Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques

Autor(en): **Paris, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **31 (1905)**

Heft 5

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24844

31me Année. 10 mars 1905. N° 5.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction : M. F. GILLIARD, ingénieur.

Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques.

Par M. A. PARIS, ingénieur civil.
Privat-Docent à l'Université de Lausanne.

(Suite)[1].

III. ANGLES DE DÉFORMATION AUX APPUIS A ET B

L'intercalation de rotules en A et B occasionne en ces deux points des angles de déformation finis qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, nous considérons les 4 tangentes en A et B à la travée et à ses appuis. La direction véritable de ces tangentes ne nous intéresse pas. La seule chose qui nous importe est l'angle de déformation relative qu'elles montreront après l'application de la charge. Nous les supposerons donc primitivement confondues avec l'axe $A\,B$. Au lieu de mesurer les angles, nous déterminerons les déplacements des points d'intersection de ces 4 tangentes deux à deux avec deux verticales que nous choisirons distantes de A et B d'une longueur l égale à la portée horizontale de la travée $A\,B$ (fig. 1).

Soient v_g à gauche de A et v_d à droite de B ces deux verticales. Nous appellerons t_g et t_a les tangentes en A à l'appui g et à la travée et t_b et t_d les tangentes en B à la travée et à l'appui d, tangentes confondues en $A\,B$ à l'état de repos.

La distance verticale mesurée sur v_g entre t_g et t_a détermine exactement l'angle de déformation en A avec son signe, sans que la position verticale de A influe encore sur la grandeur de cet angle.

L'angle de déformation en A est positif lorsqu'il est concave en dessus. Il correspond alors à l'action d'un moment fléchissant positif, et la tangente t_g à l'appui g coupe v_g plus haut que la tangente t_a. Nous mesurons donc sur v_g le segment $t_g - t_a$, de la tangente à la poutre à la tangente à l'appui, et lui donnons le signe + si nous montons de t_a à t_g.

Dans la détermination de ce segment, nous avons affaire à deux types différents de déformation, 1° celles de la travée elle-même ; 2° celles qui se produiraient même si la travée était indéformable en soi, déformation due à l'élasticité des appuis.

[1] Voir N° du 25 février 1905, page 49.

A. Déformation de la travée.

a) **Flexion de la poutre sous l'action des forces verticales** P, A **et** B. Sous l'action d'une force verticale descendante P, la poutre fléchit et les angles α et β de déformation aux appuis A et B, supposés fixes, ont pour expression

$$\alpha = \frac{a'}{l} \qquad \beta = \frac{b'}{l}$$

ou a' et b' sont proportionnels aux déplacements verticaux subis par le point d'application de la force P, en cas d'action des surfaces triangulaires de moments (fig. 2 à 4). Ces longueurs a' et b' ont, à l'échelle du dessin, la valeur

$$(a') = \frac{P^t\,(a)\,l}{H_0^t\,.\,m} \qquad (b') = \frac{P^t\,(b)\,l}{H_0^t\,.\,m}.$$

Elles se déterminent graphiquement. Dans l'épure, les constructions sont faites pour $P^t = 1^t$. Pour n'avoir à porter que des longueurs, nous considérons P et H_0 non comme des forces, mais comme des nombres de fois la force 1^t.

Si nous portons (fig. 4) sur les verticales v_g et v_d la longueur $H_0\,.\,m$ à l'échelle et que nous traçions les obliques partant de A_4 et B_4, et passant par l'extrémité des segments ainsi portés, nous trouverons sur les horizontales partant des extrémités de (a) et (b), les longueurs (a') et (b') interceptées entre ces diagonales et les verticales A_4 et B_4. Nous aurons en effet

$$7) \qquad (a') = \frac{l}{H_0\,.\,m}\,(a) \qquad (b') = \frac{l}{H_0\,.\,m}\,(b).$$

Comme nous l'indiquons par la mise entre parenthèses, ces longueurs sont affectées du facteur w d'agrandissement.

Cette construction, que nous avons donnée pour plus de clarté, peut être épargnée. Il suffit, pour cela, de prendre dans le polygone des forces (fig. 5) une distance polaire

$$e' = \frac{H_0\,.\,m}{l}\,.\,e.$$

Les ordonnées de la ligne élastique seront alors les valeurs (a') et (b') sans autre déduction. Mais il faudra, dans la détermination du facteur w (Eq. 2), distinguer la valeur e de cette distance polaire nouvelle, qui en est un multiple.

