

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 33 (1907)
Heft: 19

Artikel: Résolution, par voie nomographique, des équations linéaires simultanées
Autor: Dumas, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26251>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: P. MANUEL, ingénieur, professeur à l'École d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction: D^r H. DEMIERRE, ingénieur.

SOMMAIRE: *Résolution, par voie nomographique, des équations linéaires simultanées*, par M. G. Dumas, D^r ès-sciences (Pl. 8). — **Divers**: *Sociétés*: Société suisse des ingénieurs et architectes: Rapport du Comité central pour les années 1905-07; Procès-verbal de l'assemblée des délégués du 21 septembre 1907, à Genève. — *Bibliographie*. — *Concours*: Concours pour l'étude d'un casino, à Lausanne: 3^e et 4^e prix, projets de M. G. Epitoux, architecte, à Lausanne.

Résolution, par voie nomographique, des équations linéaires simultanées.

Par G. DUMAS,

D^r ès-sciences, privat-docent à l'École polytechnique fédérale.

Résoudre un système d'équations linéaires à plusieurs inconnues est une opération fréquente en sciences appliquées. Diverses méthodes, ingénieuses et variées, se réduisant pour la plupart à certaines constructions graphiques, permettent d'obtenir facilement les valeurs des inconnues¹. La règle à calcul peut être fort utile également. C'est ce que montre M. Runge, dans son excellent traité sur la résolution des équations². Nous nous proposons de donner ici la description d'un nomogramme ou abaque, pl. 8, permettant de résoudre avec rapidité les systèmes d'équations linéaires à deux inconnues:

$$(1) \quad \begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

Ce nomogramme peut abrégé aussi notablement les calculs nécessaires à la résolution d'un système d'équations du premier degré à n inconnues x, y, z, \dots

Il est surtout avantageux quand les équations données le sont sous la forme

$$(2) \quad \begin{cases} y = ax + b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

et que leurs coefficients a, a', b, b' , ainsi que les valeurs de x et y , pour lesquelles elles sont satisfaites, se maintiennent dans des limites déterminées. Dans de pareils cas, des abaques, construits comme celui que nous établissons ici, mais adaptés aux intervalles spéciaux de variation des quantités a, a', b, b', x, y pourraient rendre de grands services, car ils permettraient d'obtenir *directement*, par deux lectures uniquement, les valeurs des deux quantités x et y , étant données celles de a, a', b et b' .

On pourrait même, en construisant ces derniers abaques, supposer que x, y, a, a', b, b' varient dans des champs pas-

¹ Voir à ce propos *Encyclopædie der mathematischen Wissenschaften*, t. I, p. 1014.

² D^r C. RUNGE, *Praxis der Gleichungen*, collection Schubert t. XIV, Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1900.

sablement restreints. Quelques petites transformations — qui toutes se feraient mentalement — permettraient alors de déterminer x et y , quelles que soient, pour ainsi dire, les valeurs de a, a', b et b' . C'est ce que nous montrons à propos de l'abaque établi, pl. 8, en supposant b et b' compris entre -20 et $+60$, tandis que $+1$ et $+20$ sont les limites inférieures et supérieures des valeurs absolues de a et a' .

* * *

Prenons la première des équations (2),

$$(3) \quad y = ax + b$$

et remplaçons-la par le système

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{x} X &= a \\ (5) \quad y &= X + b \end{aligned} \right\}$$

Tout système de valeurs x, y satisfaisant à (3) vérifiera, lorsqu'on donne à X une valeur convenable, le système d'équations (4) et (5). La réciproque est vraie. X n'est, en définitive, qu'une inconnue auxiliaire.

Posons maintenant

$$\frac{1}{x} = u$$

et écrivons l'équation (4):

$$(6) \quad uX = a.$$

Elle représente, rapportée, fig. 1, à un système d'axes rectangulaires Ou et OX , une hyperbole équilatère, dont seule la branche située au-dessous de OX se trouve figurée, branche que nous désignons par a . Un quelconque, M , des points de cette branche a respectivement, comme abscisse et ordonnée, les longueurs OP et OR .

