

# Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace

Autor(en): **Mayor, B.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **34 (1908)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26845>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: P. MANUEL, ingénieur, professeur à l'École d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction: Dr H. DEMIERRE, ingénieur.

SOMMAIRE: *Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace* (suite), par M. B. Mayor, professeur. — **Divers**: L'hydrographie nationale. — Die Raumkunst. — Nouvelles concessions de chemins de fer. — *Concours*: Extrait du programme de concours pour l'élaboration d'un projet de bâtiment scolaire à construire à Broc. — *Sociétés*: Société suisse des ingénieurs et architectes: VI<sup>e</sup> séance de la Commission pour la publication de la « Maison bourgeoise en Suisse ». — Acquisition de matériel roulant en 1908 par les C. F. F. — Tunnel du Ricken. — Tunnel du Lötschberg. — *Bibliographie*. — *Ouvrages reçus*. — Bulletin technique de la Suisse romande: séance du Comité supérieur de rédaction, 16 mars 1908. — Association amicale des anciens élèves de l'École d'ingénieurs de l'Université de Lausanne: demandes d'emploi.

## Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. Mayor, professeur.

(Suite)<sup>1</sup>.

### CHAPITRE II

#### La méthode de Culmann.

93. Considérons un système articulé libre dans l'espace, en équilibre sous l'action des forces concentrées en ses nœuds et constitué de manière qu'on puisse, à l'aide d'une section plane ou gauche  $S$  qui coupe six de ses barres, sans passer par aucun de ses nœuds, le diviser en deux parties distinctes  $A$  et  $B$ . Comme nous allons le montrer, il est alors possible de déterminer graphiquement les tensions produites dans toutes les barres rencontrées par  $S$ .

Dans ce but, désignons par  $(F)$  le système formé par les forces extérieures qui agissent sur les nœuds de la partie  $A$ , par  $(l_1), (l_2), \dots, (l_6)$  les six barres coupées par  $S$  et, d'une manière générale, par  $(T_i)$  la tension de la barre  $(l_i)$ . Imaginons ensuite qu'après avoir réellement opéré la section  $S$ , on supprime la partie  $B$  en ayant soin de remplacer les effets qu'elle produit sur la partie restante  $A$  par des forces équivalentes, de manière que l'état de celle-ci ne soit pas modifié et qu'en particulier, elle reste en équilibre. Comme les forces qu'il est nécessaire d'introduire ainsi sont, par définition même, les tensions  $(T_i)$ , qu'elles admettent précisément pour lignes d'action les barres correspondantes  $(l_i)$ , il suffira, pour résoudre le problème proposé, de chercher six forces admettant des lignes d'action données et faisant équilibre à un système  $(F)$  également donné. On sait, d'ailleurs, que ce problème est parfaitement déterminé lorsque les lignes d'action considérées n'appartiennent pas à un même complexe linéaire et qu'il dépend, au point de vue analytique, de la résolution d'un système de six équations du premier degré. De plus, les considérations suivantes vont nous conduire à une solution purement géométrique.

94. Pour fixer les idées, supposons tout d'abord qu'on veuille déterminer la tension  $(T_6)$  et convenons alors de désigner par  $(F_6)$  le système de forces, d'ailleurs inconnu, formé par les tensions restantes  $(T_1), (T_2), (T_3), (T_4)$  et  $(T_5)$ .

En vertu de ce qui précède, les trois systèmes  $(F)$ ,  $(F_6)$  et  $(T_6)$  se font équilibre et, d'après un théorème établi au paragraphe 2, leurs complexes d'action appartiennent à un même système à deux termes que nous désignerons par  $(C_6)$ . Ce système est d'ailleurs parfaitement déterminé, puisqu'il comprend le complexe d'action de  $(F)$  qui est donné et celui de  $(T_6)$  qui est spécial et admet, pour directrice, la droite  $(l_6)$ .

