Sur quelques appareils d'intégration

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **40 (1914)**

Heft 5

PDF erstellt am: **02.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-30839

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

40me Année. 10 Mars 1914. N° 5.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES — PARAISSANT DEUX FOIS PAR MOIS

RÉDACTION : Lausanne, 2, rue du Valentin : Dr H. DEMIERRE, ingénieur.

SOMMAIRE : *Sur quelques appareils d'intégration*, par A. Ansermet, ingénieur.— Concours pour l'élaboration des plans d'un bâtiment destiné à l'Ecole de filles, commune de Sion (Valais), (suite et fin).— *Le cadastre, les améliorations foncières et la préparation professionnelle des géomètres.*— Société fribourgeoise des ingénieurs et architectes — Résultats du concours pour l'Institut Mégevand, à Genève.

Sur quelques appareils d'intégration

par A. Ansermet, ingénieur.

Il y a à peine un siècle que les premiers appareils d'intégration furent inventés; aujourd'hui leur nombre est considérable et leur emploi répandu dans toutes les sciences appliquées, les sciences techniques en particulier (résistance des matériaux, électrotechnique, architecture navale, etc.). Nous ne parlerons pas dans cet article de l'intégration mécanique des équations différentielles; les recherches faites jusqu'ici dans ce domaine avaient principalement pour but l'intégration d'équations qui se rencontrent en balistique intérieure et extérieure (celles de Riccati et d'Abel par ex.) et les lecteurs du *Bulletin* que cela intéresse trouveront dans un ouvrage récent[1] une étude monographique de ces appareils. Il ne sera donc question dans ce qui va suivre que des intégrateurs simples et comme types de ces différents intégrateurs nous choisirons ceux construits par les maisons Amsler à Schaffhouse et Coradi à Zurich, à l'obligeance desquelles nous devons les clichés qui accompagnent cet exposé.

Sous le nom d'intégrateurs simples on désigne :

I. Les planimètres, qui permettent le calcul des aires (planes ou sphériques).

II. Les intégromètres, servant à mesurer les aires, les moments statiques et les moments d'inertie des figures planes.

III. Les intégraphes, qui dessinent automatiquement la courbe intégrale, soit la fonction $Y = \int f(x)\, d\,x$.

IV. Les analyseurs harmoniques donnant les coefficients A et B de la série de Fourrier.

Le premier chapitre, très succinct, sera donc consacré aux planimètres dont la construction est connue de chacun.

I. Les planimètres.

a) Les planimètres à rotation. — Ces appareils doivent leur nom au fait que la roulette intégrante roule sur un cône de révolution tournant autour de son axe; ils n'ont plus guère qu'un intérêt historique.

b) Les planimètres à tige de longueur constante. — Le principe est le suivant : une tige portant la roulette intégrante est munie à une extrémité d'un traçoir qui décrit le contour de la figure à calculer pendant que l'autre extrémité est astreinte par un mécanisme à engendrer un certain lieu *(directrice)*; à ce point de vue il faut distinguer :

1° Le planimètre polaire (directrice circulaire).

2° » linéaire (directrice rectiligne).

3° » de Prytz (la directrice est l'enveloppe de la tige).

4° Le planimètre Petersen (la tige reste parallèle à une direction fixe).

Le plus répandu de tous est le planimètre polaire à disque.

c) Les planimètres ne rentrant dans aucune des catégories *a)* ou *b)* et parmi lesquels nous citerons les planimètres d'Amsler pour le calcul des figures sphériques.

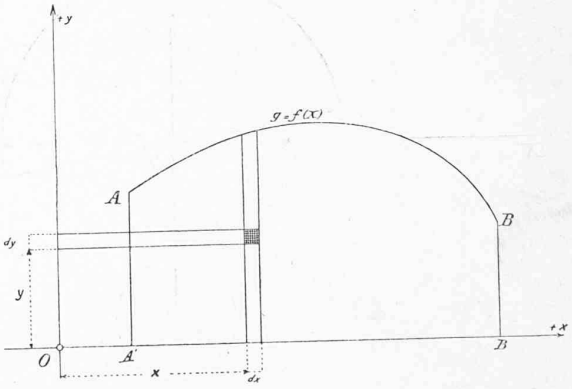

Fig. 1.