On a:

$$(7) \quad \overline{OR} \cdot \overline{OP} = a,$$

de sorte que si, le long de l'axe des u , nous plaçons une échelle (x) de

la fonction $\frac{1}{x}$, telle que

tout point coté x sur celle-ci, soit à la distance

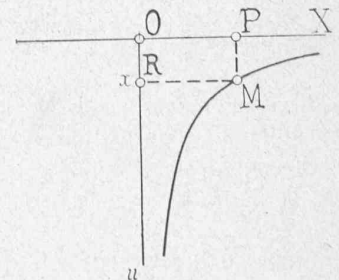


Fig. 1.

$\frac{1}{x}$ du point O , nous aurons comme conséquence de (7), et en désignant par x la cote de R :

$$(8) \quad \frac{1}{x} \overline{OP} = a.$$

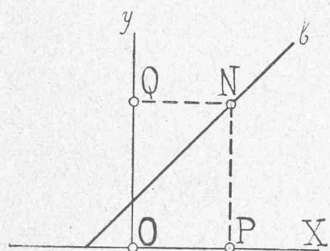


Fig. 2.

Soit, d'autre part, fig. 2, yOX un autre système d'axes rectangulaires et b la droite qui, dans le plan de ceux-ci, admet comme équation la relation 5. Le long de Oy , plaçons une échelle régulière (y), telle que la cote de l'un quelconque de ses points représente, prise avec son signe, la distance de ce point à l'origine O .

N étant maintenant celui des points de la droite b , d'abscisse OP égale à la longueur OP de la figure 1, on aura, y désignant la cote du point Q :

$$(9) \quad y = \overline{OP} + b$$

et, par conséquent, à cause de (8) et (9), entre le x et le y des figures 1 et 2 la relation (3) dont nous sommes partis.

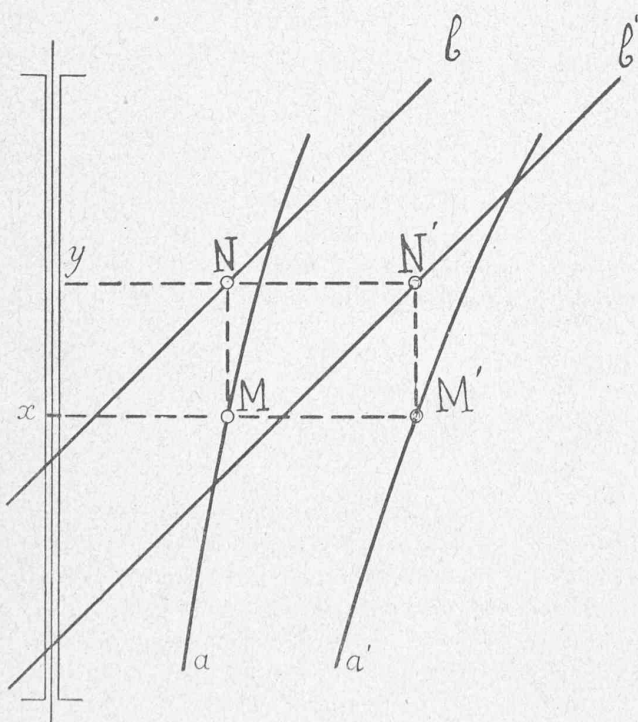


Fig. 3.

Si, donc, nous superposons les figures 1 et 2, comme on l'a fait dans la figure 3, en ayant soin de placer l'un sur l'autre, n'importe comment, les axes Oy et Ou , nous voyons qu'à tout système de valeurs x, y , vérifiant l'équation (3), correspond, fig. 3, un contour rectangulaire $yNMx$ dont les sommets N et M se trouvent respectivement sur la droite b et l'hyperbole a . A tout système de solutions, véri-

fiant la seconde équation (2), correspond un contour analogue $yN'M'x$.

