

Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques

Autor(en): **Paris, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **31 (1905)**

Heft 7

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24849>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction: M. F. GILLIARD, ingénieur.

SOMMAIRE: *Etude sur la reconstitution et la restauration du temple de St-Gervais, à Genève*, par M. Robert Moritz (Suite). — *Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques*, par M. A. Paris, ingénieur civil, privat-docent à l'Université de Lausanne (suite). — **Divers**: Hôtel des Postes et des Télégraphes, à La Chaux-de-Fonds: Rapport du Jury du concours au Département fédéral de l'Intérieur. Projet de MM. Yonner et Jaquillard, architectes, à Neuchâtel. Projet de M. J.-U. Debely et Jeanmaire, architectes, à Cernier et La Chaux-de-Fonds. — Tunnel du Simplon: Fête de la rencontre des galeries Nord et Sud. — *Sociétés*: Société vaudoise des Ingénieurs et des Architectes: 6^{me} séance ordinaire, du samedi 18 mars 1905. Rapport de la Commission chargée de l'étude du règlement des concours publics en Suisse. — *Concours*: Collège primaire pour garçons, à Vevey.

Méthode générale de calcul de la poutre continue sur appuis élastiques.

Par M. A. PARIS, ingénieur civil.
Privat-Doctent à l'Université de Lausanne.

(Suite)¹.

VIII. TEMPÉRATURE, DÉPLACEMENT DES APPUIS ET FREINAGE DES TRAINS

1° **Action de la température.** Dans le cas d'actions verticales A^t et B^t sur les appuis g et d , nous obtenions une variation $\Delta A B$ de la distance des appuis. Cette variation nous permettait de calculer la réaction W^t agissant suivant $A B$. En cas de changement de température, ce n'est plus la distance $A_g B_d$ qui varie, mais, ce qui revient au même, la longueur l de la travée à intercaler dans cette distance.

Au chapitre II, où nous avons étudié la force W , nous avons trouvé, pour son action sur la travée et ses appuis, l'expression

$$\Delta A B = W^t [g_g y_g f_g + g_a y_a f_a + \Delta h] = W^t \lambda$$

où Δh a l'une des deux valeurs 3).

Si nous remplaçons $\Delta A B$ par

$$\Delta l = \pm \alpha t l$$

nous obtenons la formule

$$20) \quad \lambda W^t = \pm \alpha \cdot t^0 \cdot l$$

équation qui nous donne la valeur de W .

Considérons maintenant le cas de dilatation, positive ou négative, d'une pile.

Soit Δh le changement de hauteur du point d'appui A_p . Pour annuler les efforts produits de ce fait dans la construction, nous devons couper la poutre deux fois au droit de la pile considérée, soit à droite et à gauche de la section d'appui, ainsi qu'aux extrémités des deux travées adjacentes. Nous obtiendrons de ce fait 4 angles θ de déformation, deux sur la pile considérée avec les tangentes en ce point à la travée, et deux à l'autre extrémité des travées

adjacentes. Comme ci-dessus, nous mesurons ces angles à la distance l , égale à la portée horizontale de la travée intéressée.

Une fois ces 4 angles connus, leur commune mesure étant la dilatation $\pm \Delta h$, on opère séparément pour chaque travée. On commence par remettre en position les 2 tangentes extrêmes de la travée de gauche, puis celles de la travée de droite, comme ci-dessus, au moyen des droites G et D de chaque travée.

Considérons les deux sections de la travée de gauche comme figées. La construction reprendra les propriétés de la travée de droite, articulée sur deux appuis élastiques. Si alors nous faisons agir les forces G et D de cette travée, nous obtenons des efforts dans toute la construction. Nous agissons ensuite symétriquement pour la travée de droite et annulons ses 2 angles, égaux, de déformation.

Les deux actions, exécutées simultanément, donneront pour résultat la somme de ces efforts partiels et annuleront tous les angles de déformation, soit des éléments de poutre entre eux, soit de ces éléments avec la pile envisagée.

Nous trouverons alors, en reprenant les formules 17 et 18

$$21) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_a = \frac{1}{[g_a d_a e_a + g_g d_g e_g]} \cdot [\pm \Delta h]^{cm} \\ D_b = \frac{1}{[g_b d_b e_b + g_d d_d e_d]} \cdot [\pm \Delta h]^{cm} \end{array} \right.$$

équation que nous appliquons successivement aux deux travées adjacentes à la pile considérée.