Calcul du moment statique, du moment d'inertie et du moment centrifuge.

Considérons (fig. 1) la figure $ABB'A'$ rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires; on peut, indirectement, il est vrai, calculer au moyen du planimètre le moment statique S_x, le moment d'inertie I_x et le moment centrifuge C_{xy} :

$$S_x = \int\int y\, dx\, dy = \int dx \int y\, dy = \frac{1}{2}\int y^2\, dx$$

$$I_x = \int\int y^2\, dx\, dy = \int dx \int y^2\, dy = \frac{1}{3}\int y^3\, dx$$

$$C_{xy} = \int\int xy\, dx\, dy = \int x\, dx \int y\, dy = \frac{1}{2}\int x\, y^2\, dx$$

[1] Les appareils d'intégration, par H. de Morin (Gauthier-Villars).

Il suffit donc de construire trois courbes auxiliaires ayant pour ordonnées respectivement y^2, y^3 et xy^2 ; en les planimétrant, on obtient le double du moment statique, le triple du moment d'inertie, et le double du moment centrifuge. La construction de ces trois courbes, à l'aide de la règle logarithmique par exemple, est assez rapide ; malgré cela ce procédé a une valeur plus théorique que pratique.

II. Les intégromètres.

Nous choisirons comme type de ces appareils, pour en étudier le principe, l'intégrateur d'Amsler dont la fig. 2 donne le schéma du mécanisme. Soient A l'aire d'une figure plane (le profil d'un rail par ex.), S_x et I_x les moments statique et d'inertie de cette figure par rapport à un axe quelconque XX, enfin b la longueur du bras mobile $O_1 t$; ce bras porte une roulette intégrante R et un traçoir t qui suit le pourtour de la figure pendant que l'extrémité O_1 est *astreinte à demeurer sur l'axe XX*. C'est donc le principe des planimètres linéaires et nous aurons à chaque instant : $y = b \sin \alpha$

en outre à un déplacement dx de O_1 correspond sur la roulette R un arc élémentaire $\sin \alpha \, dx$.

Appliquons maintenant les formules établies précédemment :

$$A = \int y \, dx = b \int \sin \alpha . \, dx$$

$$S_x = \frac{1}{2} \int y^2 \, dx = \frac{1}{2} b^2 \int \sin^2 \alpha . \, dx$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int y^3 \, dx = \frac{1}{3} b^3 \int \sin^3 \alpha . \, dx$$

Comme d'autre part :

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \pm 2 \alpha \right)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3 \alpha$$

Nous aurons :

$$S_x = -\frac{1}{4} b^2 \int \sin \left(\frac{\pi}{2} \pm 2 \alpha \right) dx \quad \left(\int dx = o \right)$$

$$I_x = \frac{1}{12} b^3 \left[3 \int \sin \alpha \, dx - \int \sin 3 \alpha \, dx \right]$$

Le problème est donc ramené à la détermination des 3 intégrales :