Résoudre les équations (2) équivaut, donc, à déterminer les deux contours $yNMx$ et $yN'M'x$ de façon que les points N et N' d'une part, M et M' d'autre part, soient situés sur la même horizontale. Cette opération, comme nous le verrons, se fait rapidement au moyen d'une bande de papier.

La figure 3 constitue, en quelque sorte, une représentation schématique de l'abaque. Dans celui-ci, pl. 8, le support commun des deux échelles (x) et (y) — support que nous désignerons, dans la suite, par le terme: axe de figure — se trouve nettement distingué des deux échelles elles-mêmes. Les divisions de l'échelle (x) sont figurées à gauche, celles de l'échelle (y) à droite de l'axe de la figure.

* * *

L'abaque, pl. 8, s'obtient, à vrai dire, par une construction un peu plus compliquée que celle qui précède. Au lieu d'une échelle dont les cotes, x , fig. 1, signifient que les points, auxquels elles appartiennent, se trouvent à la distance $\frac{1}{x}$ de O , nous avons placé une échelle de module

$$l = 200,$$

ou, ce qui revient au même, une échelle dont les points cotés x se trouvent à la distance $\frac{200}{x}$ de O .

Les hyperboles désignées par $a, a', a'' \dots$ correspondent, en réalité, aux équations

$$(10) \quad \begin{cases} uX = ak \\ uX = a'k \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

où

$$k = \frac{2000}{3}.$$

Dans la figure 2 où, pour un instant, nous supposons l'axe Oy remplacé par un autre axe OY , coïncidant avec lui, l'échelle régulière le long de Oy (ou de OY) n'est pas de module 1, mais de module

$$m = \frac{50}{9}.$$

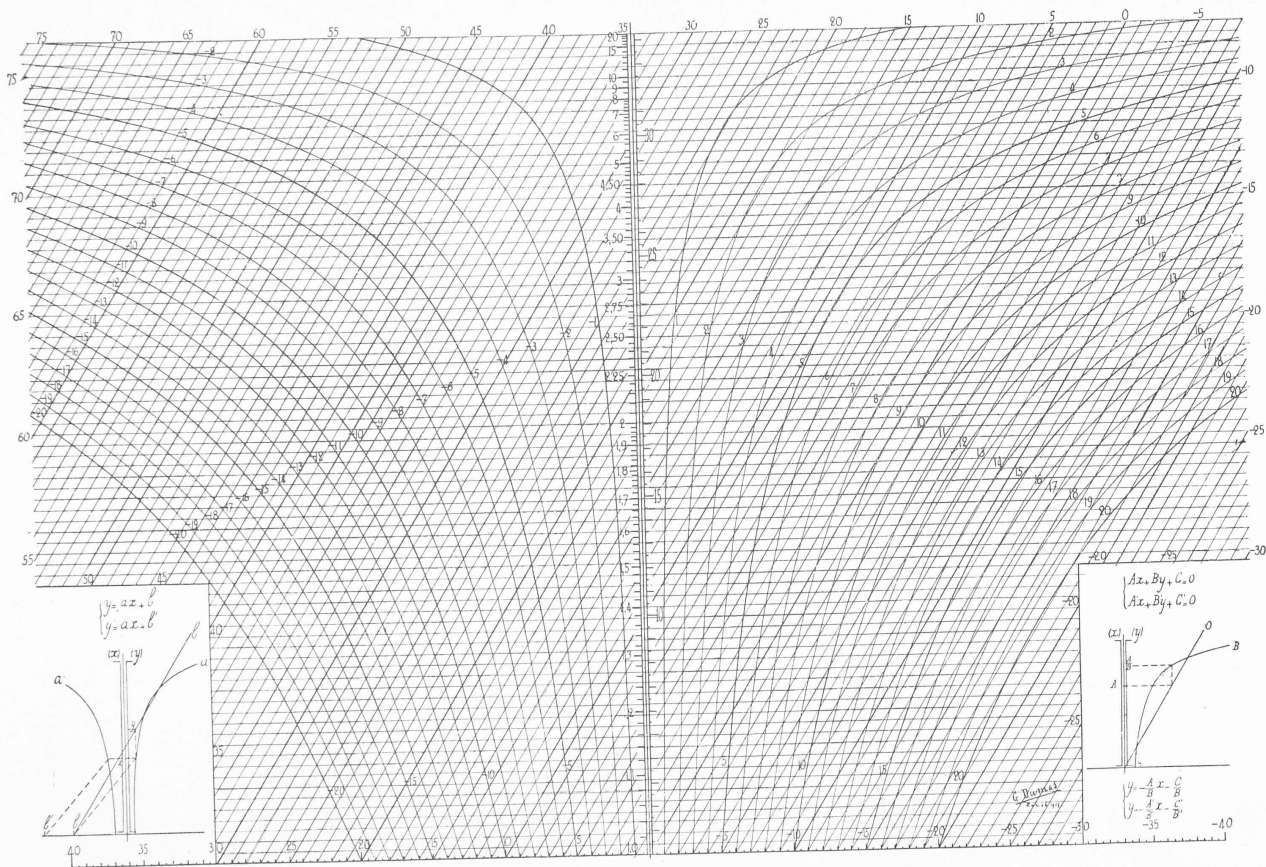
Le point sur OY , côté y , se trouve, de la sorte, à la distance my de O . Les équations des droites $b, b', b'' \dots$ rapportées au système d'axes OX et OY , sont alors:

$$(11) \quad Y = \frac{ml}{k} X + mb,$$

b prenant successivement les valeurs $b, b', b'' \dots$, etc.

L'abaque, pl. 8, résulte, en définitive, de la superposition des figures 1 et 2, dans lesquelles on doit s'imaginer que les droites et les hyperboles correspondent, non plus aux relations (5) et (6) mais aux équations (10) et (11) et que les échelles (x) et (y), au lieu d'être de modules égaux à l'unité, ont leurs modules respectivement égaux à l et m .

A part cela, rien n'est à modifier dans ce qui précède. Toute solution du système (2) s'obtient encore, comme dans la figure 3, en déterminant un contour rectangulaire $yNN'M'Mx$, tel que les points N et N' , M et M' soient situés



ABAQUE POUR LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES A DEUX INCONNUES

NB. — Le schéma de droite serait beaucoup plus explicite, si, comme cela devrait être $\frac{A}{B}$ se trouvait à gauche de l'axe de figure, A à droite.
 La quantité A doit, en effet, ainsi que le texte l'indique, être prise sur (y) , $\frac{A}{B}$ s'obtenant ensuite sur l'échelle (x) .

Seite / page

leer / vide /
blank

sur deux horizontales, tout en se trouvant respectivement placés sur deux droites b et deux hyperboles a .

Tout ceci s'établit immédiatement, si l'on remarque que tous les systèmes de valeurs x, y qui vérifient (3), satisfont, l, m, k étant choisis à l'avance, et une fois pour toutes, au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{x} X = ak \\ Y = my \\ Y = \frac{ml}{k} X + mb. \end{array} \right.$$

Les modules des échelles jouent un rôle prépondérant dans la construction d'un abaque, quel qu'il soit. Ils en assurent la bonne disposition. Les valeurs choisies, pl. 8, pour l, m et k conviennent aux intervalles dans lesquels varient a, a', b, b' . Elles devraient être modifiées, le cas échéant, si ces dernières quantités venaient à se mouvoir dans d'autres limites.

