

Sur le tracé des courbes

Autor(en): **Laplace, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **38 (1912)**

Heft 20

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29500>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

la différence des rayons ($R - R'$) : cette condition est réalisée par les centres $O_5 O_5'$ et le point de contact C_5 tels que $C_5 O_5 O_5'$ soit *parallèle à la bissectrice* $S O$; il y aura une deuxième solution.

Mais pratiquement c'est surtout le minimum de $\frac{R}{R'}$ qui intéresse. C'est un minimum relatif car l'équation (1) doit être satisfaite ; les différentielles de $\frac{R}{R'}$ et du premier membre de l'équation (1) seront nulles séparément :

$$R d R' - R' d R = 0$$

$$(R d R' + R' d R) (1 + \cos \beta) - d R a' \sin \beta - d R' a \sin \beta = 0$$

soit en éliminant les différentielles :

$$2 R R' (1 + \cos \beta) - R a' \sin \beta - R' a \sin \beta = 0$$

et en comparant cette expression avec (1) :

$$R a' \sin \beta + R' a \sin \beta = c^2 = 2 R R' (1 + \cos \beta)$$

$$R \frac{a'}{c} \sin \beta + R' \frac{a}{c} \sin \beta = c$$

$$R \sin a + R' \sin a' = c.$$

Cette équation exprime, si O_2 et O_2' désignent les centres cherchés, que la somme des projections de $A O_2$ et $A' O_2'$ sur $A A'$ est égale à $A A'$ c'est-à-dire que $A A'$ est *perpendiculaire* à $O_2 O_2'$ et *parallèle* à la tangente commune $S_2 S_2'$ ce qui entraîne :

$$a_2 = a \quad a'_2 = a'$$

l'angle a est donc bissecté par $A C_2$; par suite :

Le rapport $\frac{R}{R'}$ des rayons sera minimum lorsque les deux arcs de cercle se raccorderont sur la bissectrice $S O$ de l'angle au sommet.

Il existe une deuxième solution $C_4 O_4 O_4'$.

Sur le tracé des courbes.

Par M. LAPLACE, ingénieur.

Le tracé des courbes en arc de cercle en terrain accidenté par les procédés ordinairement employés est souvent sujet à quelques difficultés, spécialement en ce qui concerne la détermination des éléments principaux du problème.

Le cas le plus simple et le plus fréquent consiste à réunir par un arc de cercle de rayon r deux alignements piquetés formant entre eux l'angle φ ; il est facile, à l'aide de ces deux éléments de déterminer par le calcul les autres éléments principaux de l'arc, soit la valeur de l'angle au centre ψ , la longueur des tangentes t et le développement de la courbe d :

$$\psi = 180 - \varphi \quad t = r \cdot \cot \frac{\varphi}{2} \quad d = \frac{r \cdot \pi}{180} (180 - \varphi)$$

On peut ensuite, sans aucune difficulté, tracer la courbe à l'aide d'un des trois procédés connus :

1° Tracé par angles consécutifs et cordes correspondantes.

2° Tracé par ordonnées sur la corde.

3° Tracé par ordonnées sur la tangente.

Cependant il arrive souvent que lors du piquetage des voies de communication projetées, des routes en particulier, des sujétions se présentent, qui compliquent le problème ; l'exemple le plus commun de ces sujétions est le point forcé, ou point fixe, par lequel doit passer la courbe à tracer ; milieu d'un pont existant qu'on désire conserver, mi-distance entre bâtiments se faisant face, ou lieu géométrique quelconque, il apparaît sous les formes les plus diverses et dans les cas les plus variés.

Le problème peut alors s'énoncer comme suit : *Déterminer le rayon d'un arc de cercle tangent à deux droites et passant par un point P.*

Suivant la disposition du terrain, les obstacles qu'il présente, diverses solutions, subordonnées à la possibilité de mesurer tels ou tels éléments, sont possibles ; le but de cette notice est simplement de développer celles de ces solutions susceptibles d'applications pratiques.