Le choix du nombre H_0 dépend uniquement de l'ampleur qu'on désire voir prendre aux courbes de flexion (a')

et (b') (Fig. 6). Mais il faut noter la valeur choisie pour en tenir compte dans la détermination du facteur w (Eq. 2).

Comme les déplacements verticaux de la poutre sont négatifs, les segments (a') et (b') sur v_g et v_d seront positifs, mais à soustraire puisqu'ils se rapportent à t_a et t_b.

b) **Déformation de la travée sous l'influence de la force** W^t. Les réactions W, agissant dans la ligne $A\ B$, sont fonctions linéaires de la position de la charge P, entre A et B. Nous rechercherons donc leurs effets pour les deux positions P^t en A et P^t en B. L'expression de la déformation reste la même, seule la valeur de W change. Nous avons trouvé pour

$$5) \quad \begin{cases} P^t \text{ au point } A \qquad W_a{}^t = P^t \cdot \dfrac{\mu}{\lambda}, \\ \qquad\quad B \qquad W_b{}^t = P^t \cdot \dfrac{\nu}{\lambda}. \end{cases}$$

Si nous faisons agir en A une telle force W^t, le point B étant supposé seul fixe et encastré, A se déplacera verticalement (Eq. 6) de

$$\Delta\, v_a = W_a{}^t \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_a \quad \text{ou} \quad \Delta\, v_b = W_b{}^t \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_a.$$

Ce déplacement est la mesure, à la distance l, de l'angle de déformation déterminé en B, comme en A, si l'on suppose l'arc articulé en A et B sur des chariots. L'arc supporté soumis à une force W de compression se bombera davantage et les angles de déformation sont positifs, car les segments décrits par t_a et t_b sont négatifs sur les verticales v. Il agit donc en sens inverse du précédent.

Si nous désignons par ($\Delta\, w_a$) et $\Delta\, w_b$) les valeurs prises par ($\Delta\, v_a$) et ($\Delta\, v_b$) pour $P = 1^t$, nous aurons :

$$8) \quad \begin{cases} (\Delta\, w_a) = \left[1^t \cdot w \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_a\right] \dfrac{\mu}{\lambda}, \\ (\Delta\, w_b) = \left[1^t \cdot w \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_a\right] \dfrac{\nu}{\lambda}. \end{cases}$$

Ces valeurs sont à porter sous A et B et sont communes aux déformations de ces deux articulations, la travée supposée symétrique.

B. Déformation des appuis.

Des valeurs que nous allons déterminer pour la déformation en A, nous tirerons, par analogie, celles qui concernent l'articulation B. Nous nous bornerons donc à en donner les expressions sans autre (fig. 1).

c) **Forces verticales.** 1° *Force P^t au point A.* Nous supposons l'articulation A remplacée par un chariot. Nous le pouvons puisque nous tenons ailleurs compte des réactions horizontales W.

Sous l'action de la force A^t, la tangente t_g à l'appui décrit sur v_g un segment

$$A \cdot g_g \cdot v_g \cdot t'_g$$

qui conserve son signe dans la détermination du segment intercepté. Il est positif si l'antipôle A^* de la verticale A se trouve entre cette verticale et v_g.

La tangente t_a suit le déplacement vertical de A en tournant autour de B. Elle décrit alors, puisque le rayon est doublé, le segment

$$2\, A\, g_g\, r_g\, t_g$$

négatif, mais à soustraire. Le segment intercepté est donc

$$9) \qquad \eta_{ga} = A^t \cdot g_g \cdot r_g\, (t'_g + 2\, t_g) = A^t\, g_g\, r_g\, t_a$$

où $t_a = t'_g + 2\, t_g$ est égal à la distance du point A^* à la verticale B.

Le segment η_{ga}, intercepté sur v_g, est donc égal au moment centrifuge du poids élastique g_g par rapport à la verticale B et à la direction de la force A, multiplié par A^t. C'est, en signe contraire, le déplacement de t_g sur B sous l'influence de $A^t = P$.

2° **Force P^t au point B.** Le point A restant immobile, t_g l'est aussi et t_a, tournant autour de A, décrit sur v_g, en sens positif, le déplacement vertical négatif du point B

$$10) \qquad \eta_{gb} = B^t \cdot g_d\, r_d \cdot t_d$$

où B^t est égal à P^t. Ce déplacement, intéressant t_a, est à soustraire.