On aurait pu, en outre, comme le font certains auteurs, à propos d'autres abaques, introduire, dans les modules eux-mêmes, l'unité de longueur intervenant dans les constructions. Ceux-ci sont alors, généralement, donnés en millimètres. Il semble, cependant, préférable de l'indiquer à part. Cela permet sans toucher aux modules, en modifiant simplement la valeur de cette unité, de dessiner l'abaque à l'échelle que l'on veut. Dans le dessin original de l'abaque, l'unité de longueur était égale à 2 millimètres; elle se réduit, pl. 8, à 0,865 mm. environ.

Si, enfin, entre deux droites, b et b' , on en veut intercaler $(n - 1)$ autres, il suffit de tracer de b à b' un segment horizontal quelconque, que l'on divise en n parties égales. Par les points de division passent alors les droites cotées :

$$b + \frac{b - b'}{n}, b + 2 \frac{b - b'}{n}, \dots, b + (n - 1) \frac{b - b'}{n}.$$

Cela est immédiat. Mais il en est de même pour les hyperboles. Les hyperboles

$$a + \frac{a - a'}{n}, a + 2 \frac{a - a'}{n}, \dots, a + (n - 1) \frac{a - a'}{n}$$

divisent un segment horizontal quelconque, compris entre les hyperboles a et a' en n segments égaux. Cela se déduit aussitôt des équations (10) correspondant aux hyperboles a et a' . Si, par conséquent, on suppose un segment horizontal quelconque, séparant dans l'abaque, pl. 8, soit deux hyperboles, soit deux droites consécutives, les hyperboles 5 et 6, ou les droites 11 et 12, par exemple, divisé en dix parties égales, par chacun des points de division ainsi obtenus passeront respectivement, soit les hyperboles

$$5,1 \quad 5,2 \quad \dots \quad 5,9$$

soit les droites

$$11,1 \quad 11,2 \quad \dots \quad 11,9$$

Ces remarques, dont il faut tenir compte pour l'interpolation, ont été fort utiles pour la construction des hyperboles elles-mêmes. Les hyperboles -20 à -1 , l'axe de la figure et les hyperboles $+1$ à $+20$ découpent sur toute horizontale des segments égaux. Il en est encore ainsi des

intervalles que détacheraient ces mêmes lignes sur chaque verticale¹.

* * *

Le nomogramme, pl. 8, se compose d'un réseau de droites b , d'un réseau d'hyperboles a et de deux échelles (y) et (x) qui devraient coïncider avec l'axe de figure, mais dont les divisions se trouvent respectivement placées à sa droite et à sa gauche. Une échelle régulière supplémentaire, dont les divisions ne sont autre chose que les points d'intersection des droites b avec l'horizontale inférieure, facilite le maniement de l'abaque. Des lignes équidistantes et perpendiculaires à l'axe de l'abaque recouvrent enfin toute la figure, dans le but de rendre plus aisées les lectures qui toutes doivent se faire le long de droites horizontales.

Examinons les différents cas qui peuvent se présenter en résolvant un système tel que (2).

I. Lorsque les coefficients a, a', b, b' ont leurs valeurs comprises entre les limites pour lesquelles l'abaque est construit et que — comme celui-ci l'indiquerait d'ailleurs spontanément — x et y se trouvent respectivement situés, x entre 1 et 10, y entre 0 et 30, on peut procéder comme suit :

On prend une bandelette de papier, fig. 4, suffisamment longue, dont le bord soit bien rectiligne. On la place le long de l'échelle du bas de l'abaque et marque deux traits en

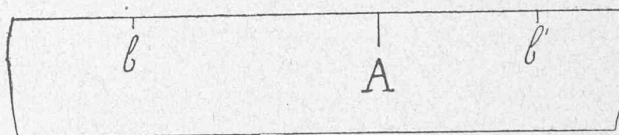


Fig. 4.

face des divisions b et b' , en désignant ces traits eux-mêmes par b et b' . Cela fait, on prend la bandelette et la maintenant, grâce au réseau de droites auxiliaires, toujours horizontale, on place l'extrémité du trait b sur l'hyperbole a , l'extrémité du trait b' sur l'hyperbole a' . Si la chose est possible dans les limites de l'abaque, c'est que le système proposé admet une racine positive x , comprise entre 1 et 10. Sa valeur s'obtient en lisant la cote du point d'intersection du bord de la bandelette, dans la position où elle vient d'être amenée, avec l'échelle (x).

