

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 31 (1905)
Heft: 3

Artikel: Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace
Autor: Mayor, B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-24840>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 19.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'École d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction: M. F. GILLIARD, ingénieur.

SOMMAIRE: *Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace*, par M. B. Mayor, ingénieur et professeur. — *La traversée des Alpes bernoises. Réponses de la Commission internationale d'experts au questionnaire du Comité d'initiative pour la construction du chemin de fer du Lötschberg.* (Extrait). — **Divers**: Collège suburbain de Vauseyon, à Neuchâtel: Projets « Gibet », de MM. Prince et Béguin, architectes, à Neuchâtel, et « Areuse », de M. W. Lehmann, architecte, à Berne. — Tunnel du Simplon: Etat des travaux au mois de janvier 1905. — Le dessinateur universel. — Les dangers du courant électrique et les moyens de les éviter. — *Nécrologie*: L. von Tetmajer. — *Sociétés*: Société fribourgeoise des ingénieurs et architectes: Assemblée générale statutaire du 15 janvier 1905. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes: 4^{me} séance ordinaire, du 28 janvier 1905. — *Concours*: Bâtiment de la Bourse, à Bâle. — Hôtel des postes et des télégraphes à La Chaux-de-Fonds.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace¹.

Par M. B. MAYOR,
ingénieur et professeur.

DEUXIÈME PARTIE

Calcul graphique des tensions dans les systèmes articulés à trois dimensions.

Introduction.

Parmi les méthodes qui permettent le calcul des tensions et des réactions d'un système articulé à trois dimensions, il convient de placer en première ligne celle que l'on peut qualifier de méthode de Crémone puisqu'elle comprend, comme cas particulier, le procédé que ce géomètre a appliqué avec tant de succès à l'étude des systèmes plans. Lorsque les opérations qu'elle exige sont effectuées analytiquement, elle conduit, en effet, à la détermination complète des tensions et des réactions inconnues de tous les systèmes statiquement déterminés. En outre, elle est susceptible d'interprétations géométriques assez simples pour qu'il ait été possible d'en déduire des procédés graphiques applicables à quelques-uns des systèmes imposés par l'art du constructeur. Elle est même la seule, à notre connaissance du moins, qui ait permis de telles applications; et si celles-ci sont encore peu nombreuses et nécessitent souvent des constructions compliquées, cela tient bien moins à la nature même du problème à résoudre qu'aux procédés ordinaires de représentation plane dont on a toujours fait usage.

Cela ressort clairement du premier chapitre de cette nouvelle série de recherches sur l'extension à l'espace des méthodes de la statique graphique; il est précisément consacré à la méthode de Crémone et surtout destiné à mettre en évidence les modifications profondes qu'elle subit, lorsque le système auquel on l'applique est représenté

sur le plan de l'épure à l'aide du procédé dualistique développé précédemment.

Dans le deuxième chapitre, je montre ensuite que ce même procédé permet des applications effectives de la méthode de Culmann, qui sort ainsi du domaine de la théorie pure dans lequel elle était restée jusqu'ici.

Dans le dernier chapitre enfin, je développe, sous le nom de méthode des sections multiples, un nouveau procédé qui m'a paru digne d'être signalé. D'une part, en effet, il est applicable à des cas infiniment plus généraux que la méthode de Culmann, qu'il comprend, du reste, comme cas particulier; et d'autre part, enfin, il conduit à des conséquences essentielles pour la théorie générale des déformations des systèmes statiquement déterminés.

CHAPITRE PREMIER

La méthode de Crémone.

84. Lemme préliminaire. Les modifications que subissent les applications de la méthode de Crémone, lorsqu'on fait usage du mode de représentation dualistique de l'espace, résultent toutes d'une propriété très simple, mais essentielle, que nous commencerons par faire connaître.

Considérons dans ce but des forces $(F_1), (F_2) \dots (F_i), \dots (F_n)$, en nombre quelconque et ayant pour point d'application commun un point matériel (A) libre dans l'espace. Admettons que ce système ait été représenté dualistiquement sur un plan II , que nous supposerons horizontal pour fixer les idées, et proposons nous de rechercher les conditions nécessaires et suffisantes qui assurent son équilibre.