Le segment η_{gb}, intercepté sur v_g en cas de force P^t en B, est égal au produit de cette force par le moment d'inertie du poids élastique g_d par rapport à la direction B. C'est, avec son signe, le déplacement vertical de B sous l'action de $B^t = P^t$.

Les déformations en B sont analogues.

Si la force P^t est en B, le segment η_{db} est positif et égal, en signe contraire, au déplacement sur la verticale A de la tangente t_d à l'appui, sous l'influence de $B^t = P^t$.

Si P^t est en A, le segment η_{da} est négatif et égal au déplacement vertical de A sous l'influence de $A^t = P^t$.

d) **Forces W^t horizontales.** — Nous supposons toujours un chariot au point A. Nous avons, en déterminant W, annulé entre eux les déplacements relatifs du chariot A_a par rapport au point A_g qui le supporte.

1° *Appui g.* Une force W^t, négative, comprimant $A\ B$, détermine un déplacement de la tangente t_g suivant v_g égal à

$$W^t \cdot g_g \cdot y_g \cdot s'_g.$$

Ce déplacement est généralement négatif. Le point A se déplace verticalement d'une longueur

$$W^t\, g_g\, y_g\, s_g$$

et la tangente t_a double cette valeur sur v_g en tournant autour de B. Ce déplacement, négatif, est à soustraire, et le segment total est

$$11) \qquad \eta'_{gw} = W^t \cdot g_g \cdot y_g\, [s'_g + 2\, s_g] = W^t \cdot g_g \cdot y_g \cdot s_a$$

où $s_a = s'_g + 2\, s_g$ est la distance de l'antipôle W^* de la force W à la verticale B. Nous avons donc :

Le segment η'_{gw} intercepté sur v_g est, en signe inverse, égal au déplacement suivant B de la tangente t_g, c'est-à-dire au produit de la force W par le moment centrifuge du poids élastique g_g par rapport aux 2 directions de la force et de la verticale B.

Ce segment est négatif dans le cas général de compression entre A et B.

2° *Appui d.* Le déplacement vertical

$$W\, g_d\, y_d\, s_d$$

du point B provoque une rotation de t_a autour de A et lui fait décrire sur v_g un segment négatif égal. Mais, ce segment étant à soustraire, nous trouvons

$$12) \qquad \eta''_{gw} = W^t\, g_d\, y_d\, s_d,$$

soit :

Le segment η''_{gw} intercepté sur v_g est égal au produit de la force W^t pour le moment centrifuge du poids élastique g_d pris par rapport aux 2 directions de la force W et de la verticale B.

Nous trouverons symétriquement pour les deux segments η'_{dw} et η''_{dw} interceptés sur v_d que :

Le segment η'_{dw}, produit par l'action de W sur l'appui d, est égal, en signe contraire, au déplacement suivant la verticale A de la tangente t_d ;

et que :

Le segment η''_{dw}, produit par l'action de W sur l'appui g, est égal au déplacement vertical du point A sous l'action de W.

Le premier segment, η'_w, est généralement négatif, le second, η''_w, positif, en cas de force W de compression.

Il ne reste plus maintenant, pour trouver les deux lignes d'influence de ces déformations, qu'à donner à la force W la valeur qu'elle prend suivant que P est en A ou en B.

En résumé, nous commençons par tracer les deux courbes (a') et (b') relatives aux déformations en A et B, puis nous en déterminons le lignes de fermeture comme suit.

Considérons la ligne (a'). Ses ordonnées sont considérées comme négatives, puisque la tangente t_a se relève par rapport à t_g. L'ordonnée sous A de la ligne de fermeture est la somme algébrique des valeurs suivantes :

Force $P^t = 1^t$ en A.

Influences de la force :

$$13) \begin{cases} (\varDelta w_a) = [1^t \,.\, w \,.\, g_l \,.\, y_l \,.\, k_a]\, \dfrac{\mu}{\lambda} & \text{(positive)} \quad W^t \text{ sur la travée} \\ (\eta_{ga}) \;\; = 1^t \,.\, w \,.\, g_g \,.\, r_g \,.\, t_a & \text{(positive)} \quad A^t = 1^t \text{ sur l'appui } g \\ (\eta'_{gw}) = [1^t \,.\, w \,.\, g_g \,.\, y_g \,.\, s_a]\, \dfrac{\mu}{\lambda} & \text{(négative)} \quad W^t \text{ sur l'appui } g \\ (\eta''_{gw}) = [1^t \,.\, w \,.\, g_d \,.\, y_d \,.\, s_d]\, \dfrac{\mu}{\lambda} & \text{(positive)} \quad W^t \text{ sur l'appui } d. \end{cases}$$

Pour déterminer l'ordonnée sous B de cette ligne de fermeture, nous avons les segments suivants.