2° **Influence de déplacement des appuis.** Si le bas de la pile p subit un mouvement dans le plan de symétrie longitudinal de la construction, le déplacement produit au point A peut se décomposer en 3 éléments.

- a) un déplacement simple suivant l'axe de la travée l ;
- b) un déplacement simple vertical;
- c) une rotation simple.

Au moyen de cette décomposition, nous nous retrouvons exactement dans les conditions dues à la dilatation des travées ou des piles, du moins pour ce qui concerne les deux déplacements a) et b). Quant à la rotation simple du point A , nous l'exprimons, pour chaque travée adjacente,

¹ Voir N° du 25 mars 1905, page 80.

en fonction de la portée horizontale de cette travée, et le segment, mesuré sur les verticales v_g de la travée de gauche et v_d de celle de droite, s'ajoute au déplacement vertical ou s'en soustrait pour permettre l'application des formules 21.

Les efforts dus au déplacement dans le sens des travées adjacentes se calculent séparément pour chacune des 2 travées et les résultats s'ajoutent ensuite.

3° Influence du freinage des trains. Lorsqu'un train fait usage de ses freins, chaque véhicule est soumis à un moment de renversement dans le sens de la course. La force horizontale, qui agit ainsi dans le centre de gravité du véhicule, se combine avec son poids et remplace son action verticale par une oblique. Comme la force d'inertie mise en action de ce fait ne dépend pas seulement du poids du véhicule, mais encore de l'action des freins, ces forces obliques ne seront pas parallèles. Si nous les décomposons à la hauteur de l'axe de la poutre, le polygone funiculaire des composantes verticales ne sera pas seulement déplacé contre l'avant du train, mais encore déformé.

Le déplacement du polygone funiculaire est sans grand intérêt, puisque la position du train est variable. Quant à sa déformation, que nous ne pouvons du reste pas déterminer, elle est de peu d'importance sur la construction. Elle pourrait toutefois augmenter la charge statique, si, sur la travée considérée, derrière des voitures non pourvues de freins, s'en trouvaient qui peuvent freiner. Le nombre de forces verticales agissant sur l'axe augmenterait du fait de leur convergence, et d'autant plus que le train serait plus au-dessus de l'axe.

Nous laissons de côté une action si indéterminée, du reste nulle dans notre cas puisque nous supposons, dans le calcul de la force F de freinage, que tous les axes freinent proportionnellement à leur poids. Nous ne considérons dès lors plus que les forces F^t dans l'axe de la travée.

Une légère déformation du polygone funiculaire est encore occasionnée par le fait que les véhicules divisent leur action entre leurs essieux, ce qui fait que, si la résultante verticale reste égale, sa répartition varie suivant la force de freinage. Les côtés du polygone funiculaire reliant un véhicule au suivant resteront donc seuls invariables, abstraction faite du déplacement parallèle. Entre eux se déformeront un peu les côtés reliant les charges successives de la voiture elle-même, car la résultante tourne autour du centre de gravité pendant que les actions directes pivotent autour des points de contact des roues sur le rail. Cette déformation est insignifiante dès que plusieurs véhicules peuvent se trouver ensemble sur la travée.

La force F^t se répartit tout le long de l'axe, d'une manière que nous supposerons uniforme, quoique ce ne soit pas le cas en réalité.

Pour déterminer la réaction W^t , nous supposons l'articulation B remplacée par un chariot. La force F^t se reporte ainsi entièrement sur A et détermine suivant AB un déplacement ΔAB de B_b par rapport à B_d , d'une valeur

$$\Delta AB = \frac{1}{2} F^t \Delta h + F^t g_g y_g f_g$$

où Δh est égal à $g_l l_v^2$ (voir Eq. 3), même pour l'axe courbe.

En annulant le déplacement ΔAB par l'action des forces W^t , nous trouvons comme ci-dessus

$$F^t \left[\frac{1}{2} \Delta h + g_g \cdot y_g \cdot f_g \right] = W^t \cdot \lambda,$$

soit

$$22) \quad W^t = F^t \cdot \frac{\frac{1}{2} \Delta h + g_g y_g f_g}{\lambda}.$$

Nous aurons en définitive, comme réaction en A , la force de compression $-F^t + W^t$ et, en B , la force de tension $+W^t$, toutes deux dirigées contre la force F^t de freinage.