Ce premier point établi, remarquons ensuite que les droites  $(l_1), (l_2), (l_3), (l_4)$  et  $(l_5)$  définissent un complexe linéaire et un seul. Soit alors  $(\Gamma_6)$  ce complexe qui ne doit pas être confondu avec le complexe d'action de  $(F_6)$  et qu'il est naturel d'appeler, comme la suite le démontrera, le complexe *opposé* à la barre  $(l_6)$ . Si l'on considère, pour un instant, un système de vecteurs  $(Q_6)$  astreint à la seule condition d'admettre précisément  $(\Gamma_6)$  pour complexe d'action, il est évident que le moment de l'une quelconque des forces  $(T_1), (T_2), (T_3), (T_4)$  ou  $(T_5)$  s'annule par rapport à ce système, puisque les lignes d'action de ces diverses forces appartiennent toutes à  $(\Gamma_6)$ . Dans ces conditions, le moment de  $(F_1)$  s'annule aussi par rapport à  $(Q_6)$  et les complexes d'action de ces deux systèmes sont en involution.

Si donc on convient de désigner par  $(G_6)$  le complexe d'action de  $(F_6)$ , on peut dire, en résumé, que  $(G_6)$ , d'une part, appartient au système à deux termes  $(C_6)$  et que, d'autre part, il est en involution avec  $(\Gamma_6)$ . Or il est facile de démontrer que, dans ces conditions, ce complexe est parfaitement déterminé.

Si l'on désigne, en effet, par  $X, Y, Z, L, M, N$  ses coordonnées, on aura, puisqu'il appartient à un système à deux termes défini par deux complexes donnés,

$$X = X_1 + \lambda X_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L = L_1 + \lambda L_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

en désignant par  $\lambda$  une indéterminée.

En exprimant ensuite qu'il est en involution avec  $(\Gamma_6)$ , on obtient immédiatement une équation linéaire par rap-

<sup>1</sup> Voir N° du 10 février 1908, page 25.

port à la seule inconnue  $\lambda$  qu'elle renferme, ce qui établit le fait annoncé.

Admettons donc qu'on ait pu déterminer  $(G_0)$  et qu'on l'ait représenté dualistiquement, ainsi que les divers éléments considérés jusqu'ici, sur un plan quelconque  $\Pi$ . On peut alors immédiatement décomposer  $(F)$  en deux systèmes, dont l'un admet  $(G_0)$  pour complexe d'action et dont l'autre se réduit à une résultante unique ayant  $(l_0)$  pour ligne d'action. Cette décomposition n'exige, en effet, que la construction d'un triangle dont l'un des côtés représente en grandeur, direction et sens la force représentative de  $(F)$  qui est donnée, et dont les deux autres côtés sont respectivement parallèles aux droites représentatives de  $(G_0)$  et de  $(l_0)$ . Le côté de ce triangle qui est parallèle à la droite représentative de  $(l_0)$  donne la force représentative de la tension  $(T_0)$ , lorsqu'on le suppose décrit dans le sens qui résulte de celui de la force représentative de  $(F)$ .

Il résulte de tout ce qui précède que la détermination graphique de l'une quelconque des tensions  $(T_i)$  dépend uniquement de la solution géométrique des deux problèmes suivants :

I. Trouver les éléments représentatifs d'un complexe en involution avec un complexe donné et faisant, en outre, partie d'un système à deux termes également donné.

II. Déterminer les éléments représentatifs du complexe linéaire qui possède cinq droites données.

96. Comme nous le verrons plus loin, la solution générale du deuxième problème qui vient d'être posé dépend essentiellement de celle du premier dont nous allons, tout d'abord, nous occuper.

Considérons, à cet effet, un système à deux termes  $(C)$  et un complexe  $(\Gamma_0)$  quelconque par rapport à  $(C)$ . Pour déterminer le complexe du faisceau  $(C)$  qui se trouve en involution avec  $(\Gamma_0)$ , admettons que  $(C)$  ait été représenté sur le plan  $\Pi$  à l'aide du procédé indiqué au paragraphe 63 (1<sup>re</sup> partie), c'est-à-dire par un ensemble de deux points et de deux droites quelconques. Soient alors  $C$  et  $C'$  les deux points représentatifs,  $c$  et  $c'$  les deux droites représentatives (fig. 14); de plus, désignons par  $f_0, f'_0, \varphi_0$  et  $\varphi'_0$  les éléments représentatifs de  $(\Gamma_0)$ .

Cela posé, soient  $f_x, f'_x, \varphi_x$  et  $\varphi'_x$  les éléments représentatifs d'un complexe  $(\Gamma_x)$  astreint à la seule condition d'appartenir à  $C$ . Comme nous l'avons démontré, ces éléments remplissent les conditions suivantes, qu'il est essentiel de rappeler (fig. 14).