$$\int \sin \alpha \, dx$$

$$\int \sin \left(\frac{\pi}{2} \pm 2\alpha \right) dx$$

$$\int \sin 3 \alpha \, dx$$

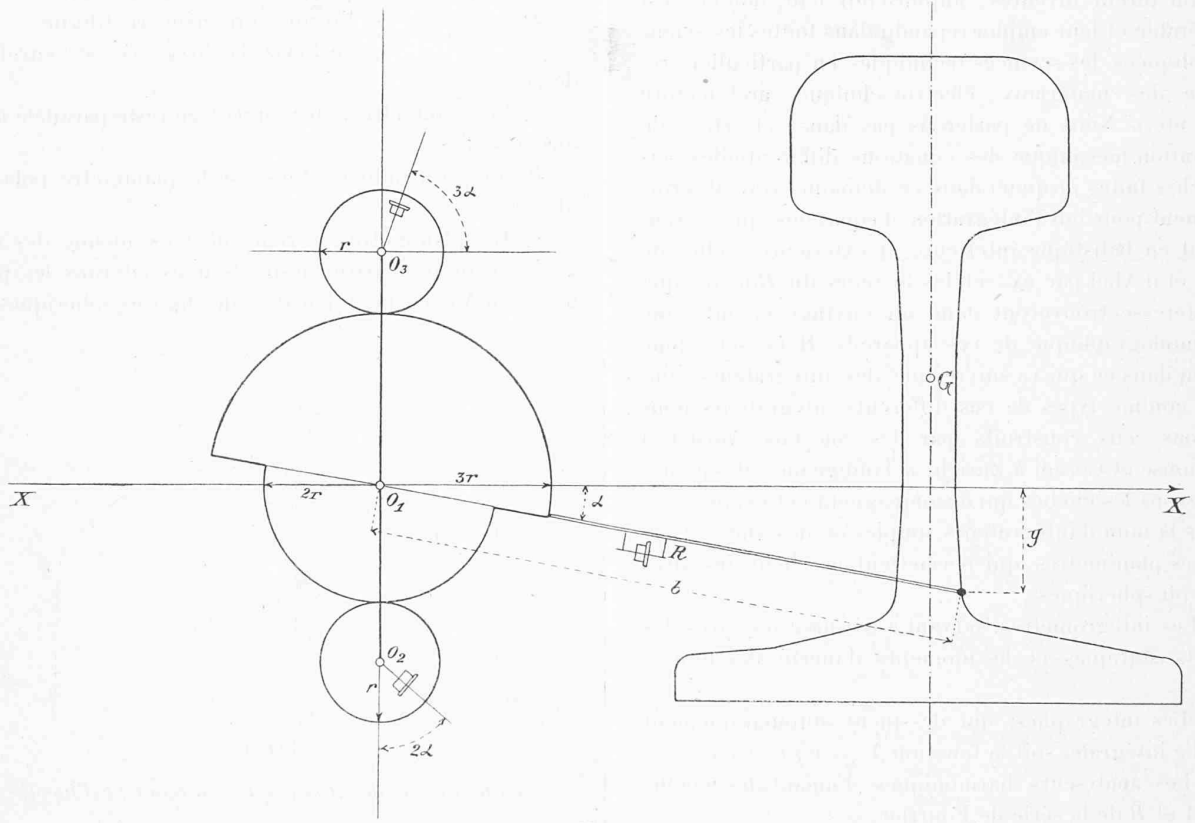

Fig. 2

La fig. 2 montre clairement le dispositif adopté par Amsler : le point O_1 est le centre de deux segments circulaires de rayons $2r$ et $3r$; ces segments engrènent avec deux disques O_2 et O_3 de rayon r et portant chacun une roulette intégrante. Il en résulte que si à un moment quelconque les axes des trois roulettes font *avec l'axe des x* des angles égaux respectivement à α,

$$\frac{\pi}{2} \pm 2 \alpha \quad \text{et} \quad 3 \alpha$$

il en sera de même à chaque instant quelle que soit la valeur de α. Les lectures une fois faites sur les roulettes