Les réactions W^t et F^t ne suffisent pas à établir l'équilibre lorsque l'axe de la travée est courbe. Elles agissent suivant la corde AB , tandis que les actions de freinage se répartissent le long de l'axe courbe. Supposons maintenant pour simplifier, cette répartition symétrique encore, mais telle que la résultante F^t des forces élémentaires ΔF passe par le centre de gravité élastique de la travée, centre de l'ellipse g_l .

Le moment statique de F^t sur la corde AB sera $F^t \cdot y_l$ (fig. 12) et sera équilibré par 2 forces verticales A^t et B^t , inverses et égales

$$A^t = -B^t = F^t \cdot \frac{y_l}{l}.$$

Pour être stricts, nous aurions déjà dû faire intervenir ces forces dans le calcul de W^t , mais leur action sur sa valeur est négligeable, vu leur faible rapport à F^t .

Il ne nous reste plus maintenant qu'à déterminer les angles de déformation produits en A et B par les forces F^t , W^t , A^t et B^t . Le moment fléchissant total de ces forces, autour de B ; étant nul, nous pouvons considérer la travée l comme encastrée en ce point et calculer ainsi les déformations propres produites en A .

La force F^t , qui agit dans le centre de l'ellipse de la travée, ne produit aucune rotation en A , quoiqu'elle n'agisse pas directement sur A^t .

Les déplacements horizontaux et verticaux en A étant simples, ils sont les sommes algébriques des déplacements horizontaux et verticaux des différents points d'application des forces ΔF sous l'influence des ΔF correspondantes.

Dans notre hypothèse, le déplacement Δh est donc bien la moitié du déplacement que produirait F^t agissant directement sur A . Quant au déplacement vertical simple Δv , il peut être négligé².

¹ En effet, la travée étant supposée symétrique par rapport à l'axe vertical, si nous considérons son axe courbe AB divisé en segments égaux, sur deux segments symétriques agissent des forces ΔF égales et confondues dans la même direction parallèle à AB . Ces deux forces ΔF donnent ensemble en A le même angle de rotation qu'une seule d'entre elles, agissant directement sur A . Nous aurons donc, comme rotation définitive, celle que produirait en A la force $\frac{1}{2} F^t$, agissant sur A , et passant par le centre de g_l , c'est-à-dire une rotation nulle.

² Nous pouvons le décomposer en 3 éléments : le déplacement produit par les forces ΔF agissant sur la moitié droite de la travée, le déplacement produit dans la moitié droite par les forces ΔF agissant sur la moitié gauche, et enfin le déplacement produit dans la moitié gauche par les forces agissant sur elle. La première et la troisième de ces composantes s'annulent à peu près, d'autant plus que l'axe est moins courbe ; quant à la seconde, elle est très petite puisque la force $\frac{1}{2} F^t$ passe par le centre de g_l et que l'ellipse est peu oblique, dans une moitié d'arc.

La déformation due à la réaction A^t se déduit de la Fig. 7. Nous trouvons ainsi, pour la travée encastrée en B , une rotation et un déplacement vertical. Nous faisons abstraction du déplacement horizontal.

$$\Delta v_a = A^t \cdot g_l \cdot k_a \cdot p_a.$$

La force B^t donnera pareillement

$$\Delta v_b = B^t \cdot g_l \cdot k_b \cdot p_b.$$

Nous ajoutons ces valeurs aux déplacements produits en A et B par les forces W^t et $[-F + W]^t$ et nous trouvons, pour les déformations propres de la poutre, les segments représentatifs

$$\begin{aligned} \Delta v_a &= [-F + W]^t \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_a - A^t \cdot g_l \cdot k_a \cdot p_a \quad (\text{en } A) \\ \Delta v_b &= W^t \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_b - B^t \cdot g_l \cdot k_b \cdot p_b \quad (\text{en } B) \end{aligned} \quad (\text{Fig. 7})$$

Dans ces équations, les forces $-F + W$ et A sont négatives, W et B positives, si A est à l'avant du train, ce que nous supposons. Ces valeurs Δv_a et Δv_b sont, à la distance l , la mesure des angles φ_b et φ_a de déformation de la poutre aux extrémités B et A glissant sur la droite AB .

Nous possédons maintenant les valeurs nécessaires à la détermination des angles, nous ne faisons que rappeler ici les formules déduites au chapitre III.

Nous aurons donc

Angle de déformation en A (avant du train).