Les droites représentatives  $f_x$  et  $f'_x$  sont parallèles et passent respectivement par  $C$  et  $C'$ , et les points représentatifs sont alignés sur  $O$  et respectivement situés sur  $c$  et  $c'$ . De plus, lorsque  $(\Gamma_x)$  varie dans le faisceau considéré, ces éléments engendrent des ponctuelles et des faisceaux qui sont en correspondance projective, et cette correspondance est, en particulier, caractérisée par les faits suivants: lorsque  $f_x$  et  $f'_x$  coïncident avec la droite  $CC'$ , les points  $\varphi_x$  et  $\varphi'_x$  sont eux-mêmes confondus avec l'intersection de  $c$  et de  $c'$ ; lorsque la droite  $f'_x$  passe par  $O$ , le point  $\varphi_x$  est à l'infini sur  $c$ , et, de même, lorsque  $f_x$  passe par  $O$ , le point

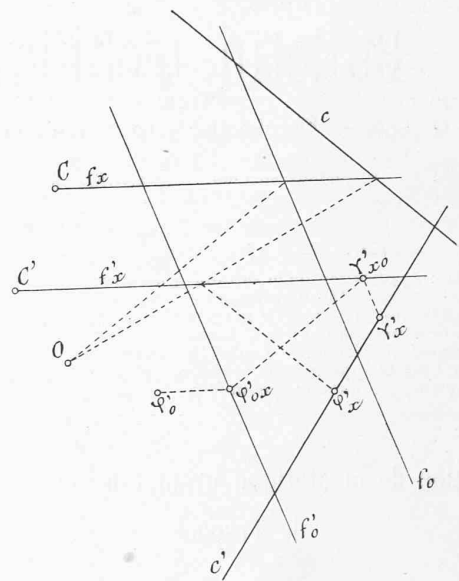


Fig. 14.

$\varphi'_x$  est à l'infini sur  $c'$ . Enfin, on sait encore que, si l'un seul des éléments représentatifs de  $(\Gamma_x)$  est connu, on en peut immédiatement déduire les autres à l'aide des relations géométriques qui lient les éléments représentatifs de tout complexe. En particulier, pour déterminer  $\varphi'_x$  lorsqu'on suppose connue la droite  $f_x$ , et par suite aussi  $f'_x$ , on peut procéder de la manière suivante: chercher le point de rencontre de  $f'_x$  avec la droite qui relie le point  $O$  au point d'intersection de  $c$  et de  $f_x$ ; mener, par ce point de rencontre, une parallèle à  $c$ : le point où cette parallèle coupe  $c'$  coïncide précisément avec  $\varphi'_x$ .

Ces principes rappelés, considérons un complexe  $(G_x)$  assujéti aux conditions suivantes: tout d'abord, il est en involution avec  $(\Gamma_0)$ ; ensuite, ses lignes représentatives coïncident avec celles,  $f_x$  et  $f'_x$ , du complexe  $(\Gamma_x)$  qui, il convient d'insister sur ce point, est quelconque dans  $(C)$ ; enfin, l'un de ses points représentatifs, par exemple celui qui doit être désigné par  $\gamma'_x$ , est situé sur  $c'$ . Il est visible que ces conditions définissent complètement  $(G_x)$ ; du reste, nous allons montrer qu'elles permettent, en particulier, de déterminer  $\gamma'_x$ .

Appliquons, dans ce but, la condition géométrique d'involution telle que nous l'avons obtenue au paragraphe 62 (1<sup>re</sup> partie) et projetons, en premier lieu, le point  $\varphi_0$ , parallèlement à  $f_x$ , sur  $f'_0$ , de manière à obtenir le point désigné par  $\varphi'_{0x}$  (fig. 14). Menons ensuite, par ce dernier point, une parallèle à la droite qui relie le point  $O$  au point de rencontre de  $f_x$  et de  $f_0$ , et soit  $\gamma'_{x0}$  l'intersection de cette parallèle avec  $f'_x$ . Si l'on projette enfin le point  $\gamma'_{x0}$ , parallèlement à  $f_0$  sur la droite  $c'$ , le point  $\gamma'_x$  qu'on obtient de cette manière est tel que le complexe qui admet  $f_x, f'_x$  et  $\gamma'_x$  pour éléments représentatifs coïncide nécessairement avec  $(G_x)$ .