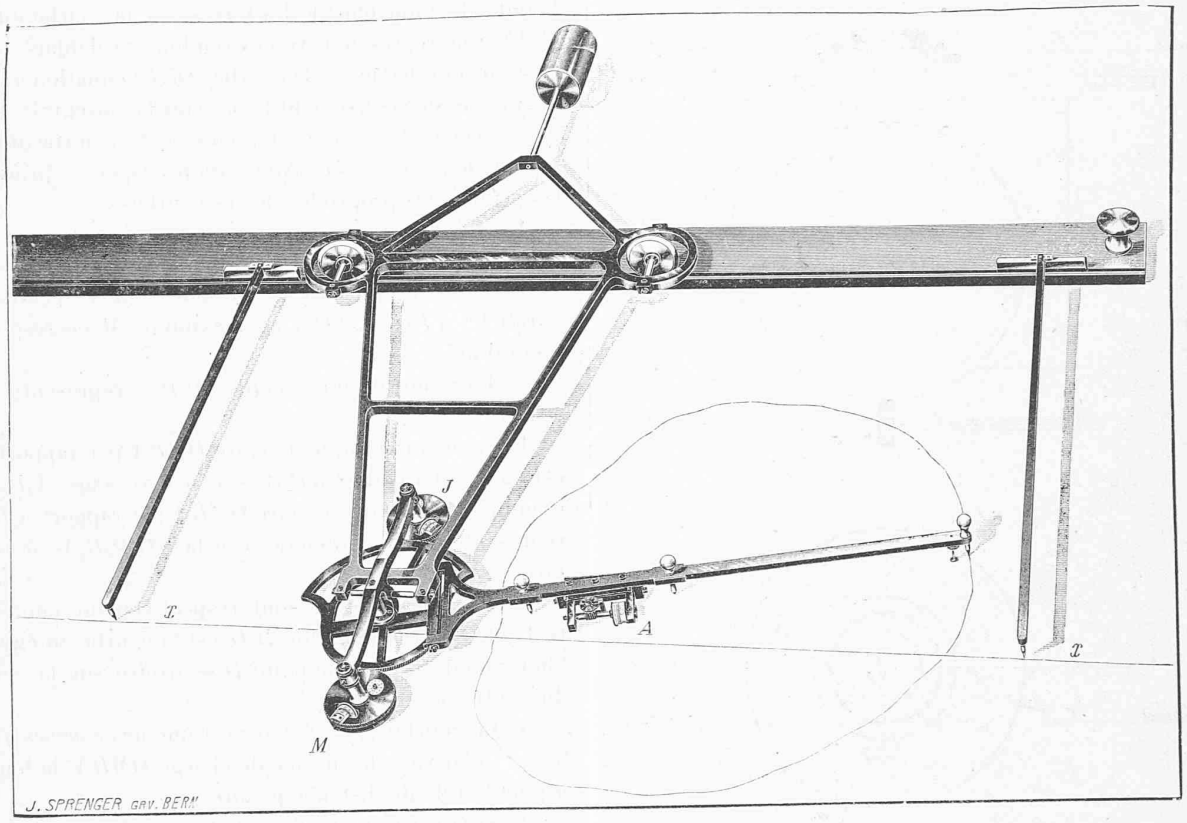

Fig. 3. — Intégrateur Amsler (N° 2)

il ne restera plus qu'à les multiplier par des constantes instrumentales appropriées. La fig. 3 montre la construction de l'intégrateur d'Amsler : le centre O_1 est astreint à demeurer sur XX par l'intermédiaire d'une règle parallèle à cet axe.

Appareil Coradi. — Cet appareil est dû au professeur H. S. Hele-Shaw, à Liverpool ; la fig. 5 en donne la construction et la fig. 4 le schéma en élévation et en plan. Un cadre portant 3 sphères, mobiles autour de leur axe horizontal hh', et le bras muni du traçoir est astreint à se déplacer suivant l'axe des x ; ce mouvement est transmis aux sphères S par des rouleaux r' de telle façon qu'à un déplacement élémentaire dx corresponde au point de contact c un arc kdx (k = constante). En outre, autour de l'axe vertical v de chaque sphère tourne un bâti portant une roue dentée de rayon R et une roulette intégrante R_1 astreinte à s'appuyer constamment sur l'équateur de la sphère ; le plan de R_1 passe par V ; par suite l'arc de déroulement élémentaire sera égal à : $Sin\ \varphi.\ kdx$; enfin les roues dentées des 3 bâtis engrènent ensemble et leur rotation est solidaire de celle du bras moteur ; les dimensions sont les suivantes :

Sphère du milieu (Aire) : $R = r$ $(\varphi = \alpha)$

» droite (Mt statique) : $R = \frac{1}{2} r$ $(\varphi = \frac{\pi}{2} \pm 2\alpha)$

» gauche (Mt d'inertie) : $R = \frac{1}{3} r$ $(\varphi = 3\alpha)$

Nous retombons sur le principe déjà établi pour l'intégromètre d'Amsler.