	Influences
$\Delta v_b = W^t \cdot g_l \cdot y_l \cdot k_b - B^t \cdot g_l \cdot k_b \cdot p_b$	(positive) des réactions sur la travée
$\eta_{ga} = A^t \cdot g_g \cdot r_g \cdot t_a$	(positive) A (—) sur l'appui g
$\eta_{gb} = B^t \cdot g_a \cdot r_a \cdot t_d$	(positive) B (+) sur l'appui d
$\eta'_{gw} = [-F + W] g_g y_g s_a$	(négative) $-F + W$ sur l'appui g
$\eta''_{gw} = W \cdot g_a y_a s_d$	(négative) W sur l'appui d .

La somme algébrique de ces 5 valeurs donne le segment relatif à la déformation en A . Nous trouverons au point B

Angle de déformation en B (arrière du train).

	Influences
$\Delta v_a = [-F + W]^t g_l y_l k_a - A^t g_l k_a p_a$	(négative) des réactions sur la travée
$\eta_{ab} = B^t \cdot g_a \cdot r_a \cdot t_b$	(négative) B (+) sur l'appui d
$\eta_{da} = A^t g_g r_g t_g$	(négative) A (—) sur l'appui g
$\eta'_{dw} = W^t g_a y_a s_b$	(positive) W sur l'appui d
$\eta''_{dw} = [-F + W] g_g y_g s_g$	(positive) $-F + W$ sur l'appui g

La somme algébrique de ces valeurs donne le segment relatif à l'angle de déformation en B . Ayant calculé ainsi les deux angles, nous trouvons, comme ci-dessus, les forces G et D par les formules 17 et 18 où y_a et y_b sont à remplacer par les segments trouvés. Le facteur w n'y intervient plus.

Nous avons fait ce développement spécialement pour les forces de freinage, parce que les formules se montrent ainsi complètes. Les mêmes formules serviront à déterminer les angles θ_g et θ_a de déformation dus soit à une dilatation, positive ou négative, d'une travée, soit à un déplacement simple d'une tête de pile dans l'axe d'une travée. Les forces W^t ont été déterminées dans les Nos 1 et 2, quant à F^t , A^t et B^t , elles font défaut.

S'il s'agissait de faire le calcul pour des forces biaises ou horizontales autres que le freinage, par exemple le vent sur une ferme de toiture, on ferait comme pour ces dernières la décomposition à la hauteur de l'axe et le calcul serait dès lors identique. Si l'effort s'exerçait sur un montant, on calculerait les déformations du montant supposé libre et l'on agirait comme en cas de déplacement d'une pile.

IX. POINTS FIXES

Traitant le cas général de poutre continue sur appuis élastiques, nous avons vu que chacune des quatre actions transmises par la travée à un appui, g par exemple, y provoque de la part de ses éléments, la travée et la pile, deux réactions dont on peut déterminer les lignes d'action par l'intermédiaire des ellipses g_t et g_p . Comme nous n'avons posé aucune condition à ces ellipses partielles, ces lignes d'action sont parfaitement distinctes les unes des autres.

Supposons maintenant que, l'élasticité longitudinale de la pile étant négligeable, l'ellipse finale de son sommet se réduise à une droite verticale, il en sera alors de même de l'ellipse g_g dont l'axe horizontal s'annulera, son centre se trouvant sur l'axe vertical de la pile.

Dans ces conditions, pour une force extérieure quelconque, le point A_g aura son centre de rotation sur cet axe vertical, à une hauteur dépendant seulement du point d'intersection de la force extérieure avec l'axe restant. Si la travée t est encastrée, élastiquement ou non, à son extrémité gauche, la réaction qu'elle fournira devra avoir son antipôle sur l'axe vertical par A ; cette réaction passera donc par l'antipôle de l'axe par rapport à l'ellipse g_t du point A_t . Cet antipôle, où se coupent toutes les réactions opposées par la travée t aux actions venant de droite, se nomme un *point fixe* de cette travée. La condition de son existence est la rigidité longitudinale de la pile p .

Il est clair qu'un groupe de réactions, ayant passé par un point fixe, se recroiseront dans chacune des travées suivantes en des points invariables, même quand ces travées ne posséderaient pas par elles-mêmes de points fixes véritables.