1^{re} Hypothèse : *Les points de tangence T_1 et T_2 ont pu être déterminés exactement sur le terrain, l'opérateur a mesuré les angles α' , β' et γ et chaîné les distances a et b .*

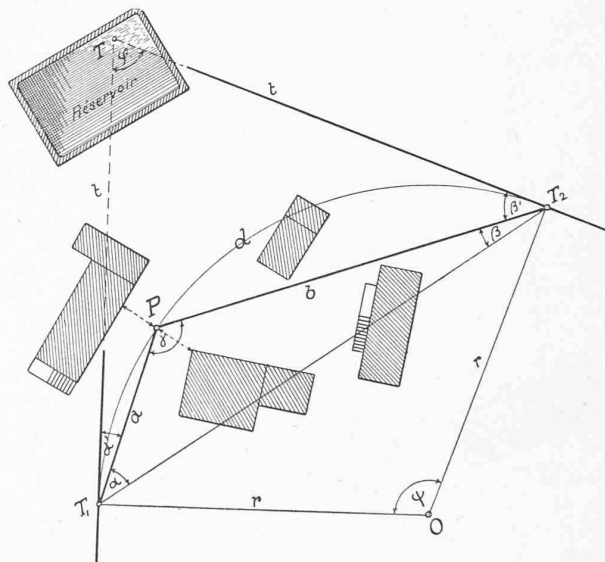


Fig. 1.

T_1 n'est pas visible de T_2 et le point de concours des tangentes T est inaccessible.

Connaissant donc a , b , α' , β' , γ on se propose de calculer les éléments principaux de l'arc φ , ψ , r , d .

Remarquons encore qu'outre la détermination de ces éléments, il sera toujours nécessaire que la solution donne explicitement la position des points de tangence, ou du moins de l'un deux, condition nécessaire à l'application au piquetage de la courbe d'un des trois procédés usuels mentionnés plus haut.

Le triangle $T_1 P T_2$ fournit la relation :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{b - a \cos \gamma}$$

d'où l'on tire la valeur d' α .

$$\beta = 180 - (\alpha + \gamma)$$

et (1) $\varphi = 180 - (\alpha + \alpha' + \beta + \beta') = \gamma - (\alpha' + \beta')$
 $\psi = 180 - \gamma + \alpha' + \beta'$

Du même triangle on obtient :

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Le rayon est alors donné par la relation :

$$(2) r = \frac{a b c}{4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

ou $p = \frac{a + b + c}{2}$

et (3) $t = r \cdot \cot \frac{\varphi}{2} = r \cdot \cot \frac{\gamma - \alpha' - \beta'}{2}$

$$d = \frac{r \cdot \pi}{180} \cdot (180 - \varphi) = \frac{r \cdot \pi}{180} \cdot \psi$$

Remarque : Lorsqu'il est possible de mesurer c directement les formules (1) (2) et (3) suffisent à déterminer la solution, si de plus le sommet T est accessible, (2) et (3) donnent immédiatement la valeur de r et de t .

2^{me} Hypothèse : Les normales a et b de P sur les tangentes ont été mesurées et l'angle ψ que ces normales forment entre elles, déterminé.

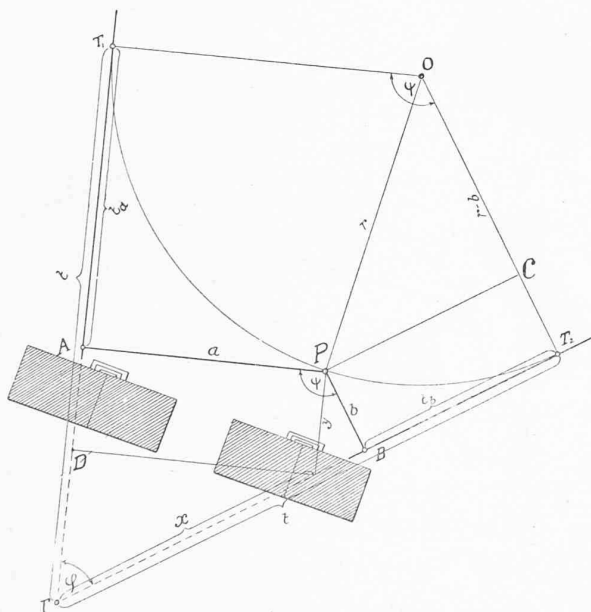


Fig. 2.

Le sommet des tangentes est inaccessible et la position exacte de T_1 et T_2 inconnue.

Données a, b, ψ ; on se propose de déterminer r, t, d, t_a, t_b où t_a et t_b sont les longueurs à chaîner respectivement de A et de B sur les tangentes pour déterminer les points de tangence T_1 et T_2 .

