx) = 0\,,$$

qui ne diffèrent l'une de l'autre que par les termes indépendants des variables x et y. Par suite, ces deux droites sont parallèles quelle que soit la valeur attribuée au coefficient k, c'est-à-dire quelle que soit la direction de la droite issue de l'origine. Si donc on considère une homologie ayant pour centre le point O, pour axe la droite à l'infini du plan Π et admettant f et f' pour droites correspondantes, on voit que les points φ et φ' se correspondent aussi dans cette même homologie. On peut donc énoncer le théorème fondamental qui suit :

Les lignes représentatives d'un même système de forces sont parallèles, tandis que les points représentatifs sont alignés sur O. De plus, ces lignes et ces points se correspondent dans une même homologie, ayant O pour centre et la droite à l'infini du plan Π pour axe.

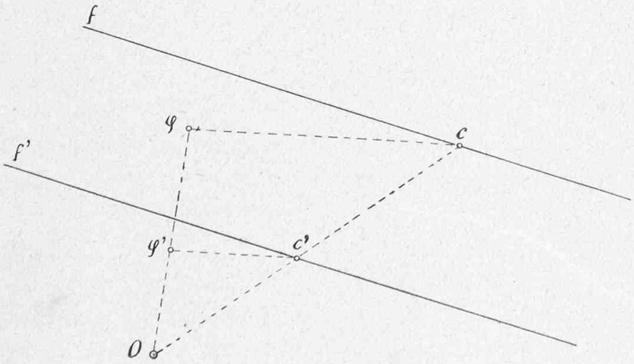


Fig. 10.

55. Réciproquement, si l'on considère deux droites f, f' et deux points φ, φ' satisfaisant à toutes les conditions qui viennent d'être énoncées, et qu'on applique, sur les droites f et f', deux forces F et F' égales, mais de sens opposés, deux systèmes de forces (F) et (F'), conjugués par rapport au système directeur, se trouvent définis dans l'espace.

Admettons, en effet, que le système (F) soit constitué par la composante horizontale F et par une composante verticale Φ passant par φ et ayant pour intensité le produit du moment de F', relativement à O, par le facteur $\frac{1}{a}$. De même, supposons que le système (F') soit constitué par la composante horizontale F' et par une composante verticale Φ' passant par φ' et ayant une intensité égale au produit de $\frac{1}{a}$ par le moment de F relativement à O. Pour vérifier la propriété réciproque qu'on vient d'énoncer, il suffit d'établir que ces deux systèmes sont bien conjugués par rapport au système directeur.

Or le système résultant de (F) et de (F') est constitué par les quatre forces F, F' Φ, Φ'. Si, d'ailleurs, on désigne par r et r' les distances de O aux deux points φ et φ', et par d et d' les distances de ce même point O aux droites f et f', on déduit immédiatement de la comparaison des triangles semblables de la figure 10,

$$rd' - r'd = 0\,.$$

Mais,

$$\Phi = \frac{1}{a} F'd'\,,$$

$$\Phi' = -\frac{1}{a} Fd\,;$$

par suite, puisque F est égal à F' en valeur absolue,

$$r\Phi + r'\Phi' = \frac{F}{a}(rd' - r'd) = 0\,.$$

En conséquence, la résultante des deux forces Φ et Φ' passe par le point O; de plus, son intensité est donnée par la formule

$$\Phi + \Phi' = \frac{1}{a} F(d' - d)\,.$$

D'autre part, les deux forces F et F' forment un couple dont le moment normal au plan Π a pour valeur, en tenant compte de son signe,

$$F(d' - d)\,.$$

Ce moment étant d'ailleurs égal à celui du système résultant par rapport à son axe central, puisque cet axe central, qui passe par O, est normal à Π, la flèche de ce système a pour valeur :

$$\frac{F(d - d')}{\Phi + \Phi'} = a.$$

Le système directeur et le système résultant de (F) et de (F') ont donc même axe central et même flèche; par suite, leurs complexes d'action sont nécessairement confondus, ce qu'il fallait précisément établir.

56. L'homologie qui relie les éléments représentatifs d'un même système est entièrement définie par un seul couple d'éléments correspondants : l'axe et le centre de cette homologie sont, en effet, indépendants du système considéré et, d'ailleurs, toujours connus. De là résultent quelques conséquences utiles pour la suite.

En premier lieu, si l'on connaît trois des éléments représentatifs d'un système, il devient possible de déterminer immédiatement le quatrième.

Admettons, en effet, qu'on connaisse, par exemple, f, f' et φ. Si l'on désigne, comme précédemment, par c et c' (fig. 10) les points où une droite quelconque issue de O coupe f et f', qu'on mène ensuite par c' une parallèle à $c\varphi$, cette parallèle passe nécessairement par le point cherché φ' puisqu'elle est l'homologue d'une droite qui renferme φ. Le point φ' est dès lors bien déterminé, car il est, d'autre part, situé sur $O\varphi$.

Un procédé analogue permettrait ensuite, en supposant connus les éléments φ, φ' et f, de déterminer f'.