Force $P^t = 1^t$ en B.

Influences de la force :

$$14) \begin{cases} (\varDelta w_b) = [1^t \,.\, w \,.\, g_l \,.\, y_l \,.\, k_a]\, \dfrac{\nu}{\lambda} & \text{(positive)} \quad W^t \text{ sur la travée} \\ (\eta_{gb}) \;\; = 1^t \,.\, w \,.\, g_d \,.\, r_d \,.\, t_d & \text{(négative)} \quad B^t = 1^t \text{ sur l'appui } d \\ (\eta'_{gw}) = [1^t \,.\, w \,.\, g_g \,.\, y_g \,.\, s_g]\, \dfrac{\nu}{\lambda} & \text{(négative)} \quad W^t \text{ sur l'appui } g \\ (\eta''_{wg}) = [1^t \,.\, w \,.\, g_d \,.\, y_d \,.\, s_d]\, \dfrac{\nu}{\lambda} & \text{(positive)} \quad W^t \text{ sur l'appui } d. \end{cases}$$

Les segments à porter pour trouver la ligne de fermeture dè la courbe (b') se déterminent de même. Nous aurons

$$15) \text{ Sous } B \; (\varDelta w_b) + (\eta_{db}) + (\eta'_{dw}) + (\eta''_{dw}) \; \left(\text{facteur } \frac{\nu}{\lambda} \text{ dans les } \eta_{dw}\right)$$

$$16) \text{ Sous } A \; (\varDelta w_a) + (\eta_{da}) + (\eta'_{dw}) + (\eta''_{dw}) \; \left(\text{facteur } \frac{\mu}{\lambda} \text{ dans les } \eta_{dw}\right)$$

Il faut noter que dans ces deux formules 15) et 16), les facteurs $\frac{\mu}{\lambda}$ et $\frac{\nu}{\lambda}$ qui rentrent dans les segments (η'_{dw}) et (η''_{dw}) leur donnent généralement des valeurs différentes sous A et B.

Dans les formules 15) et 16), nous n'avons indiqué que la somme algébrique, les signes des facteurs restant à introduire. Dans les formules 13) et 14) où nous avons indiqué ces signes, ceux-ci se rapportent à notre cas, qui est le cas général (arc supporté, sur appuis donnant entre A et B une compression en cas de charges verticales descendantes P).

(A suivre).

La traversée des Alpes bernoises.

Réponses de la Commission internationale d'experts au questionnaire du Comité d'initiative pour la construction du Chemin de fer du Lötschberg. (Extrait).

(Suite et fin[1]).

V^me QUESTION

Les lignes existantes, traversant le Jura, remplissent-elles les conditions voulues pour contribuer au succès de la nouvelle voie d'accès au tunnel du Simplon, ou y a-t-il lieu de les améliorer ou d'en construire de nouvelles, et, le cas échéant, lesquelles ?

Les lignes actuelles à travers le Jura sont considérées comme suffisantes par les experts si elles permettent aux voyageurs et aux marchandises qui se dirigent vers l'Italie de points situés à l'Est et au Nord du Jura, ou inversement, de trouver plus d'avantages à passer *par la percée des Alpes bernoises* et le Simplon, qu'à suivre d'autres itinéraires.

Pour comparer les divers itinéraires, et cela sur la base des longueurs virtuelles calculées d'après la méthode Jacquier, Milan sera pris comme point terminus méridional, Paris et Calais comme points terminus septentrionaux.

En admettant que le tronçon Brigue-Milan aura, après exécution des raccourcis en Italie, des longueurs réelle et virtuelle de 161 à 180 km., et que celles de la section Berne-Brigue seraient 115 et 150 km.[2], on trouve, pour le parcours *Paris-Milan*, par les lignes actuelles à travers le Jura :

[1] Voir N° du 25 février 1905, page 53.

[2] Moyenne des longueurs correspondant aux projets avec tunnel de base par le Lötschberg et par le Wildstrubel.