Du triangle OPC on tire :

$$t_b^2 + (r-b)^2 = r^2$$

ou : (4) $t_b^2 + b^2 - 2 r b = 0$

Rapportons le système à deux axes de coordonnées obliques, coïncidant avec les deux tangentes, on obtient alors les relations suivantes :

$$(5) \begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{y} & ; b = y \sin \varphi & ; y = \frac{b}{\sin \varphi} \\ \cos \varphi = \frac{t - t_b - x}{y} & ; t_b = y \cos \varphi + x - t & ; x = \frac{a}{\sin \varphi} \end{cases}$$

En introduisant les valeurs de b et t_b dans (4), et en effectuant les calculs, il vient :

$$(6) y^2 + x^2 - 2 y t \cos \varphi - 2 x t + 2 x y \cos \varphi - 2 r y \sin \varphi + t^2 = 0.$$

Pour $y = t, x = 0$, dans ce cas spécial (6) prend la valeur :

$$2 t^2 (1 - \cos \varphi) - 2 r t \sin \varphi = 0$$

d'où (7) $r = t \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$, première valeur de r en fonction de t .

Remplaçons alors r par sa valeur dans (6) et ordonnons par rapport à t :

$$(8) t^2 - 2 t (x + y) + x^2 + y^2 + 2 x y \cos \varphi = 0$$

$$(9) t = (x + y) \pm \sqrt{2 x y (1 - \cos \varphi)}$$

Donnons à x et à y leurs valeurs déterminées sous (5) :

$$(10) t = \frac{1}{\sin \varphi} (a + b \pm \sqrt{2 a b (1 - \cos \varphi)})$$

$$(11) r = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} (a + b \pm \sqrt{2 a b (1 - \cos \varphi)})$$

t_b s'obtient en introduisant dans (5) la valeur de t donnée par (10) :

$$(12) t_b = \frac{1}{\sin \varphi} \left[b (1 - \cos \varphi) \pm \sqrt{2 a b (1 - \cos \varphi)} \right]$$

De la figure on tire :

$$t_a = TT_1 - AD - DT = t - y - x \cos \varphi.$$

$$(13) t_a = \frac{1}{\sin \varphi} \left[a (1 - \cos \varphi) \pm \sqrt{2 a b (1 - \cos \varphi)} \right]$$

Enfin le développement de la courbe :

$$(14) d = \frac{r \cdot \pi \cdot \psi}{180}$$

En pratique, il convient de choisir le signe + devant la racine, le signe - se rapportant au cercle de moindre diamètre compris entre P et les tangentes.

Lors de l'application de ces résultats à un cas concret il est avantageux de disposer les calculs comme suit, c'est-à-dire de calculer d'abord les facteurs k, l, m , et de les introduire ensuite dans les expressions cherchées :

$$(1 + \cos \psi) = (1 - \cos \varphi) = k \quad t_a = l (a k + m)$$

$$\frac{1}{\sin \psi} = \frac{1}{\sin \varphi} = l \quad t_b = l (b k + m)$$

$$t = l (a + b + m)$$

$$\sqrt{2 a b k} = m$$

$$r = k \cdot l \cdot t.$$

$$d = 0,017453 r \cdot \psi.$$

L'exactitude des formules proposées se vérifie facilement par l'application au cas spécial ou $\psi = 90^\circ$ et $a = b = a_1$.

$$(10) t = 2 a_1 + \sqrt{2 a_1^2} = a_1 (2 + \sqrt{2})$$

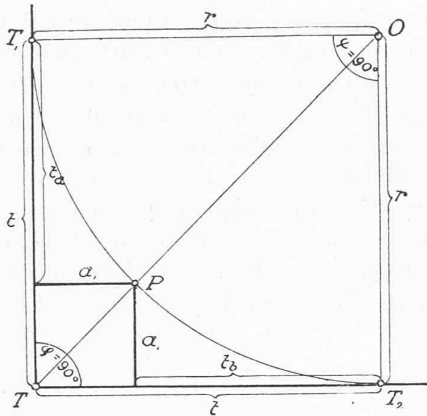


Fig. 3.