Enfin, il est encore nécessaire de remarquer que les deux points φ et φ' peuvent être déterminés lorsqu'on connaît, en outre de f et f', deux droites sur lesquelles ces points doivent être respectivement situés.

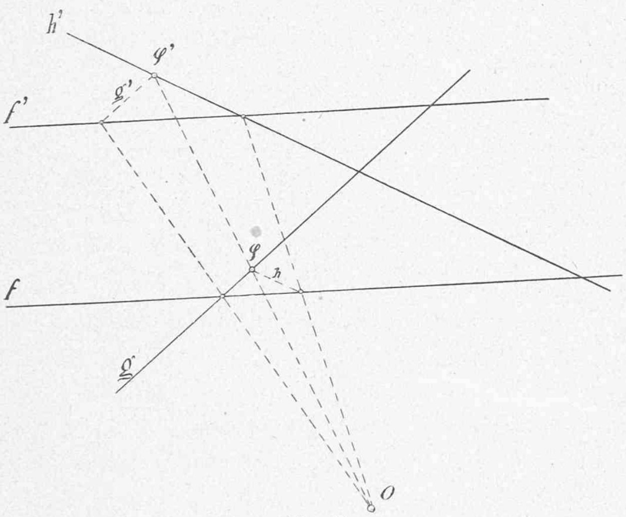


Fig. 11.

Soient, en effet, f et f' (fig. 11) les lignes représentatives données, g et h' deux droites sur lesquelles doivent respectivement se trouver φ et φ'. Si l'on joint à O le point de rencontre de g et de f, on obtient une droite qui coupe f' en un point par lequel doit passer la droite g', homologue de g. On peut d'ailleurs tracer cette droite g', car elle est parallèle à g, et son intersection avec h' détermine le point φ'. Quant au deuxième point cherché φ, on peut l'obtenir soit par un procédé analogue, soit plus directement en cherchant l'intersection de $O\varphi'$ et de g.

Ajoutons encore qu'une méthode semblable à celle qu'on vient de décrire permettrait de déterminer f et f', en supposant qu'on connaisse, en outre de φ et φ', deux points par lesquels doivent respectivement passer ces droites.

Ces résultats obtenus, il est nécessaire d'examiner quelques cas particuliers qui se présentent fréquemment dans l'étude des systèmes de forces.

57. Cas d'un système réductible à une seule résultante. On sait que lorsqu'un système est réductible à une seule résultante, son automoment s'annule. On a donc, dans ce cas,

$$LX + MY + NZ = 0,$$

et les équations (7) et (8), qui définissent les droites $c\varphi$ et $c'\varphi'$ de la figure 10, deviennent respectivement identiques aux équations des lignes représentatives f et f'. Le point φ est donc situé sur f et le point φ' sur f'.

Réciproquement, lorsque l'un des points représentatifs, φ par exemple, est situé sur la ligne représentative correspondante f, l'autre point représentatif est situé sur la deuxième ligne représentative, et le système est réductible à une seule résultante.

Dans ce cas, en effet, la droite $c\varphi$, représentée par l'équation (7), coïncide avec f, ce qui entraîne nécessairement la condition

$$LX + MY + NZ = 0\ ;$$

nous pourrons donc énoncer le résultat suivant :

Pour qu'un système de forces soit réductible à une seule résultante, il faut et il suffit que l'une de ses lignes représentatives passe par le point représentatif correspondant.

58. Cas d'un système réductible à un couple. Lorsqu'un système est réductible à un couple, on a simultanément :

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0.$$

L'équation (3), qui caractérise la ligne représentative f, prend alors la forme

$$0 = N\ ,$$

ce qui indique que cette droite est rejetée à l'infini. De plus, l'équation (4), qui définit la ligne représentative f', se réduit à l'identité

$$0 = 0\ ;$$

cette droite est donc indéterminée dans le plan Π. Comme, d'autre part, un couple est assimilable à un système réductible à une seule résultante infiniment petite, mais agissant à distance infinie, le point représentatif φ doit se trouver sur f. Par suite, ce point est aussi à l'infini, ce qui résulte d'ailleurs des équations (5) qui deviennent :

$$x = \infty\ ,\ y = \infty\ .$$

Enfin, comme les quantités L, M et N sont en général différentes de zéro, les formules (6) montrent que le point φ' est bien déterminé et reste, en général, à distance finie.

Réciproquement, lorsque le point φ et la droite f sont à l'infini, on a nécessairement :

$$X = 0\ ,\ Y = 0\ ,\ Z = 0\ .$$

La droite f' est alors indéterminée et le système correspondant est réductible à un couple.

D'après cela, les éléments représentatifs d'un couple se réduisent simplement à un point φ', situé à distance finie, et à une force nulle, F, ayant pour ligne d'action f la droite à l'infini du plan Π. D'ailleurs, il est bien évident que, pour définir la force nulle F, il est nécessaire de donner son moment par rapport au point O. Ce moment, divisé par la quantité a, donne la composante verticale Φ' de la conjuguée du couple, composante qui coïncide avec cette conjuguée et qu'il est utile, comme nous l'avons déjà expliqué, d'assimiler à une masse fictive concentrée au point φ'. Ajoutons encore que le point φ'

est le point représentatif de l'un quelconque des plans du couple considéré.