En général, le point  $\gamma'_x$  ne coïncide pas avec  $\varphi'_x$ ; on en doit conclure que  $(\Gamma_x)$  n'est pas en involution avec  $(\Gamma_0)$ , ou, ce qui revient d'ailleurs au même, que  $(G_x)$  n'appartient

pas à (C). Imaginons alors que  $(\Gamma_x)$  varie en ne cessant pas d'appartenir à (C). Le complexe  $(G_x)$  varie également et l'examen de la figure 14 montre immédiatement que  $\varphi'_x$  et  $\gamma'_x$  se déplacent sur  $c'$  en décrivant deux ponctuelles projectives et superposées dans lesquelles le point à l'infini se correspond à lui-même. Sur  $c'$  se trouve donc nécessairement un autre point réel  $\varphi'$  confondu avec son conjugué et qui, en vertu de tout ce qui précède, est nécessairement le point représentatif d'un complexe  $(\Gamma)$  appartenant à (G) et en involution avec  $(\Gamma_0)$ .

Il suffit évidemment, pour déterminer ce point  $\varphi'$ , de considérer (fig. 15) deux positions particulières des droites  $f_x$  et  $f'_x$ , de manière à obtenir deux couples d'éléments correspondants dans les ponctuelles superposées sur  $c'$ . On simplifie d'ailleurs les constructions en choisissant comme il suit ces positions :

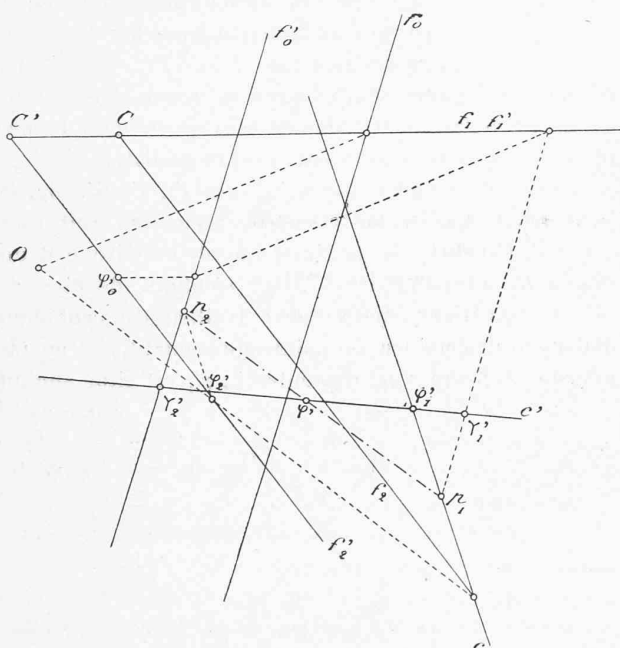


Fig. 15.

En premier lieu, faisons coïncider  $f_x$  avec la droite  $CC'$  et convenons de désigner par  $f_1$  (fig. 15) cette position spéciale. La droite  $f'_1$  coïncide aussi avec  $CC'$ , tandis que le point  $\varphi'_1$  se confond avec l'intersection de  $c$  et de  $c'$ . Quant au point  $\gamma'_1$ , on l'obtient immédiatement à l'aide de la construction générale indiquée à propos de  $\gamma'_x$  et qui ne subit, ici, aucune simplification essentielle.

Faisons ensuite coïncider  $f'_x$  avec la droite  $C'\varphi'_0$ , et désignons par  $f'_2$  cette deuxième position particulière. Le point  $\varphi'_2$  s'obtient sans aucune peine à l'aide de la construction générale que nous avons rappelée à propos de  $\varphi'_x$ . Quant au point  $\gamma'_2$ , on voit immédiatement qu'il coïncide avec l'intersection de  $c'$  et  $f'_0$ .