$$(11) r = 2 a_1 + \sqrt{2 a_1^2} = a_1 (2 + \sqrt{2})$$

d'où $r = t$

$$(12) t_b = a_1 + \sqrt{2 a_1^2} = a_1 (1 + \sqrt{2})$$

$$(13) t_a = a_1 + \sqrt{2 a_1^2} = a_1 (1 + \sqrt{2})$$

d'où $t_a = t_b = t - a_1$

$$(14) d = \frac{r \cdot \pi \cdot 90}{180} = \frac{r \cdot \pi}{2}$$

3^{me} Hypothèse. L'opérateur a mesuré les segments $AP = a$ et $PB = b$ d'une droite quelconque AB astreinte aux seules conditions :

1^o de passer par le point fixe P .

2^o de permettre la mensuration de AP et PB .

3^o de couper les tangentes en deux points accessibles permettant la lecture des angles α et β que forme la droite avec les deux tangentes.

Données : a, b, α, β , on se propose encore de déterminer r, t, d, t_a, t_b ; t_a et t_b ayant la même signification que précédemment.

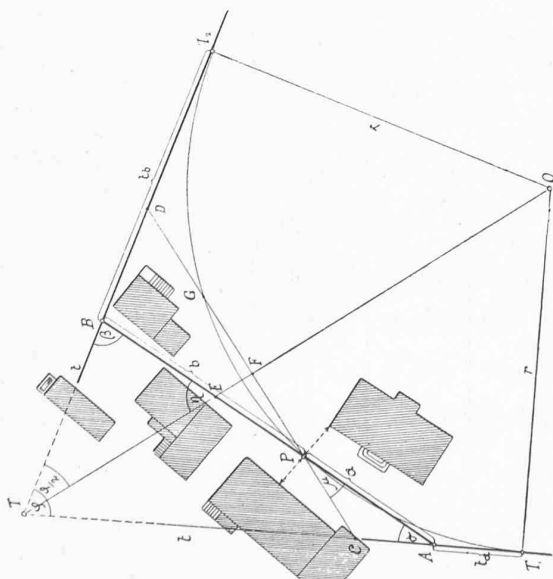


Fig. 4.

De la figure on tire les valeurs suivantes :

$$TB = (a + b) \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = (a + b) \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$EB = TB \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \eta} = (a + b) \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}$$

$$PD = \frac{b \sin \beta}{\sin (\beta - \mu)} = b \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$BD = \frac{b \sin \mu}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = b \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$PF = FG = PE \cdot \cos \mu = (b - EB) \cos \mu = \frac{b \sin \beta - a \sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$GD = PD - (PF + FG) = PD - 2PF = \frac{a \sin \alpha}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$DT_2^2 = PD \cdot GD = \frac{a \sin \alpha \cdot b \sin \beta}{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

$$DT_2 = \frac{\sqrt{a b \sin \alpha \sin \beta}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

(15)

$$t_b = DT_2 + BD = \frac{\sqrt{a b \sin \alpha \sin \beta}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} - b \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$AC = \frac{CP \sin \mu}{\sin \alpha} = \frac{GD \sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \alpha} = a \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$(16) t_a = CT_1 - AC = DT_2 - AC =$$

$$\frac{\sqrt{a b \sin \alpha \sin \beta}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} + a \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$(17) t = t_b + TB = \frac{\sqrt{a b \sin \alpha \sin \beta}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} + \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$(18) r = t \frac{1 + \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)}; (19) d = r \cdot \pi \frac{\alpha + \beta}{180}$$

En pratique, il est utile de grouper les calculs suivant le schéma ci-dessous :

$$\sin \alpha = g \quad t_a = m + \frac{a i}{k}$$

$$\sin \beta = h \quad t_b = m - \frac{b i}{k}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = i \quad t = m + \frac{a g + b h}{k}$$

$$\sin (\alpha + \beta) = k \quad r = t \frac{1 + l}{k}$$

$$\cos (\alpha + \beta) = l \quad d = 0,017453 r \cdot (\alpha + \beta)$$

$$\frac{\sqrt{a b \sin \alpha \sin \beta}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = m$$

L'application de ces nouvelles formules au cas caractérisé par la fig. 3 en démontre aisément l'exactitude.