59. Cas d'un système réductible à une seule résultante normale au plan Π. On a, dans ce cas,

$$X = 0\,, \quad Y = 0\,, \quad N = 0\,,$$

et l'on déduit, des formules (2)

$$X' = 0\,, \quad Y' = 0\,, \quad Z' = 0\,.$$

Par suite, lorsqu'un système est réductible à une seule résultante normale au plan Π, le système conjugué est réductible à un couple. Il résulte immédiatement, alors, du paragraphe précédent que la droite f' et le point φ, sont rejetés à l'infini, et que la droite f est indéterminée. Les éléments représentatifs d'un tel système se réduisent donc au point φ et à une force nulle F' agissant à distance infinie et dont le moment, par rapport au point O, doit être donné si l'on veut que ce système soit bien défini.

60. Cas d'un système en involution avec le système directeur. Il résulte des formules (1) du chapitre III, que, pour qu'un système (F) soit en involution avec le système directeur, il faut et il suffit que l'on ait

$$N + aZ = 0\,,$$

ou

$$aZ = -N\,.$$

Remplaçant alors aZ par sa valeur dans l'équation (4) de ce chapitre, on voit que celle-ci devient identique à (3) ; par suite, les droites représentatives f et f' coïncident. Opérant ensuite la même substitution dans les formules (5) et comparant les résultats obtenus aux formules (6) on voit que

$$x = x'\,, \quad y = y'\,,$$

et les deux points représentatifs φ et φ' sont aussi confondus.

Réciproquement, comme les lignes représentatives ou les points représentatifs d'un même système ne sont confondus que lorsque

$$N + aZ = 0\,,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

Pour qu'un système soit en involution avec le système directeur, il faut et il suffit, par exemple, que ses deux lignes représentatives soient confondues et, alors, ses deux points représentatifs sont également confondus.

61. Représentation des complexes linéaires. On sait que lorsqu'on multiplie par un même facteur arbitraire les six coordonnées d'un système de forces, le complexe d'action de ce système ne change pas ; il résulte, de plus, des équations (4), (5), (6) et (7) que cette opération ne modifie pas non plus les éléments f, f', φ et φ', qui représentent ce système. D'autre part, ces mêmes équations montrent que lorsque trois seulement des éléments f, f', φ, φ' sont connus, il est possible de déterminer six nombres proportionnels aux coordonnées du système correspondant. Comme, enfin, un complexe linéaire quelconque (Γ) peut toujours être considéré comme le complexe d'action d'un système de forces, on voit que les quatre éléments purement géométriques f, f', φ et φ', utilisés dans la représentation des systèmes de forces, suffisent pour représenter complètement, non seulement un complexe linéaire (Γ), mais encore son conjugué (Γ') par rapport au système directeur.

Ces éléments représentatifs ont d'ailleurs des significations géométriques simples. En effet, tout système (F) ayant (Γ) pour complexe d'action est, comme nous l'avons vu, réductible à deux composantes dont l'une, normale à Π, passe par φ, tandis que l'autre, située dans le plan Π, a f pour ligne d'action. Comme les lignes d'action de ces deux composantes sont, non seulement conjuguées par rapport à (Γ), mais encore rectangulaires, on voit que φ est le foyer du plan Π par rapport à (Γ), et f la caractéristique de ce même plan par rapport au même complexe. On verrait enfin, d'une manière analogue, que φ' et f' sont, respectivement, le foyer et la caractéristique de Π par rapport au complexe conjugué (Γ').

Il n'est presque pas nécessaire d'ajouter que les éléments représentatifs d'un complexe satisfont à la condition d'homologie précédemment définie. De plus, on déduit immédiatement des résultats obtenus dans l'étude des divers cas particuliers que présentent les systèmes de forces, les deux propositions suivantes :

Pour qu'un complexe linéaire soit spécial, il faut et il suffit que ses points représentatifs soient respectivement unis aux lignes représentatives correspondantes. De plus, lorsque cette condition est satisfaite, les éléments représentatifs du complexe coïncident avec ceux de sa directrice.

Pour qu'un complexe linéaire soit en involution avec le système directeur, il faut et il suffit, par exemple, que ses deux lignes représentatives coïncident, et alors les points représentatifs sont confondus. Inversement, lorsque les points représentatifs sont confondus, les lignes représentatives coïncident et le complexe correspondant est en involution avec le système directeur.