A cet effet, désignons d'une manière générale et comme nous l'avons toujours fait, par F_i la force représentative de (F_i) et par φ'_i son point représentatif. On sait que F_i coïncide avec la projection de (F_i) sur le plan II , de sorte que la ligne d'action de cette force passe par le point représentatif A de (A) . De plus, φ'_i est situé sur la ligne représentative A' de (A) . Soit enfin F'_i la force représentative de la conjuguée (F'_i) , force qui est égale, parallèle et de sens opposé à F_i et dont la ligne d'action passe par φ'_i .

Cela posé, imaginons qu'on ait décomposé chacune des forces données (F_i) en deux composantes, dont l'une, nécessairement égale à F_i en grandeur, direction et sens, soit

¹ Voir N° du 10 décembre 1903, page 343.

parallèle au plan Π , c'est-à-dire horizontale, l'autre étant normale à ce même plan et par conséquent verticale. Pour que le système considéré soit en équilibre, il est alors évident qu'il faut et qu'il suffit que l'ensemble des composantes horizontales et l'ensemble des composantes verticales soient séparément en équilibre.

Mais, d'une part, les composantes horizontales admettent une résultante unique, égale, parallèle et de sens contraire à la résultante des forces F'_i ; pour qu'elles se fassent équilibre il faut donc et il suffit que cette dernière résultante soit nulle. D'autre part, les composantes verticales ont toutes même ligne d'action et nous avons vu (§ 37, Première partie) que celle qui, par exemple, correspond à (F_i) est proportionnelle au moment de F'_i par rapport au point O , foyer du plan Π relativement au complexe directeur. Pour que l'ensemble qu'elles constituent soit en équilibre, il faut donc et il suffit que la somme des moments par rapport à O de toutes les forces F'_i soit égale à zéro. Il est dès lors évident que les deux ensembles considérés sont séparément en équilibre lorsque le système des forces F'_i est lui-même en équilibre. Comme, de plus, la réciproque de cette dernière propriété est évidente, on est en droit d'énoncer le théorème suivant, que nous nous proposons précisément d'établir :

Pour que des forces quelconques dans l'espace, mais ayant même point d'application, se fassent équilibre, il faut et il suffit que le système plan formé par les forces représentatives de leurs conjuguées soit lui-même en équilibre.

L'extrême importance de ce théorème découle avant tout du fait qu'il a réduit la recherche des conditions d'équilibre d'un système de forces ayant même point d'application à l'étude d'un seul système plan, alors que tout autre mode de représentation nécessite la considération simultanée de deux de ces systèmes au moins. On peut d'ailleurs remarquer qu'il résulte immédiatement du fait que les conjuguées (F'_i) des forces considérées sont toutes contenues dans le plan focal de (A) par rapport au complexe directeur.

85. Détermination graphique des tensions dans les barres d'un système articulé libre dans l'espace et statiquement déterminé. Considérons un système articulé libre dans l'espace et en équilibre sous l'action de forces extérieures concentrées en ses nœuds. Dans le but d'obtenir géométriquement les tensions qui prennent naissance dans ses diverses barres, supposons qu'on l'ait représenté dualistiquement sur le plan de l'épure qui, comme précédemment, sera désigné par Π . Admettons enfin que les notations suivantes, qui sont d'ailleurs conformes à celles qui ont été utilisées jusqu'ici, aient été appliquées aux éléments qui le constituent et à leurs éléments représentatifs.

Un nœud quelconque du système étant désigné par (A_i) , son point représentatif sera dénoté par A_i et sa ligne représentative par A'_i . On sait que A_i coïncide avec la projection de (A_i) sur le plan Π et que la droite A'_i est parallèle à celle qui joint A_i au point fondamental O .

En appelant ensuite (l_{ik}) la barre qui réunit les deux nœuds (A_i) et (A_k) , sa ligne représentative l_{ik} coïncide avec la droite qui relie les deux points A_i et A_k , et son point représentatif l'_{ik} avec le point de rencontre de A'_i et de A'_k . D'ailleurs, il est manifeste que le système sera complètement défini si l'on donne tous les points tels que A_i et toutes les droites telles que A'_i et l_{ik} . Mais, ici encore, il est essentiel de compléter la figure obtenue de cette manière en indiquant aussi les lignes représentatives des conjuguées des diverses barres. Nous verrons même que ces dernières droites jouent un rôle si prépondérant dans les applications de la méthode de Crémone, que l'on peut faire complètement abstraction de tous les autres éléments représentatifs; du reste, on peut les obtenir immédiatement puisque l'_{ik} par exemple est parallèle à l_{ik} et passe par le point de rencontre de A'_i et de A'_k .