Imaginons maintenant qu'on projette respectivement les ponctuelles décrites par  $\varphi'_x$  et  $\gamma'_x$  depuis les points à l'infini des droites  $c$  et  $f_0$ . On obtient deux faisceaux perspectifs puisque leur rayon commun se correspond à lui-même. D'ailleurs, l'axe de perspective de ces faisceaux se détermine

immédiatement à l'aide des couples  $\varphi'_1 \gamma'_1$  et  $\varphi'_2 \gamma'_2$  qu'on vient d'obtenir, et il coïncide avec la droite désignée par  $p_1 p_2$ ; de plus, il est manifeste que l'intersection de cet axe et de la droite  $c'$  donne le point cherché  $\varphi'$ . Le problème proposé peut donc être considéré comme résolu, puisque la connaissance de  $\varphi'$  entraîne d'une manière simple celle de tous les éléments représentatifs du complexe  $(\Gamma)$ . Ajoutons que, pour ne pas compliquer la figure 15, ces éléments représentatifs, à l'exception de  $\varphi'$ , n'ont pas été déterminés.

97. Occupons-nous maintenant du deuxième problème posé à la fin du paragraphe 95. On en peut donner une première solution, très compliquée sans doute, mais susceptible d'une généralisation importante, dont nous aurons à nous occuper dans la suite, à l'aide du théorème suivant :

*Lorsque, dans un système à p termes, p complexes, ne faisant pas partie d'un système dont le nombre de termes est inférieur à p, sont en involution avec un complexe quelconque  $(\Gamma_0)$ , tous les complexes du système considéré sont aussi en involution avec  $(\Gamma_0)$ .*

Pour établir cette propriété, désignons par

$$X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0$$

les coordonnées de  $(\Gamma_0)$ . Soient ensuite

$$X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1,$$

$$\dots$$

$$X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i,$$

$$\dots$$

$$X_p, Y_p, Z_p, L_p, M_p, N_p$$

les coordonnées de p complexes  $(\Gamma_1), \dots, (\Gamma_i), \dots, (\Gamma_p)$  d'un système à p termes. On sait que, lorsque ces derniers complexes ne font pas partie d'un système dont le nombre de termes est inférieur à p, les coordonnées de l'un quelconque  $(\Gamma)$  des complexes du système à p termes peuvent être mises sous la forme suivante, dans laquelle  $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_p$  représentent des quantités arbitraires,

$$X = \sum_1^p \lambda_i X_i,$$

$$Y = \sum_1^p \lambda_i Y_i,$$

$$Z = \sum_1^p \lambda_i Z_i,$$

$$L = \sum_1^p \lambda_i L_i,$$

$$M = \sum_1^p \lambda_i M_i,$$

$$N = \sum_1^p \lambda_i N_i.$$

Mais, pour que  $(\Gamma)$  soit en involution avec  $(\Gamma_0)$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$X L_0 + Y M_0 + Z N_0 + L X_0 + M Y_0 + N L_0 = 0,$$

ou, en tenant compte des formules précédentes,

$$\sum_1^p \lambda_i (X_i L_0 + Y_i M_0 + Z_i N_0 + L_i X_0 + M_i Y_0 + N_i Z_0) = 0.$$

Or cette dernière équation est identiquement satisfaite lorsque tous les complexes  $(\Gamma_i)$  sont en involution avec  $(\Gamma_0)$ ,

puisque l'on a, dans ce cas et quelle que soit la valeur attribuée à l'indice  $i$ ,

$$X_i L_o + Y_i M_o + Z_i N_o + L_i X_o + M_i Y_o + N_i Z_o = 0.$$

Ainsi se trouve établi le théorème énoncé. On en peut déduire, en particulier, le corollaire suivant qui va jouer un rôle essentiel :

*Lorsque, dans un système à  $p$  termes,  $p$  complexes, ne faisant partie d'un système dont le nombre de termes soit inférieur à  $p$ , passent par une même droite, tous les complexes du système passent également par cette droite.*

Cette propriété n'est qu'une conséquence immédiate du théorème précédent et du fait que, lorsqu'un complexe passe par une droite donnée, il est en involution avec le complexe spécial qui admet cette droite pour directrice.

Ce résultat obtenu, soient  $(l_1), (l_2), \dots, (l_5)$ , cinq droites quelconques dans l'espace ; proposons-nous de déterminer le complexe  $(\Gamma)$  qui les contient toutes.