Remarque : On peut généraliser ce principe pour calculer les intégrales de la forme :

$$\int y^n\, dx = b^n \int sin^n\, \alpha\, dx$$

en effet exprimons $S\,n^n\ \alpha$ en fonction linéaire des sinus des multiples de α ; c'est une application directe de la formule de Moivre :

n pair :

$$2^{n-1} (-1)^{\frac{n}{2}} sin^n\, \alpha = cos\ n\ \alpha - \frac{n}{1} cos\,(n-2)\,\alpha \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.\,2} cos\,(n-4)\,\alpha - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots(\frac{n}{2}+2)}{1.\,2\ldots(\frac{n}{2}-1)} cos 2\alpha \ldots$$

$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(\frac{n}{2}+1)}{1.\,2\ldots\frac{n}{2}} \frac{1}{2}.$$

n impair :

$$2^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} sin^n\, \alpha = sin\ n\ \alpha - \frac{n}{1} sin\,(n-2)\,\alpha \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.\,2} sin\,(n-4)\,\alpha \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots(\frac{n+3}{2})}{1.\,2\ldots(\frac{n-1}{2})} sin\,\alpha$$

ce qui revient à calculer des intégrales de la forme :

$$\int sin\ m\ \alpha\ dx$$

et il suffit pour cela d'avoir une roulette intégrante dont l'axe est constamment incliné de l'angle $m\ \alpha$ sur l'axe des x. L'intégrateur N° 4 d'Amsler donne l'$\int y^4 dx$. (Pour calculer le moment d'inertie des corps de révolution).

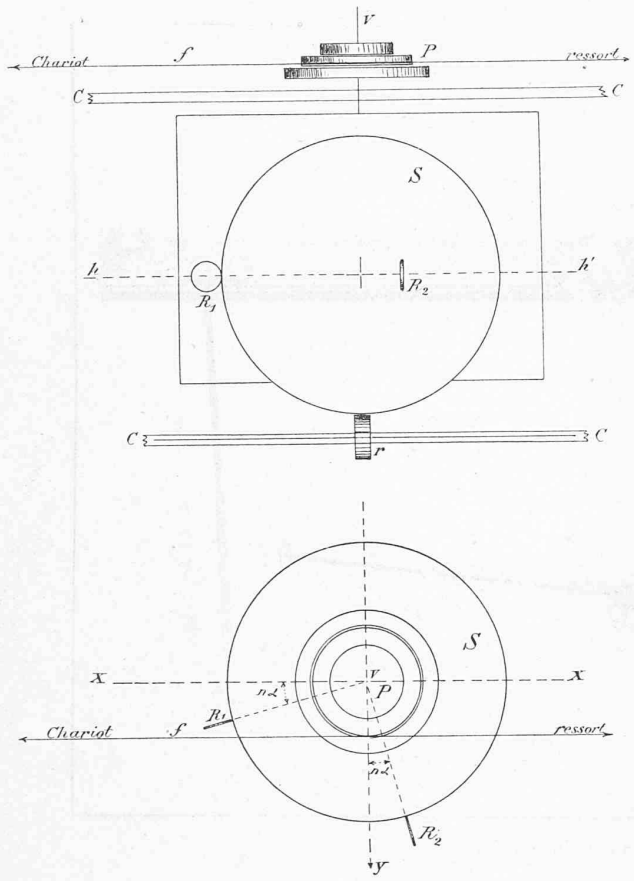

Fig. 4.