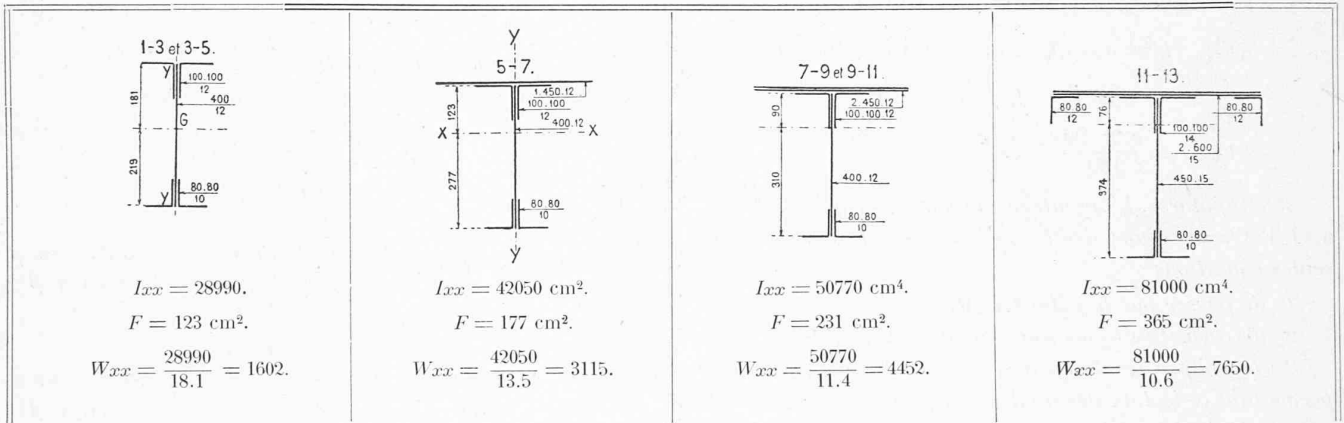
En résumé la présente notice offre trois solutions du problème énoncé, la première applicable lorsque les points de tangence sont connus, la deuxième liée à la possibilité d'abaisser du point fixe les normales sur les deux tangentes, la troisième enfin, la plus générale, ne requérant que la mensuration des éléments d'une transversale quelconque passant par le point imposé. Dans la grande majorité des cas où les deux premières solutions seront inapplicables, cette dernière fournira les valeurs cherchées; si pourtant elle se

récusait à son tour, il ne resterait plus qu'à procéder par tâtonnements, c'est-à-dire évaluer sur le plan ou estimer le rayon, tracer la courbe en partant d'un point de tangence fixé arbitrairement sur l'une des tangentes, puis modifier l'un et l'autre de ces deux éléments jusqu'à ce que la courbe veuille bien passer par le point fixe et toucher l'autre tangente; on pourrait encore remplacer la courbe unique par deux arcs de cercle tangents d'une part à l'une des tangentes données, d'autre part à une droite judicieusement choisie passant par le point fixe.

Le Pont Ch. Bessières, à Lausanne.

(Suite des calculs¹).

Membrure supérieure. — Profil. — I. F. i. W. pour tous les arcs.



Diagonales.

Nos des barres	Efforts		Profils	Section nette	σ_{adm}	σ_{eff}	Attaches		
	minima	maxima					n rivets	σ_{eff}	ρ_{adm}
1-2	T. -16,0	T. 3,7	$\frac{80.80}{10}$	51,2	0,63	0,47	12 de 22	0,52	0,57
3-4	-10,8	29,3	"	"	0,71	0,57	"	0,64	0,64
5-6	-9,7	33,9	"	"	0,73	0,66	16 de 22	0,56	0,66
7-8	-9,7	40,7	$\frac{90.90}{11}$	64,7	0,74	0,63	22 de 22	0,49	0,67
9-10	-3,4	53,4	$\frac{100.100}{12}$	79,6	0,79	0,67	26 de 22	0,54	0,71
11-12	10,1	73,6	$\frac{100.100}{14}$	91,9	0,83	0,80	30 de 22	0,65	0,75

Vérif. de 1-2 au flambage $\frac{L}{i} = \frac{520}{3.74} = 139$.

$\sigma_k adm = 0^{\circ} 28$. $\sigma_{eff} = \frac{16.0}{60} = 0^{\circ} 27$.

\equiv 4 corn.

Mêmes profils pour tous les arcs.

¹ Voir N° du 25 mars 1912, page 71.