62. Condition d'involution de deux complexes linéaires. Si l'on désigne par u, v les coordonnées tangentielles de la ligne représentative f d'un complexe (Γ), par u', v' celles de la ligne représentative f', on déduit immédiatement des formules (4) et (5) :

$$u = -\frac{Y}{N}\,, \quad v = \frac{X}{N}\,,$$

$$u' = \frac{Y}{N}\,, \quad v' = \frac{X}{aZ}\,.$$

En combinant ensuite ces relations aux équations (7) et (8), on obtient facilement les formules suivantes, qui permettent de calculer les coordonnées homogènes d'un complexe linéaire dont on connaît trois des éléments représentatifs :

$$X = vN\,, \qquad L = -\frac{uy}{au'}N\,,$$

$$Y = -uN\,, \qquad M = \frac{ux}{au'}N\,,$$

$$Z = -\frac{u}{au'}N\,, \qquad N = N\,.$$

Ces relations obtenues, considérons deux complexes linéaires (Γ_1) et (Γ_2). Pour qu'ils soient en involution, il faut et il suffit que leurs coordonnées satisfassent à la condition

$$L_1X_2 + M_1Y_2 + N_1Z_2 + X_1L_2 + Y_1M_2 + Z_1N_2 = 0$$

qu'on peut écrire, en tenant compte des formules précédentes,

$$L_2 a v_1 u'_1 - M_2 a u_1 u'_1 - N_2 u_1 + Z_2 a u'_1 + u_1 (x_1 Y_2 - y_1 X_2) = 0.$$

Or cette équation ne change pas lorsqu'on modifie (Γ_1) de manière que, les lignes représentatives f_1 et f'_1 restant fixes, le point φ_1 se déplace parallèlement à la droite représentative f_2 de (Γ_2) ; car, dans ce cas, le seul terme

$$x_1 Y_2 - y_1 X_2$$

qui dans la relation précédente dépend de φ_1, conserve la même valeur. Comme on peut, en particulier, déplacer φ_1 jusqu'à ce que ce point tombe sur f_1 en prenant la position désignée par φ_{12} sur la figure 12, et que, dans ces conditions, φ'_1 tombe également sur f'_1, en prenant la position désignée par φ'_{12}, on voit qu'il est possible, dans l'étude des conditions d'involution de deux complexes (Γ_1) et (Γ_2), de remplacer (Γ_1) par une droite (γ_{12}) définie par les éléments représentatifs $f_1, f'_1, \varphi_{12}, \varphi'_{12}$. De même, il est évidemment possible de remplacer (Γ_2) par une droite (γ_{21}) ayant f_2 et f'_2 pour lignes représentatives et, pour points représentatifs, deux points φ_{21} et φ'_{21} tels que les deux directions $\varphi_2\,\varphi_{21}$ et $\varphi'_2\,\varphi'_{21}$ soient parallèles à f_1. Enfin, puisque deux droites se coupent lorsqu'elles sont en involution et réciproquement, il suffira, pour résoudre le problème proposé, d'appliquer aux deux droites (γ_{12}) et (γ_{21}) la condition de rencontre obtenue précédemment ; si cette condition est vérifiée les complexes sont en involution, et ils ne le sont pas si cette condition n'est pas satisfaite.

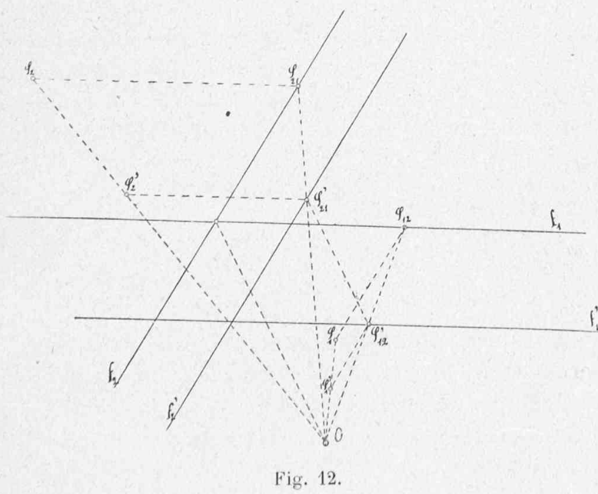


Fig. 12.

Un calcul analogue au précédent montrerait qu'on peut aussi substituer au complexe (Γ_1) une droite (γ_{12}) ayant φ_1 et φ'_1 pour points représentatifs et, pour lignes représentatives, deux droites f_{12} et f'_{12} passant respectivement, d'une part, par φ_1 et φ'_1 et, d'autre part, par les points de rencontre de f_1 et f'_1 avec la droite $\varphi_2\,\varphi'_2$. De là résulte un deuxième procédé corrélatif du précédent et permettant de reconnaître dans quel cas deux complexes donnés sont en involution.

63. Représentation des congruences linéaires. Tous les complexes linéaires qui passent par une congruence linéaire forment un système à deux termes et, réciproquement, tous les complexes d'un système à deux termes passent par une même congruence linéaire. Dans ces conditions, il suffit, pour obtenir la représentation d'une congruence linéaire, de chercher la représentation du système à deux termes.

Considérons alors un système à deux termes (C) défini par deux de ses complexes (Γ_1) et (Γ_2). Soient :

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ L_1,\ M_1,\ N_1$$

et

$$X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ L_2,\ M_2,\ N_2$$

les coordonnées de ces complexes, et désignons, en outre, par $f_1, f'_1, \varphi_1, \varphi'_1$, et $f_2, f_2', \varphi_2, \varphi_2'$ leurs éléments représentatifs.