III. Les intégraphes.

Les intégraphes sont des appareils qui donnent non seulement le résultat final de l'intégration des expressions telles que $\int y dy$, $\int y^2 dx$, etc., mais encore la variation de ces intégrales pour chaque valeur de l'abscisse x et ceci par le tracé de la courbe intégrale ; c'est donc par l'étude de cette dernière que nous commencerons.

La courbe intégrale se rencontre fréquemment en pratique : la courbe de Brückner par exemple, utilisée pour l'étude du mouvement des terres, est la courbe intégrale de la ligne représentative des remblais et déblais.

Considérons (fig. 6) la courbe OMB d'équation $y = f(x)$ et traçons successivement la 1re courbe intégrale O_1IB_1 : $ay_1 = \int y dx$ $(a = ou \neq 1)$, puis la 2me courbe intégrale O_2B_2 : $a\, y_2 = \int y_1 dx$. Nous allons rappeler brièvement les principales propriétés de ces courbes :

1° $$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y}{a} \qquad \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_1}{a}$$

Les tangentes en P_1 et P_2 sont donc respectivement parallèles à PQ et P_1Q_1 ; au maximum M correspond au point d'inflexion I.

2. L'ordonnée quelconque P_1P_1' représente l'aire $OMPP'$.

Le moment statique de l'aire $OMBA$ par rapport à BA est égal soit à l'aire $O_1IB_1A_1$ soit à l'ordonnée A_2B_2, enfin le moment d'inertie de l'aire $OMBA$ par rapport à BA est représenté par le double de la surface $O_2P_2B_2A_2$ (a est supposé égal à 1).

Les courbes y_1 et y_2 sont respectivement tangentes à O_1A_1 et O_2A_2 ; la tangente B_2D est la courbe intégrale de l'horizontale B_1C_1 et le point D se trouve sur la verticale du centre de gravité G.

3° La courbe $y_2 = \int y_1\, dx$ est une des *courbes funiculaires* relative à la surface de charge $OMBA$ (la longueur a joue le rôle de distance polaire).

4° Si OA est une poutre droite *encastrée* en A soumise à la surface de charge $OMBA$, la 1re courbe intégrale

$$y_1 = \int y dx$$

représente les *efforts tranchants* et la 2me courbe intégrale $y_2 = \int y_1 dx$ représente les *moments fléchissants* dans les différentes sections ; enfin la *ligne élastique :*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M}{EI}$$

s'obtient par une double intégration de la courbe d'ordonnées $\frac{M}{EI}$; le module d'élasticité E est presque toujours constant ; si le moment d'inertie I est aussi constant, il suffit de construire la 2me courbe intégrale de celle des moments fléchissants.