Pour trouver y , on commence par marquer sur la bandelette, après avoir lu x , un trait, que l'on peut désigner par A , en face de l'axe de figure. Puis on déplace la bandelette, parallèlement à elle-même, en astreignant l'extrémité de A à se mouvoir le long de l'axe. La valeur de y se lit alors sur l'échelle des y , à son intersection avec le bord de la bandelette, au moment où les deux traits b et b' se trouvent respectivement sur les droites b et b' elles-mêmes, A étant toujours sur l'axe.

Il suffit, d'ailleurs, de s'assurer qu'un seul des deux traits, b' par exemple, coïncide avec la droite de même

¹ M. Eugène Prior, étudiant à l'Ecole polytechnique, a bien voulu se charger de l'exécution de l'abaque. Il l'a dessiné avec le plus grand soin, aussi tenons-nous à lui adresser ici nos bien sincères remerciements.

cote b' , car si la chose a lieu pour l'un des traits b ou b' , elle a lieu simultanément pour l'autre.

La figure à gauche de l'abaque, (pl. 8), caractérise schématiquement l'opération qui vient d'être décrite.

On résoudrait, par exemple, de cette façon-là, le système

$$\begin{cases} y = 3x + 10 \\ y = -x + 30 \end{cases}$$

pour lequel on a

$$x = 5, y = 25.$$

II. Si les équations (2) devaient conduire à une valeur négative de x , il ne serait plus possible de placer les traits b et b' de la bandelette sur les hyperboles a et a' . Il faudrait alors mettre le trait b sur l'hyperbole ($-a$), le trait b' sur l'hyperbole ($-a'$), ce qui équivaldrait à remplacer les équations (2) par les suivantes :

$$\begin{cases} y = -ax + b \\ y = -a'x + b' \end{cases}$$

La valeur de x , qu'on lit alors à l'intersection de la bandelette et de l'échelle (x) est donc égale mais de signe contraire à la racine x des équations proposées. Quant à la valeur de y , on l'obtient comme dans I.

III. Il peut se faire que la valeur de y , satisfaisant aux équations (2) ne soit pas comprise entre 0 et 30. Dans ce cas, après avoir déterminé x , on ajoute mentalement à b ou à b' , à b , par exemple, un nombre rond, positif ou négatif, C , convenablement choisi. L'extrémité du trait b de la bandelette vient alors se placer sur la droite cotée $b + C$ et la quantité y désirée est égale à la cote du point d'intersection du bord de la bandelette, avec l'échelle (y), diminuée de la quantité C .

IV. Il peut arriver également que les coefficients a et a' , dans le système (2), soient en valeur absolue compris entre 1 et 20, mais que la distance des deux traits b et b' sur la bandelette, soit trop grande ou trop petite pour en déduire, dans les limites de l'abaque, la valeur de x . Dans ce cas, il existe une puissance entière λ , positive ou négative de 10, telle que les traits $10^\lambda b$ et $10^\lambda b'$, puissent respectivement venir se placer — x étant supposé positif — sur les hyperboles a et a' . La valeur correspondante de x sur l'échelle (x) est alors 10^λ fois trop grande; on passera donc à la valeur voulue de x par une simple division par 10^λ . Quant à y , sa valeur se déterminera comme précédemment, mais le résultat qu'on obtiendra devra, lui aussi, être divisé par 10^λ .

Ce procédé repose sur le fait que les équations

$$\begin{cases} y = ax + b \cdot 10^\lambda \\ y = a'x + b' \cdot 10^\lambda \end{cases}$$

conduisent, pour x et y , à des valeurs 10^λ fois plus grandes que celles auxquelles on aboutit en considérant les équations (2).