Les coordonnées d'un complexe quelconque (Γ) appartenant à (C) sont données par les formules :

$$X = X_1 + \lambda X_2\ , \qquad L = L_1 + \lambda L_2\ ,$$
$$Y = Y_1 + \lambda Y_2\ , \qquad M = M_1 + \lambda M_2\ ,$$
$$Z = Z_1 + \lambda Z_2\ , \qquad N = N_1 + \lambda N_2\ ,$$

où λ désigne un paramètre. Par suite, et en vertu des formules (3) et (4), les équations des lignes représentatives f et f' de (Γ) auront les formes suivantes :

$$(xY_1 - yX_1 - N_1) + \lambda\,(xY_2 - yX_2 - N_2) = 0\ ,$$
$$(xY_1 - yX_1 + aZ_1) + \lambda\,(xY_2 - yX_2 + aZ_2) = 0\ ,$$

tandis que, en vertu des formules (5) et (6), les coordonnées des points représentatifs φ et φ' du même complexe ont pour valeurs

$$x = -\frac{M_1 + \lambda M_2}{Z_1 + \lambda Z_2}\ , \qquad y = \frac{L_1 + \lambda L_2}{Z_1 + \lambda L_2}\ ,$$

$$x' = a\,\frac{M_1 + \lambda M_2}{N_1 + \lambda N_2}\ , \quad y = -\,a\,\frac{L_1 + \lambda L_2}{N_1 + \lambda N_2}\ .$$

Par conséquent, lorsque λ varie, c'est-à-dire quand (Γ) décrit le système (C), les droites f et f' engendrent chacune un faisceau plan, tandis que φ et φ' décrivent chacun une ponctuelle. De plus, il résulte aussi bien de ces dernières relations que des conditions géométriques qui lient les éléments représentatifs d'un même complexe, que ces faisceaux et ces ponctuelles sont en correspondance projective. En outre, il est manifeste que les faisceaux engendrés par f et f' ont pour sommets : le premier, le point C commun à f_1 et à f_2, le second, le point C' commun à f_1' et à f_2'; qu'enfin les ponctuelles c et c' décrites par φ et φ' passent : la première par φ_1 et φ_2, la seconde par φ_1' et φ_2'.

D'après cela et en résumé, à tout système à deux termes correspond un ensemble formé de deux points C, C' et de deux droites c, c'. Un complexe quelconque appartenant au système est alors tel que ses lignes représentatives f et f' passent respectivement par C et C', tandis que ses points représentatifs φ et φ' sont respectivement situés sur c et c'. Si, d'ailleurs, on connaît un seul des éléments représentatifs de ce complexe, on peut immédiatement déterminer les trois autres. Supposons, en effet, qu'on connaisse f, par exemple ; on peut alors tracer la droite f' puisqu'elle est parallèle à f et qu'elle passe par C'. Dès lors, il devient possible de déterminer φ et φ' à l'aide de la construction indiquée au paragraphe 56, car on possède maintenant les deux lignes représentatives du complexe et deux droites sur lesquelles sont respectivement situés les points représentatifs.

Réciproquement, on vérifie sans aucune peine qu'à tout ensemble formé de deux points quelconques C, C' et de deux droites également quelconques c et c', on peut faire correspondre un système à deux termes et un seul. Les éléments représentatifs f, f', φ et φ' d'un complexe quelconque de ce système sont alors caractérisés comme suit : f et f' passent respectivement par C et C', tandis que φ et φ' sont respectivement situés sur c et c'. En conséquence, les quatre éléments C, C', c, c' doivent être considérés comme les éléments représentatifs d'un système à deux termes ou d'une congruence linéaire.

64. Quelques remarques doivent être faites au sujet de ce qui précède.

En premier lieu, on sait qu'un système à deux termes comprend, en général, un complexe linéaire, et un seul, qui soit en involution avec le système directeur. Il est d'ailleurs bien simple d'obtenir les éléments représentatifs d'un pareil complexe. Ses lignes représentatives étant, en effet, confondues, elles coïncident l'une et l'autre avec la droite $C\,C'$; de même, et pour une raison analogue, ses deux points représentatifs coïncident avec le point de rencontre de c et c'.

En second lieu, lorsque deux des complexes d'un système à deux termes sont en involution avec le système directeur, il en est de même pour tous les autres. Les deux points C, C' sont alors confondus ainsi que les droites c et c' ; dans ces conditions, ces éléments ne suffisent plus pour définir le système correspondant et il devient nécessaire de faire intervenir la correspondance projective qui lie le faisceau des lignes représentatives à la ponctuelle des points représentatifs. D'ailleurs, on vérifie immédiatement, à l'aide des formules données plus haut, d'une part, que cette correspondance est telle qu'au rayon du faisceau qui passe par O doit correspondre le point à l'infini de la ponctuelle, et, d'autre part, que lorsque cette correspondance est définie, le système à deux termes est lui-même déterminé.