Choisissons, à cet effet, trois complexes  $(\Gamma'_1), (\Gamma''_1), (\Gamma'''_1)$ , ne faisant pas partie d'un même système à deux termes, et renfermant tous les trois la droite  $(l_1)$ . Un pareil choix est évidemment possible, et cela, d'une infinité de manières différentes : on peut, par exemple, astreindre ces complexes à passer, chacun, par une congruence arbitrairement choisie ce qui les définit complètement, puisque le fait de contenir  $(l_1)$  revient à les assujettir à être en involution avec un complexe spécial.

Considérons ensuite le système à deux termes défini par  $(\Gamma'_1)$  et  $(\Gamma''_1)$ . En vertu de la remarque qui vient d'être faite, il renferme un complexe et un seul qui contienne la droite  $(l_2)$ . Soit alors  $(\Gamma'''_2)$  ce complexe que l'on peut obtenir, puisque, actuellement, nous savons déterminer les éléments représentatifs d'un complexe appartenant à un système à deux termes et en involution avec un complexe donné. Mais, d'après le corollaire qui vient d'être démontré, ce complexe  $(\Gamma'''_2)$  contient aussi la droite  $(l_1)$  puisqu'il fait partie du système à deux termes défini par  $(\Gamma'_1)$  et  $(\Gamma''_1)$ .

De la même manière et en considérant successivement les systèmes à deux termes définis, d'une part, par  $(\Gamma''_1)$  et  $(\Gamma'''_1)$ , d'autre part, par  $(\Gamma'''_1)$  et  $(\Gamma'_1)$ , on est conduit à déterminer deux nouveaux complexes  $(\Gamma'_2)$  et  $(\Gamma''_2)$  qui, comme  $(\Gamma'''_2)$ , contiennent les droites  $(l_1)$  et  $(l_2)$ .

La méthode à suivre pour achever la solution du problème posé est, dès maintenant, bien visible. Le système à deux termes défini par  $(\Gamma'_2)$  et  $(\Gamma''_2)$  possède un complexe et un seul contenant la droite  $(l_3)$ . On sait, d'ailleurs, déterminer ce complexe, que nous désignerons par  $(\Gamma'''_3)$  et qui, pour les mêmes raisons que plus haut, renferme encore les deux droites  $(l_1)$  et  $(l_2)$ . A l'aide de  $(\Gamma'''_2)$  et  $(\Gamma'''_3)$ , puis de  $(\Gamma'''_2)$  et  $(\Gamma'_2)$ , on peut ensuite déterminer deux nouveaux complexes  $(\Gamma'_3)$  et  $(\Gamma''_3)$  qui, comme  $(\Gamma'''_3)$ , passent par  $(l_1), (l_2)$  et  $(l_3)$ .

De ce nouveau système, et à l'aide d'opérations identiques aux précédentes, on peut déduire trois autres complexes  $(\Gamma'_4), (\Gamma''_4)$  et  $(\Gamma'''_4)$  contenant les quatre droites  $(l_1), (l_2), (l_3)$  et  $(l_4)$ . Une vérification doit alors se présenter : ces

trois complexes appartiennent à un même système à deux termes  $(C)$ , puisque tous les complexes de l'espace, qui passent par quatre droites données, possèdent une congruence commune. D'ailleurs, deux des trois complexes affectés de l'indice 4 suffisent pour déterminer ce système  $(C)$ , qui possède un seul complexe contenant la cinquième droite donnée  $(l_5)$ . De plus, on sait déterminer ce complexe qui coïncide nécessairement avec celui qu'on se proposait d'obtenir.

98. La solution qui vient d'être indiquée exige des constructions longues et compliquées : elle nécessite, en effet, la détermination préalable de onze complexes auxiliaires et il ne saurait être question d'en faire usage dans la pratique courante. Elle est fort heureusement susceptible d'une simplification considérable, car, ainsi que nous allons le montrer, il est possible de déterminer directement trois complexes spéciaux qui peuvent jouer le rôle de ceux qui viennent d'être désignés par  $(\Gamma'_3), (\Gamma''_3)$  et  $(\Gamma'''_3)$  ; le nombre des complexes auxiliaires se trouve alors réduit à deux, si l'on fait abstraction de ceux qu'on vient de mentionner et dont la détermination est immédiate.