On peut encore remarquer dès maintenant que les diverses droites l'_{ik} peuvent être séparées en groupes, chaque groupe étant formé par celles de ces droites qui correspondent à toutes les barres issues d'un même nœud. De cette manière, à chaque nœud du système correspond un seul groupe de droites l'_{ik} . D'ailleurs, il est bien simple de caractériser, à l'aide des notations adoptées, celles de ces droites qui appartiennent à un même groupe. Par exemple, le groupe qui correspond au nœud (A_m) est évidemment formé par l'ensemble des droites l'_{ik} , dont l'un quelconque des deux indices i ou k est précisément égal à m . De plus, il est possible de reconnaître sur la figure même, et sans avoir égard aux indices, les droites d'un même groupe, si l'on a eu soin de marquer les points représentatifs l'_{ik} des barres du système et qui sont situées sur les droites correspondantes l_{ik} . Tous ceux, en effet, qui sont relatifs aux droites du groupe (A_m) sont situés sur la droite A'_m . Pour cette raison, ce groupe sera, dans la suite, désigné sous le nom de groupe (A'_m) .

Il est encore utile de remarquer que, puisque chaque barre du système passe par deux nœuds et deux nœuds seulement, l'une quelconque des droites considérées appartiendra à deux et à deux seulement des groupes qui viennent d'être définis. C'est ainsi que la droite l'_{ik} appartient aux deux seuls groupes (A'_i) et (A'_k) .

Désignons enfin par (F_i) la résultante de toutes les forces extérieures qui sont appliquées au nœud (A_i) . Ses éléments représentatifs F_i , F'_i , φ'_i et φ_i doivent, en particulier, satisfaire aux conditions suivantes : F_i passe par le point A_i , φ'_i est situé à la fois sur la ligne d'action F'_i et sur la droite A'_i . Dans ces conditions, il est déjà possible de prévoir que la force F'_i doit être rattachée au groupe (A'_i) .

86. Ces préliminaires posés, proposons nous de rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les tensions qui prennent naissance dans les diverses barres du système sous l'action des forces extérieures (F_i) .

Supprimons, dans ce but, toutes les barres du système, en ayant soin de remplacer les effets qu'elles produisent sur les nœuds par des tensions ou forces intérieures équivalentes. Par exemple, la suppression de la barre (l_{ik}) nécessite l'introduction de deux tensions, dont l'une, qui sera

désignée par (T_{ik}) , est appliquée au nœud (A_i) , tandis que l'autre (T_{ki}) , sera appliquée au nœud (A_k) . On sait d'ailleurs que ces deux tensions sont égales et directement opposées et ont pour ligne d'action commune la droite (l_{ik}) . Les forces représentatives T'_{ik} et T'_{ki} des conjuguées de ces deux tensions seront donc aussi égales et directement opposées et auront l'_{ik} pour ligne d'action commune.

Cela posé, imaginons que toute force telle que T'_{ik} soit rattachée au groupe correspondant (A'_i) . Si, comme nous avons déjà fait prévoir qu'il était naturel de le faire, nous admettons que F'_i soit aussi rattachée à ce même groupe, celui-ci se trouve en définitive constitué par toutes les forces représentatives des conjuguées de celles, tant intérieures qu'extérieures, qui sont appliquées au nœud (A_i) . Et puisque ce nœud est actuellement libre dans l'espace et en équilibre sous l'action de ces dernières forces, il résulte du lemme établi au début de ce chapitre que l'ensemble de toutes les forces attachées au groupe (A'_i) est lui-même en équilibre; de plus, et en vertu de la même propriété, lorsque cet ensemble est en équilibre le nœud (A_i) l'est aussi.