Une dernière observation doit encore être faite. Une congruence étant complètement déterminée par ses deux directrices, il semble naturel, à première vue, de la définir à l'aide des éléments représentatifs de ces deux droites. Mais, en procédant ainsi, on serait conduit, dans certains cas, à représenter une congruence réelle à l'aide d'éléments imaginaires, puisqu'une congruence réelle peut avoir ses deux directrices imaginaires.

Ces remarques faites, il y aurait lieu de rechercher le mode de représentation des systèmes de complexes linéaires à 3, 4 et 5 termes ; mais cela nous ferait sortir des limites que nous avons dû fixer à cette série d'articles et nous nous bornerons, pour terminer ce chapitre par quelques applications, à montrer comment les résultats obtenus peuvent être utilisés dans la solution de quelques problèmes usuels relatifs à la théorie des complexes linéaires.

65. Problème I. Déterminer le plan focal d'un point par rapport à un complexe linéaire donné par ses éléments représentatifs.

Soient P, P' (fig. 13) les éléments représentatifs du point donné (P) et f_1, f_1', φ_1, φ_1' ceux du complexe linéaire, donné également (Γ).

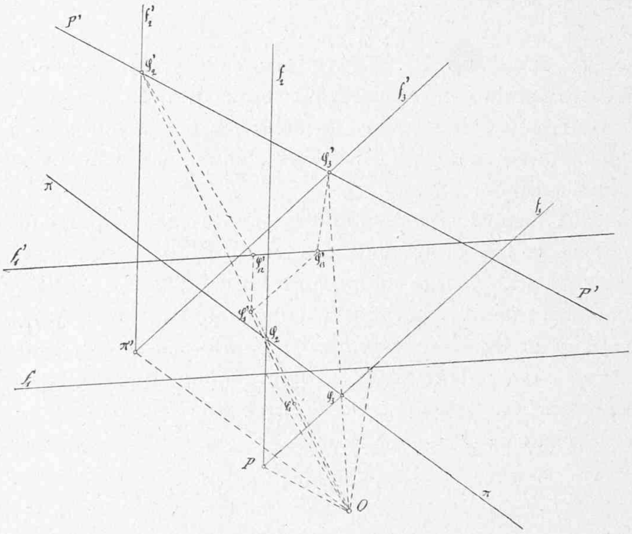


Fig. 13.

Toutes les droites de (Γ) qui passent par (P) forment un faisceau dont le plan coïncide précisément avec le plan focal cherché, et, pour résoudre le problème proposé, il suffira de déterminer les éléments représentatifs de deux de ces droites. De plus, on sait que chacune de ces droites peut être considérée comme la directrice d'un complexe spécial en involution avec (Γ).

D'après cela, faisons passer par P une droite quelconque f_2. Si nous la considérons, ce qui est évidemment possible, comme la ligne représentative d'une droite (f_2) issue de (P) et appartenant à (Γ), il devient possible de déterminer son point représentatif φ_2'. Car, d'une part, ce point est situé sur P' ; d'autre part, si l'on projette φ_1' parallèlement à f_2 et jusque sur f_1', on obtient un point φ_{12}' tel que la droite de l'espace définie par les deux éléments f_1 et φ_{12}' doit rencontrer la droite définie par f_2' et φ_2'. Si donc on mène par φ_{12}' une parallèle à la droite qui passe par O et par le point de rencontre de f_1 et de f_2, cette parallèle coupe P' au point cherché φ_2'.

En considérant ensuite une deuxième ligne représentative f_3 issue de P, on peut, par l'application du même procédé, déterminer un point représentatif φ_3' tel que la droite correspondante (f_3) passe par (P) et appartienne encore au complexe (Γ). Le plan cherché est alors déterminé par les deux droites (f_2) et (f_3), et l'on peut obtenir, à l'aide d'opérations déjà décrites, ses éléments représentatifs π et π'.

Il n'est presque pas nécessaire d'ajouter qu'on résoudrait par un procédé semblable le problème ayant pour objet la recherche du foyer d'un plan par rapport à un complexe linéaire.

66. Problème II. Déterminer la conjuguée d'une droite donnée par rapport à un complexe linéaire.

Il suffit de choisir sur la droite donnée deux points quelconques et de déterminer leurs plans focaux en appliquant la méthode qu'on vient de décrire. La droite d'intersection de ces deux plans constitue précisément la conjuguée cherchée.

67. Problème III. Déterminer l'axe d'un complexe linéaire donné par ses éléments représentatifs.

On résout facilement ce problème en s'appuyant sur la remarque suivante qui, d'ailleurs, nous sera utile dans d'autres circonstances.

Tout d'abord, une résultante générale quelconque d'un système (F) a pour éléments représentatifs une force égale et parallèle à la composante horizontale F de ce système et un point astreint à la seule condition de se trouver sur la ligne représentative f' de ce système. Cela résulte immédiatement du fait que le moment de la composante F' par rapport à O est proportionnel à la composante verticale Φ.