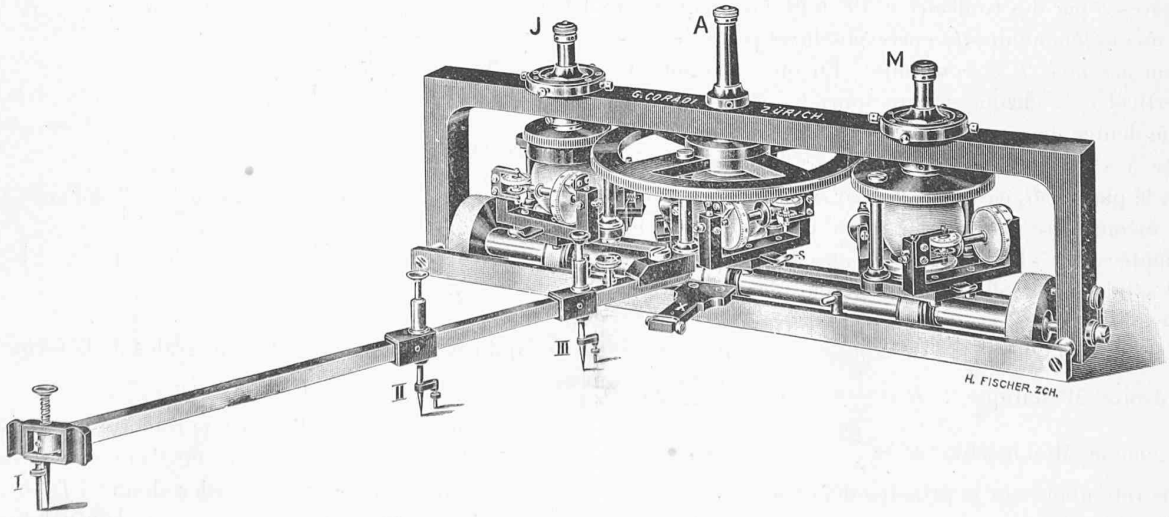

Fig. 5 — Intégromètre Hele-Shaw (Coradi).

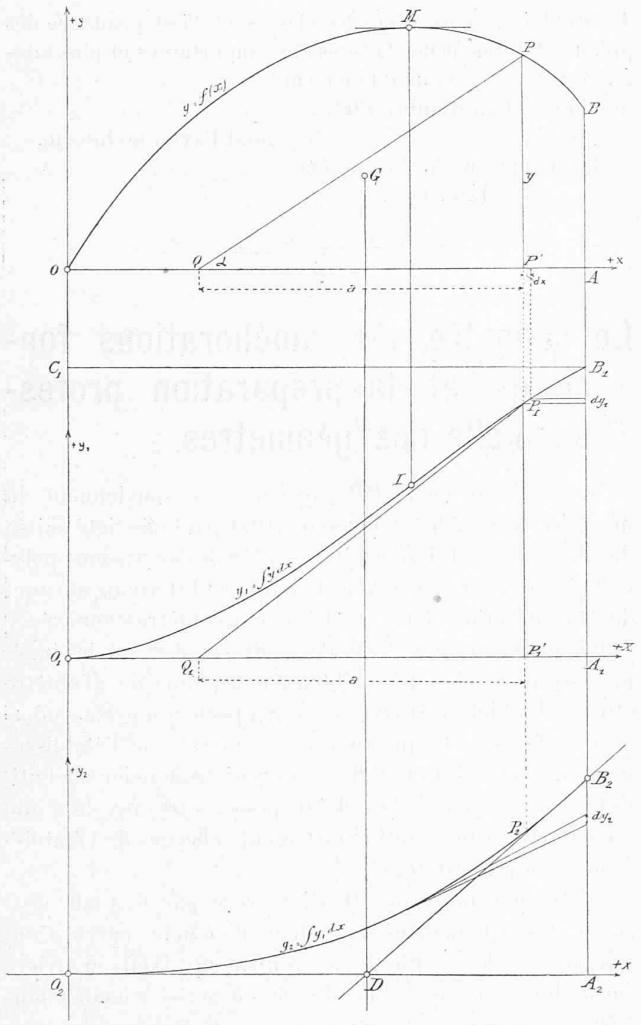

Fig. 6.

Nous avons retrouvé des propriétés bien connues de la statique graphique et montré ainsi les services que peuvent rendre les intégraphes dans cette science.

Remarque : S'il s'agit, au lieu d'une figure plane, d'un système de masses (les masses adjointes relatives aux barres d'un tronçon de poutre par exemple), toutes nos propriétés subsistent ; la 1re courbe intégrale est un polygone, la 2me courbe intégrale est succession d'arcs de paraboles à axes verticaux ; veut-on construire l'ellipse centrale d'inertie du système de masses? il suffit de calculer les moments d'inertie du système par rapport à 3 droites issues