Désignons, en effet, par  $l_1, l_2, l_3$  et  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  (fig. 16) les éléments représentatifs des trois premières droites données  $(l_1), (l_2)$  et  $(l_3)$ . En général, il existe une droite et une seule,  $(g_1)$ , qui rencontre  $(l_1), (l_2), (l_3)$  et qui, de plus, admet  $(l_1)$  pour ligne représentative. D'ailleurs on peut immédiatement déterminer son point représentatif  $\gamma'_1$  : en premier lieu, puisque  $(g_1)$  rencontre  $l_2$ ,  $\gamma'_1$  est situé sur une

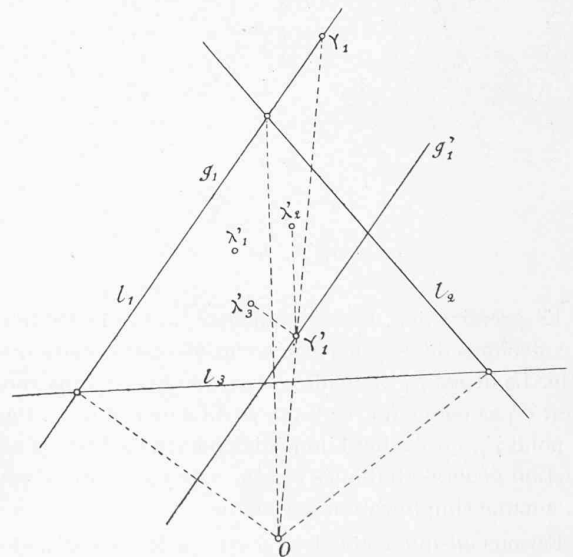


Fig. 16.

parallèle, menée par  $\lambda'_2$  à la droite qui relie le point  $O$  au point de rencontre de  $l_1$  et  $l_2$  ; d'autre part, ce même point est situé aussi sur une parallèle, menée par  $\lambda'_3$ , à la droite qui relie  $O$  au point de rencontre de  $l_1$  et de  $l_3$ , car  $(g_1)$  coupe  $(l_3)$ . Ce point  $\gamma'_1$  est donc parfaitement déterminé, et sa connaissance entraîne celle de la droite  $(g_1)$  qui, d'ailleurs, rencontre aussi  $(l_1)$  puisqu'elle a même plan projetant que cette dernière.



Des considérations analogues permettent évidemment de déterminer deux nouvelles droites ( $g_2$ ) et ( $g_3$ ) dont les lignes représentatives coïncident respectivement avec  $l_2$  et  $l_3$ , et qui, comme ( $g_1$ ) rencontrent simultanément ( $l_1$ ), ( $l_2$ ) et ( $l_3$ ). D'ailleurs, ces trois droites peuvent être considérées comme les directrices des trois complexes auxiliaires ( $\Gamma'_3$ ), ( $\Gamma''_3$ ) et ( $\Gamma'''_3$ ) qui sont alors spéciaux, et la recherche de ( $\Gamma$ ) ne dépend plus que de la détermination de ( $\Gamma'_4$ ) et de ( $\Gamma''_4$ ) par exemple, puis, finalement, de celle de ( $\Gamma$ ) lui-même. Trois applications successives de la construction indiquée au paragraphe 96 suffisent alors pour résoudre le problème proposé.

99. Les remarques qui précèdent rendent possible l'application de la méthode de Culmann, même dans le cas général où les six barres coupées par la section considérée au début sont quelconques dans l'espace. Du reste, de nouvelles simplifications se présentent si l'on tient compte des conditions particulières que vérifient presque inévitablement ces barres dans la plupart des systèmes articulés que l'on rencontre dans la pratique.

La plus essentielle de ces simplifications se produit lorsque deux barres se rencontrent, les autres pouvant demeurer quelconques. Pour fixer les idées, admettons que ( $l_1$ ) et ( $l_2$ ) se coupent, et désignons par ( $P$ ) leur point de rencontre et par ( $\pi$ ) le plan qu'elles déterminent. La droite qui passe par ( $P$ ) et s'appuie sur ( $l_3$ ) et ( $l_4$ ) peut être considérée comme la directrice d'un complexe spécial qui contient ( $l_1$ ), ( $l_2$ ), ( $l_3$ ) et ( $l_4$ ); en conséquence, elle peut jouer le rôle du complexe auxiliaire désigné par ( $\Gamma'_4$ ). De même, la droite du plan ( $\pi$ ) qui coupe ( $l_3$ ) et ( $l_4$ ) peut jouer le rôle du complexe ( $\Gamma''_4$ ). Pour déterminer le complexe opposé à ( $l_5$ ), il suffit dès lors de chercher le complexe du système à deux termes défini par ( $\Gamma'_4$ ) et ( $\Gamma''_4$ ) qui se trouve en involution avec ( $l_5$ ).