D'autre part, les diamètres du complexe d'action de (F) étant parallèles à la résultante générale de ce système, les lignes représentatives de leurs droites conjuguées coïncideront toutes avec la ligne représentative f' de ce complexe. Dans ces conditions, les plans normaux aux diamètres auront pour point représentatif commun l'antipôle de f' par rapport à la circonférence directrice. L'axe cherché étant le lieu des foyers de ces plans, il suffira, pour résoudre le problème proposé, de déterminer le foyer de l'un d'entre eux, puis de mener par ce point une parallèle à la direction des diamètres.

68. Problème IV. Déterminer les directrices d'une congruence linéaire définie par ses éléments représentatifs.

On sait que les directrices d'une congruence linéaire coïncident avec les directrices des complexes spéciaux appartenant au système à deux termes qui correspond à cette congruence.

Soient alors C, C', c, c' (fig. 14) les éléments représentatifs de la congruence donnée ou du système à deux termes correspondant (C). Désignons, de plus et d'une manière générale, par f, f', φ et φ' les éléments représentatifs d'un complexe quelconque (Γ) appartenant à (C). Nous avons vu que, lorsque (Γ) varie, f engendre un faisceau de centre C projectif à la ponctuelle c décrite par φ. Dans ces conditions, le point d'intersection A de f et de c engendre une ponctuelle projective et superposée à celle qui correspond à φ. Comme, d'ailleurs, la ligne représentative d'un complexe spécial est toujours unie au point représentatif correspondant, il suffit, pour résoudre le

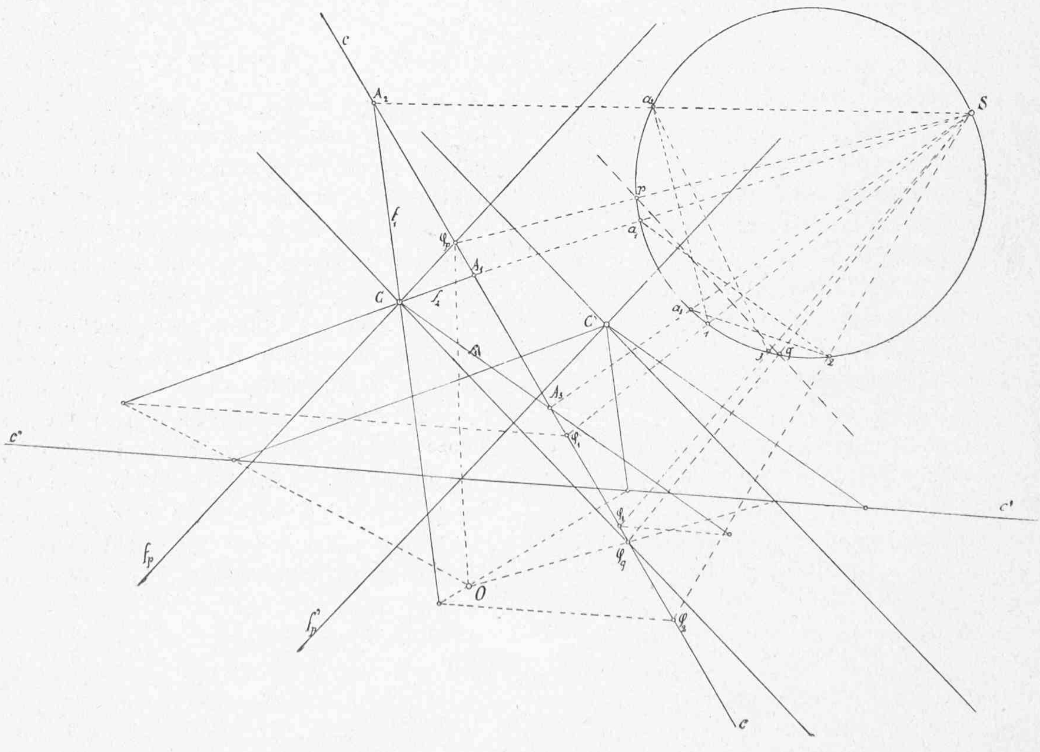


Fig. 14.

problème proposé, de déterminer les éléments unis de ces deux ponctuelles superposées.

A cet effet, choisissons sur c trois points quelconques A_1, A_2, A_3 ; en les joignant à C, on obtient trois droites f_1, f_2, f_3 qu'on peut envisager comme les droites représentatives de trois complexes du système (C), et il est possible, en appliquant une construction donnée, de trouver les points représentatifs correspondants φ_1, φ_2 et φ_3. On possède ainsi trois couples d'éléments correspondants A_1 φ_1, A_2 φ_2, A_3 φ_3 et l'on peut obtenir immédiatement, à l'aide du procédé classique, les éléments unis φ_p et φ_q. Chacun de ces éléments coïncidant, enfin, avec le point représentatif d'une directrice, on trouve sans aucune peine tous les éléments représentatifs des deux directrices cherchées. On peut facilement suivre toutes les constructions sur la figure 14, dans laquelle ces éléments représentatifs ont été désignés par f_p, f'_p, φ_p, φ'_p et f_q, f'_q, φ_q, φ'_q.