Une puissance de 10 répondant au but que l'on se propose ici existera d'ailleurs toujours car, quelle que soit la valeur de x qui correspond aux équations (2), on pourra toujours trouver un exposant λ , tel que $10^\lambda x$ soit, en valeur

absolue, entre 1 et + 10, c'est-à-dire compris dans l'échelle (x) de l'abaque¹.

V. Si les a et a' se trouvent, en valeur absolue, compris entre 1 et 20, les méthodes précédentes suffisent pour déterminer x et y . Mais les a et a' ne sont point forcément situés dans ces limites-là. Dans ce cas b et b' ayant été au préalable et, s'il le faut, augmentés ou réduits, comme dans IV, il peut se faire qu'il existe une puissance μ de 10, telle que dans le système

$$(12) \quad \begin{cases} y = 10^\mu ax + b \\ y = 10^\mu a'x + b' \end{cases}$$

les valeurs absolues des coefficients de x soient toutes deux comprises entre 1 et 20. Résolvant alors le système (12), au moyen de l'abaque et de la bandelette, on passe ensuite facilement aux racines de (2) puisque les y satisfaisant à (2) et à (12) ont la même valeur, tandis que le x déduit de (2) est 10^μ fois plus grand que le x , solution de (12).

VI. Si, enfin, il était impossible de passer d'un système (2) à un système tel que (12), de façon que les deux coefficients $10^\mu a$ et $10^\mu a'$ soient, en valeur absolue, compris entre 1 et 20, on pourrait toujours choisir μ de manière que la valeur absolue de l'un d'entre eux $10^\mu a$, par exemple, soit comprise entre 1 et 10, celle de l'autre entre 0 et 1. Ceci nous conduit, par conséquent, à montrer comment se résoudrait le système

$$(13) \quad \begin{cases} y = ax + b \\ y = \varepsilon x + b' \end{cases}$$

dans lequel les nombres a et ε sont, en valeurs absolues, le premier compris entre 1 et 10, le second inférieur à 1. Nous supposons aussi, dans le seul but de fixer les idées, que le x satisfaisant à (13) appartient à l'échelle (x) du nomogramme. Il serait facile d'ailleurs, et d'après ce qui précède, de s'arranger, cas échéant, pour qu'il en soit ainsi.

Au système (13), substituons pour un instant le système

$$(14) \quad \begin{cases} y = (a + C)x + b \\ y = (\varepsilon + C)x + b' \end{cases}$$

C étant un nombre rond choisi de manière que $(a + C)$ et $(\varepsilon + C)$ soient, en valeur absolue, tous deux compris entre 1 et 20.

Les deux quantités x , vérifiant les systèmes (13) et (14) sont égales; soit x_0 leur valeur commune.

Cela étant, considérons la figure 5, qui contient schématiquement quelques lignes du nomogramme, pl. 8. Les quatre hyperboles C , $\varepsilon + C$, a et $a + C$ s'y trouvent représentées. La droite indéfinie Δ figure la bandelette. Comme elle passe par le point x_0 de l'échelle x et que x_0 est, par hypothèse, racine de (14), les traits que nous avons toujours désigné par b et b' passeront respectivement par les points R et S , situés sur les hyperboles $a + C$ et $\varepsilon + C$.

¹ Une remarque s'impose cependant ici, remarque qu'un coup-d'œil jeté sur l'abaque, pl. 8, justifie immédiatement. Les valeurs de x s'obtiennent d'une manière plus précise, quand elles se déterminent au moyen de lectures faites dans la partie centrale du nomogramme. Si, donc, $10^\lambda x$ devait être, en valeur absolue, voisin de 1 ou de 10, il vaudrait mieux multiplier b et b' par un facteur de la forme $a10^\lambda$, en prenant a égal à un entier compris entre 0 et 10, facile à choisir après une première tentative de résolution.