Dans de telles conditions, les opérations exigées par l'application effective de la méthode de Culmann sont facilement exécutables, comme, du reste, nous allons le montrer en considérant un système articulé qu'on rencontre dans la pratique.

(A suivre).

## Divers.

### L'hydrographie nationale.

Dans son message<sup>1</sup> à l'Assemblée nationale, du 7 février 1908, concernant la réorganisation du Département fédéral de l'Intérieur, le Conseil fédéral propose de créer une division indépendante pour le service d'hydrométrie.

C'est en 1863 que la Société helvétique des sciences naturelles nomma pour la première fois une commission avec mandat de faire des recherches sur le niveau et le régime des eaux du territoire suisse. Le 14 avril 1866, cette commission fut rem-

<sup>1</sup> Voir *Feuille fédérale* du 4 mars 1908.

placée par un bureau fédéral central hydrométrique, ayant son siège à Berne, subventionné par la Confédération. En 1871 ce bureau fut réuni à l'inspecteurat fédéral des travaux publics. Les principaux travaux accomplis par ce bureau sont: l'établissement, le repérage et la surveillance des stations limnimétriques (le réseau limnimétrique compte actuellement 399 stations), l'installation de limnographes enregistreurs, les mesures de la superficie des bassins de réception, l'établissement de profils en long et en travers des cours d'eau, les jaugeages, etc. Le service hydrométrique est aussi chargé de faire des études sur l'utilisation des forces hydrauliques pour l'électrification des chemins de fer fédéraux.

Jusqu'à présent, ainsi que nous l'avons dit plus haut, le bureau hydrométrique a constitué une subdivision de l'inspecteurat fédéral des travaux publics.

L'importance grandissante des travaux hydrométriques, tant pour la science pure que pour l'économie politique et sociale, rend au plus haut point désirable de le constituer en service distinct, qui aurait les tâches suivantes:

#### I. Travaux hydrographiques.

- a) Achèvement du réseau limnimétrique suisse;
- b) Observations limnimétriques;
- c) Jaugeages des débits fluviaux;
- d) Détermination des débits à des niveaux différents; basses eaux, eaux moyennes, hautes eaux ordinaires et extraordinaires;
- e) Etude des relations entre les chutes d'eau atmosphérique et l'écoulement, l'évaporation et l'infiltration, les apparitions d'eaux souterraines et la formation des sources;
- f) Levés et études sur la formation et le développement de deltas fluviaux dans des lacs; levés sur la configuration des vasques des lacs;
- g) Levés sur l'influence de la nature de la couche sédimentaire; sur les gisements de galets et les cônes d'alluvions; sur la formation de la glace; sur la rétroaction des barrages de glaces et des débâcles sur les courants et sur la conformation des lits; sur l'écoulement des hautes eaux; sur l'action retentive des eaux dormantes sur la décharge de l'eau et le charriage des galets dans les rivières, etc.;
- h) Organisation d'un service d'avertissement signalant les changements de niveau et crues, en vue d'assurer en temps utile la protection des installations hydrauliques en activité, la régularité des services de navigation et la protection des installations hydrauliques, ponts et ouvrages de corrections fluviales, etc., en cours de construction;
- i) Utilisation pour la science technique et publication des observations; études sur les progrès de l'hydrographie en général.

#### II. Enquête sur le régime des eaux en Suisse.

- a) Détermination des bassins de réception des cours d'eau;
- b) Tableau graphique des stations limnimétriques avec profils en travers et pentes relatives de l'eau à la surface;
- c) Levés des profils en long des cours d'eau;
- d) Jaugeages des débits minima et recherche des minima des forces hydrauliques des cours d'eau;
- e) Etablissement de tableaux synoptiques d'ensemble et cartes d'orientation.

#### III. Forces hydrauliques.

- a) Préavis sur les installations hydrauliques en projet;
- b) Etudes et préavis sur l'exploitation de forces hydro-