(A suivre.)

La locomotion électrique à grande vitesse sur voies ferrées[1].

Par M. E. GAILLARD,
Ingénieur.
Professeur extraordinaire à l'Ecole d'Ingénieurs.
Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs.
(1893-1897).

Introduction. — Les essais de locomotion électrique sur voies ferrées qui viennent d'être effectués en Allemagne — entre Zossen et Marienfelde, près de Berlin — ont eu partout un grand retentissement. La vitesse considérable de 200 km à l'heure a été atteinte, puis dépassée, et cela non pas accidentellement, mais dans des conditions telles qu'il sera facile de renouveler les mêmes expériences à volonté. Nous avons pensé que les lecteurs du *Bulletin* seraient heureux d'avoir sur ce sujet quelques renseignements.

La vitesse de 200 km. n'a pas été obtenue d'emblée ; il a fallu de longs mois d'essais et des expériences nombreuses, permettant de déterminer les divers éléments du problème.

C'est en 1899 qu'il est sérieusement question pour la première fois, de réaliser de pareilles vitesses. Ensuite d'une conversation entre MM. Rathenau et Schwieger, qui s'étaient rencontrés par hasard dans le rapide Berlin-Milan, une entente intervint entre la Société générale d'électricité et la maison Siemens et Halske, toutes deux à Berlin ; on devait construire une ligne pour y effectuer des essais de locomotion à grande vitesse. Ce projet rencontra l'approbation et l'appui sympathique des autorités, de plusieurs maisons de construction importantes et des financiers ; aussi une société put-elle être bientôt constituée, sous le nom de « Société pour l'étude de la locomotion électrique à grande vitesse » (Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen). Voici quels en étaient les membres fondateurs : la Société générale d'électricité, Siemens et Halske, la Deutsche Bank, la National Bank, MM. Delbruck Leo et Cº, Jakob S.-H. Stern, Bowig, Krupp, Ph. Holzmann, van der Zypen et Charlier (Cologne). La présidence du Conseil d'administration de la Société fut confiée à M. Schulz, président du Service impérial des chemins de fer. Un comité technique se mit aussitôt à l'étude et élabora les bases sur lesquelles les essais se feraient. Il fut décidé que les expériences seraient organisées sur la ligne militaire Zossen-Marienfelde ; la maison Siemens et Halske construirait la ligne électrique, et la Société générale d'électricité ferait le nécessaire pour la fourniture du courant depuis son usine de l'Obersprée, à Berlin ; chacun des concurrents équiperait une voiture, dont MM. van der Zypen et Charlier livreraient les bogies et la caisse.

[1] Voir *Elektrotechnische Zeitschrift*, 1901, nºs 34, 37, 38, 41 ; 1902, nº 32. *Revue d'électricité*, 1902, nº 1 et suivants. *Glasers Analen*, 1903, nº 619.

Programme des conditions à remplir par les concurrents. Les constructeurs se mirent à l'œuvre ; ils avaient à satisfaire aux conditions suivantes :

Les essais seront effectués sur la ligne à écartement normal Marienfelde-Zossen, longue de 23 km. ; le rayon minimum de celle-ci est de 1000 m. et la pente maximum 1 : 184.

La voiture, de profil normal, pourra prendre 50 personnes ; elle sera portée par deux bogies, avec chacun 3 essieux chargés de 16 tonnes au maximum, y compris les voyageurs.

L'énergie électrique sera fournie sous forme de courants triphasés, à la tension de 10 000 volts (45-50 périodes).

La mise en marche et le réglage devront pouvoir s'effectuer depuis chaque extrémité du véhicule, et il faudra que l'équipement électrique soit calculé et dimensionné de telle sorte qu'après une course de 250 km., l'échauffement de toutes ses parties ne soit pas anormal.

La vitesse sera de 200-220 km. à l'heure.

Le démarrage et le freinage seront tels qu'il reste un temps suffisant pour faire des observations précises, à toute vitesse, entre la fin du premier et le commencement du second.

Tous les appareils de mesure et de contrôle nécessaires seront installés sur la voiture, qui sera éclairée à l'électricité ; il est permis d'utiliser, pour cet éclairage, une batterie d'accumulateurs.

Détermination de la puissance nécessaire. — Comme on le voit, il n'est pas question, dans le programme, de la puissance à donner aux moteurs. C'est qu'on voulait laisser aux constructeurs toute latitude à cet égard. Jamais encore personne n'avait eu l'occasion d'expérimenter des vitesses aussi considérables, et il y avait lieu de déterminer plusieurs éléments inconnus. Quelle serait, par exemple, l'influence de la forme de la voiture, de la résistance de l'air ; comment la déterminer à priori. En prenant les formules anciennes, on arrive à une puissance de 3000 chevaux environ, en marche normale, pour 200 km. de vitesse[1]. Il

[1] La formule de Grave et Clark donne la résistance suivante : $f = 2{,}25 + 0{,}001\, v^2 = 42{,}25$ kg.