Il résulte dès lors, de la définition même des systèmes statiquement déterminés, que les relations qui exprimeront géométriquement ou analytiquement que tous les groupes de forces que l'on peut constituer comme cela vient d'être expliqué, sont séparément en équilibre, suffiront pour déterminer complètement toutes les forces T'_{ik} et par suite les tensions véritables; on sait, en effet, que T'_{ik} est égale et de sens contraire à la projection horizontale de (T_{ik}) , tandis que la projection verticale de cette même tension est égale au produit du facteur $\frac{1}{a}$ par le moment de T'_{ik} par rapport au point O .

Dans ces conditions et en résumé, il suffira, pour obtenir les tensions dans toutes les barres d'un système articulé, libre dans l'espace et statiquement déterminé, de procéder de la manière suivante:

En premier lieu, représenter dualistiquement le système considéré ainsi que les forces extérieures qui le sollicitent;

Séparer ensuite les lignes représentatives des conjuguées de toutes les barres en autant de groupes qu'il a de nœuds dans le système et de manière que les droites qui appartiennent à un même groupe correspondent aux barres qui aboutissent à un même nœud;

En considérant enfin l'un quelconque des groupes ainsi formés, appliquer sur ses droites des forces qui fassent équilibre à la force représentative de la conjuguée de celle qui sollicite le nœud correspondant. Effectuer cette opération pour chacun des groupes constitués, en ayant soin de la diriger de manière que les forces obtenues soient deux à deux égales et directement opposées. Il résulte alors de tout ce qui précède, que ces forces représentent les conjuguées des tensions cherchées et qu'elles sont déterminées sans ambiguïté par les conditions qui viennent d'être énumérées.

87. Avant de montrer par quelques applications les avantages que peut procurer l'emploi de ce procédé, il convient de faire quelques remarques.

Tout d'abord il est évident que les conditions d'équilibre des divers groupes de forces que l'on doit envisager, peuvent être exprimées géométriquement ou analytiquement. Il est même à remarquer que les équations qu'on obtient dans ce dernier cas peuvent être rendues plus simples que celles qui résultent de l'application immédiate des règles de la statique aux nœuds du système simplement isolés dans l'espace et non représentés sur un plan. Celles-ci s'obtiennent, en effet, en exprimant que les sommes des projections, sur trois directions rectangulaires, des forces extérieures et intérieures qui sollicitent un nœud quelconque sont nulles séparément. Et comme on ne peut, sans conduire à des complications excessives, faire varier d'un nœud à l'autre les directions choisies, le nombre des tensions inconnues que renferme l'une quelconque de ces équations est égal, en général, au nombre des barres qui aboutissent au nœud correspondant.

En revanche, supposons que le système ait été préalablement représenté dualistiquement sur un plan. Les conditions d'équilibre relatives aux forces du groupe qui correspond à un nœud quelconque, sont encore au nombre de trois, mais elles peuvent s'exprimer en écrivant que les sommes des moments de ces forces par rapport à trois points non en ligne droite sont nulles séparément; d'ailleurs, il est possible, sans qu'il en résulte des complications, de faire varier, en passant d'un groupe à l'autre, les centres des moments, de manière à éliminer de chacune des équations correspondantes deux au moins des forces inconnues T'_{ik} . Dans ces conditions, on obtient le même nombre d'équations entre le même nombre d'inconnues que par l'application de la méthode directe, mais chacune de ces équations renferme deux inconnues de moins.

D'autre part, il est essentiel de remarquer que les seuls éléments représentatifs qui interviennent dans la recherche des tensions sont les lignes représentatives l'_{ik} des conjuguées des barres et les forces représentatives F'_i des conjuguées des forces extérieures. En particulier, les projections des barres et des nœuds, ainsi que celles des forces extérieures, ne jouent aucun rôle et on peut les supprimer sans inconvénient. On pourra, en tous cas, après avoir complètement représenté le système, déplacer dans le plan de la figure et sans altérer leurs positions relatives les droites l'_{ik} , les forces F'_i et le point fondamental O . Dans ces conditions, le problème qui a pour objet la recherche des forces T'_{ik} présente de très grandes analogies avec celui du calcul des tensions dans les barres d'un système articulé plan. Il en diffère uniquement par le fait que les droites l'_{ik} qui font partie d'un même groupe et jouent un rôle identique à celui des barres issues d'un même nœud, ne passent plus par un même point et forment en général un polygone.

[A suivre].