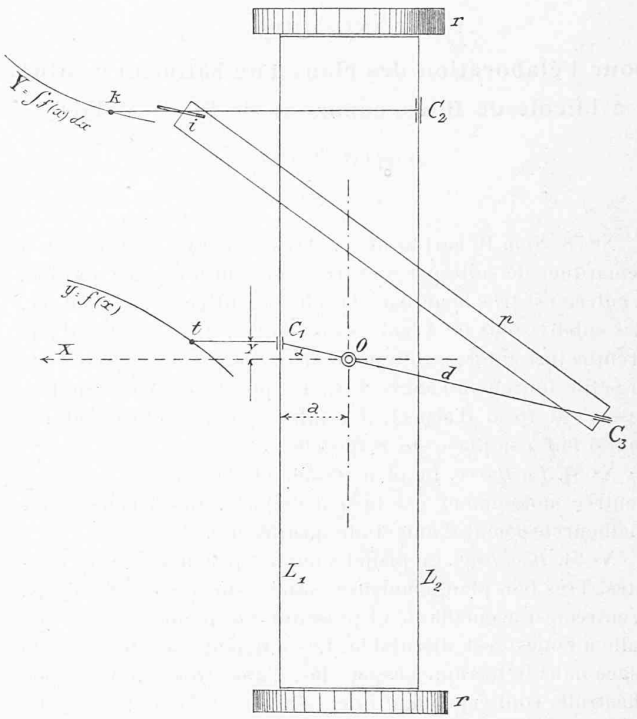

Fig. 7.

du centre de gravité, puis les rayons de gyration ; l'ellipse d'élasticité du tronçon de poutre sera alors déterminée par le centre et 3 tangentes (5 conditions).

L'intégraphe Abdank-Abakanovicz (construct. Coradi). La fig. 7 en donne le schéma et la fig. 8 la construction. Deux règles L_1 et L_2 sont portées par les rouleaux r ce qui oblige l'appareil à se déplacer suivant l'axe des x ; le long de ces règles se meuvent les chariots C_1 et C_2. Au chariot C_1 est lié rigidement le traçoir t qui suit la courbe donnée et à C_2 la roulette intégrante i et le tire-ligne k ; au milieu du cadre un axe fixe O porte un manchon dans lequel glisse la directrice d ; sur cette dernière se meut le chariot C_3. Le parallélogramme p a pour but de maintenir la roulette *i constamment parallèle à la directrice d*. Par suite à un déplacement $(dx,\ dy)$ de t correspond un déplacement $(dx,\ dY)$ de i tel que :

$$\frac{dY}{dx} = tg\ \alpha = \frac{y}{a} \qquad aY = \int y\ dx$$

Le tire-ligne k trace la courbe intégrale et la valeur numérique de l'intégrale se lit au vernier du chariot C_2.

(A suivre).

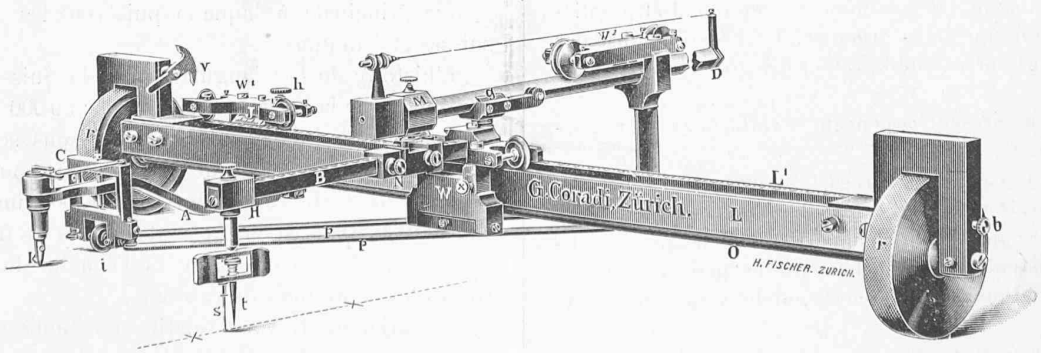

Fig. 8 — Intégraphe Abdank-Abakanovicz.