Ces points fixes deviennent des *points d'inflexion fixes*, s'ils tombent sur l'axe de la poutre, car pour toute force agissant sur une autre travée, la ligne de pression coupe l'axe en ce point et en fait invariablement un point d'inflexion de la ligne élastique.

Il y a deux catégories de points fixes. Le professeur W. Ritter les désigne par I et K suivant qu'ils se rapportent à des actions venant de droite ou de gauche. Ils se déterminent aisément dans les poutres continues sur appuis verticalement rigides, au moyen de la ligne élastique (voir W. Ritter, III, *Der kontinuierliche Balken*). Ils servent alors à la détermination des lignes de fermeture des surfaces de moments. Ils ont de même été signalés dans l'arc continu sur appuis rigides (voir H. Lossier, *L'arc continu*). Mais là, comme dans la poutre continue, ils disparaissent dès que la pile correspondante présente une élasticité longitudinale.

CONCLUSION

Comme nous l'avons fait remarquer au commencement de cette étude, la méthode qui vient d'être exposée ne constitue pas une simplification du calcul courant, elle ne saurait donc lui être préférée dans les cas ordinaires, mais elle pourra être utile dans les problèmes rendus difficiles par la continuité et l'encastrement.

Comme dans l'arc, nous aurons besoin de polygones funiculaires pour la détermination des ellipses d'élasticité des diverses pièces, si du moins ces ellipses ne sont pas données a priori, comme c'est le cas pour des pièces droites et de section constante. Ces ellipses trouvées, nous avons encore à les combiner successivement pour obtenir les ellipses de droite ou de gauche des appuis. Pour ce qui concerne ces derniers éléments, nous renvoyons simplement au traité de l'arc continu, où ils ont été recherchés et exposés avec toute la clarté désirable par M. Henry Lossier, professeur agrégé à l'Ecole polytechnique fédérale, et nous profitons de l'occasion pour le remercier ici de l'aide et des conseils qu'ils nous a donnés pour ce travail.

[A suivre].

Etude sur la reconstitution et la restauration du temple de St-Gervais, à Genève.

Par M. Robert MORITZ.

[Suite]¹.

La pierre de taille employée pour la construction des piliers et des nervures des voûtes est la molasse du lac. Les meneaux des fenêtres étaient en grès. Les voûtes sont en tuf, celles des bas-côtés en briques semblables à celles des



Fig. 4. — Vestiges des bases des grosses colonnes de la nef. (Trouvées sous l'ancienne chaire).

¹ Voir N° du 25 mars 1905, page 77.

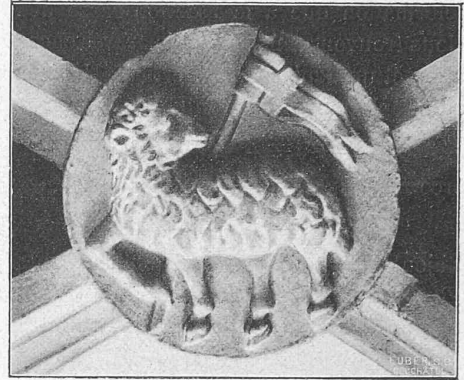


Fig. 5. — Clef de voûte (chœur).

voûtes des couloirs de la crypte. La face principale et les contreforts sont en maçonnerie composée de boulets, de briques et d'autres matériaux; ils sont revêtus à l'extérieur en molasse du lac, sauf quelques assises des soubassements qui sont en roche. Les faces latérales de la nef et du chœur, ainsi que la face postérieure, sont appareillées en grosses



Fig. 6. — Cul-de-lampe (chœur).

briques semblables à celles que l'on trouve à l'intérieur des couloirs de la crypte, à la face Nord du clocher et dans la cage de l'escalier. Sous la corniche du toit, une frise constituée par ces mêmes briques court autour de ces trois façades. Des frises d'un dessin semblable se retrouvent dans presque tous les édifices de cette époque à Genève. Sur la face Nord du clocher, une retranche de briques indique l'appentis d'un toit antérieur à celui de l'église actuelle.

Les socles des bases des grosses colonnes de la nef sont à plans octogonaux, de même que la plinthe. Elle est couronnée dans le haut et dans le bas par un boudin à profil circulaire, surmonté d'un listel. Le boudin du bas est de plus grande dimension et court dans la première scotie de la plinthe. La base de la colonne contre laquelle était adossée la chaire avant les récents travaux de restauration, est la seule dont on ait retrouvé des vestiges du profil. Les